БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ. I.

Проф. Р. ДЕДЕКИНДЪ

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА

MATHESIS

2-е изданіе

БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ. 1.



**RICHARD DEDEKIND,**

ПРОФЕССОРЪ МАТЕМАТИКИ ВЫСШЕЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ ВЪ БРАУНШВЕЙГѢ.

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ
и
# ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.

Перевелъ **С. Шатуновскій,**

Привать-доцентъ Императорскаго Новороссійскаго Университета.

Съ присоединеніемъ статьи переводчика:

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНІЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.**

τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος
ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν.

Платонъ.

**Изданіе второе.**

MATHESIS

ОДЕССА 1909.

Типографія Л. С. Шутака, Одесса.
Троицкая улица, № 27.

## Отъ переводчика.

> На числа мы прежде всего должны смотрѣть, какъ на рядъ произвольно выбранныхъ знаковъ...
>
> H. von Helmholz («Zählen u. messen», 21).
>
> Во всякомъ случаѣ, число (numerus, ἀριθμός) есть произвольно созданный нами знакъ, который служитъ средствомъ достиженія весьма многообразныхъ цѣлей.
>
> E. Schröder («Lehrbuch d. Arith. u. Alg.», 2).
>
> Если точно слѣдить за тѣмъ, что мы дѣлаемъ при счетѣ количества (Menge oder Anzahl) вещей, то придемъ къ разсмотрѣнію способности духа относить вещи къ вещамъ, ставить одну вещь въ соотвѣтствіе съ другой, или отображать одну вещь въ другой...
>
> R. Dedekind. («Was sind u. was sollen die Zahlen?», VIII).

Приступая къ переводу этого небольшого сочиненія на русскій языкъ, мы, съ одной стороны, руководствовались назрѣвшею у насъ, какъ намъ кажется, потребностью отдать себѣ ясный отчетъ въ тѣхъ началахъ, которыя лежатъ въ основѣ ариѳметики вообще и ариѳметики ирраціональныхъ въ частности; съ другой стороны, намъ казалось, что въ маленькой брошюрѣ Дедекинда яркая образность и высокая отвлеченность соединены въ той мѣрѣ, въ какой это необходимо для того, чтобы уяснить читателю ходъ возникновенія современной вполнѣ отвлеченной идеи объ ирраціональномъ числѣ и возможность примѣненія этой идеи къ предметамъ болѣе или менѣе конкретнаго характера — къ геометрическимъ образамъ. Нашъ переводъ кажется намъ тѣмъ болѣе умѣстнымъ, что въ послѣднее время появились въ переводѣ на русскій языкъ работы Гельмгольца и Кронекера, посвященныя научному обоснованію теоріи раціональныхъ чиселъ. Знакомство съ этой теоріей существенно необходимо и для пониманія Дедекинда. Особенно важенъ тотъ фактъ, что теорія раціональныхъ чиселъ можетъ быть построена на опредѣленіи чиселъ, какъ *знаковъ, символовъ,* которые расположены въ установленной разъ навсегда послѣдовательности и которыми могутъ отмѣчаться нѣкоторыя соотношенія между вещами. Сами по себѣ эти знаки могутъ быть какой угодно природы — это могутъ быть звуки, цвѣта, тѣла, понятія и т. д., распредѣленные въ нѣкоторомъ неизмѣнномъ порядкѣ. Важность установленія такой неизмѣнной въ своемъ порядкѣ группы знаковъ заключается въ „способности нашего духа", какъ говоритъ Дедекиндъ, устанавливать соотвѣтствіе между этими знаками и индивидуумами какой бы то ни было группы вещей, благодаря чему мы вносимъ опредѣленный порядокъ и въ эту послѣднюю группу.

Когда при ближайшемъ изслѣдованіи вещей въ нихъ усматриваются такія свойства, или соотношенія, которыя не могутъ характеризоваться установленными знаками-числами, то создаютъ, если это выгодно, новые знаки такого рода, чтобы ими могли характеризоваться вновь усмотрѣнныя соотношенія вещей. Можно, если угодно, называть числами и эти новые знаки; можно ихъ такъ и не называть. Выгоднѣе, однако, бываетъ распространить терминъ „число" и на вновь вводимые символы. Такимъ образомъ, къ ряду символовъ, названныхъ цѣлыми числами, были прежде всего присоединены новые символы, также названные числами, именно дробными числами. Это оказалось необходимымъ потому, что цѣлыми числами нельзя или, по крайней мѣрѣ, весьма неудобно характеризовать такія явленія, которыя сопровождаются распаденіемъ предмета на части. Когда при нѣкоторыхъ изслѣдованіяхъ оказывается удобнѣе считать предметы, расположенные въ линейномъ порядкѣ, не отъ крайняго (крайняго можетъ и не быть), а отъ какого-либо промежуточнаго предмета, въ обѣ стороны отъ него, то является выгоднымъ присоединить къ прежнимъ символамъ новые символы—отрицательныя числа.

Мы не будемъ больше говорить объ этомъ. Укажемъ только, что введеніе новыхъ символовъ можетъ обусловливаться не объективными свойствами вещей, къ которымъ мы обыкновенно эти символы относимъ, а стремленіемъ подчинить старые символы нѣкоторымъ новымъ требованіямъ, несовмѣстимымъ съ тѣми свойствами символовъ, которыя служили имъ опредѣленіемъ. Такъ, напримѣръ, когда мы располагаемъ только тѣмъ рядомъ знаковъ, который мы называемъ системой раціональныхъ чиселъ, и ищемъ число $x$ (конечно, раціональное, ибо другихъ чиселъ мы не установили), котораго квадратъ равенъ данному положительному числу $a$, то оказывается, что для нѣкоторыхъ $a$ это число $x$ существуетъ; для другихъ же его вовсе нѣтъ, т. е. бываетъ такъ, что среди символовъ — раціональныхъ чиселъ — нѣтъ такого, квадратъ котораго равенъ $a$. Мы можемъ въ этомъ случаѣ ввести въ наши изслѣдованія новый символъ, квадратъ котораго равенъ $a$, можемъ называть и этотъ символъ числомъ—положимъ, радикальнымъ числомъ, можемъ его обозначить черезъ $a^{1/2}$, $\sqrt{a}$ или какъ-нибудь иначе. Можемъ всего этого и не дѣлать. Во второмъ случаѣ установимъ такую теорему: нѣкоторыя положительныя числа имѣютъ, другія не имѣютъ квадратныхъ корней; въ первомъ случаѣ теорема будетъ такая: всѣ положительныя числа имѣютъ квадратные корни. Обѣ теоремы вѣрны, ибо въ послѣдней подразумѣвается, что тѣ положительныя числа, которыя не имѣютъ корней среди старыхъ символовъ, имѣютъ корни среди новыхъ.

У самого Дедекинда опредѣленіе числа, какъ символа, нигдѣ явно не высказано, но такое опредѣленіе числа явно вытекаетъ изъ разсужденій, изложенныхъ въ другомъ его сочиненіи: «Was sind und was sollen die Zahlen?». По нашему мнѣнію, существенно важно знать, что на ирраціональныя числа (такъ же, какъ и на всякія другія) можно смотрѣть, какъ на чистые знаки, которые могутъ быть и дѣйствительно бываютъ весьма полезны, между прочимъ, по той причинѣ, что этими знаками удобно выражаются реальныя свойства вещей.

Распредѣленіе чиселъ на два класса, на классъ чиселъ алгебраическихъ и классъ трансцендентныхъ чиселъ, представляетъ собою дальнѣйшій шагъ въ теоріи развитія понятія о числѣ. Мы сочли поэтому умѣстнымъ присоединить къ статьѣ Дедекинда статью, которая содержала бы основную теорему, лежащую въ основаніи этой классификаціи,—теорему о существованіи трансцендентныхъ чиселъ. Статья эта, напечатанная въ свое время на страницахъ „Вѣстника опытной физики и элементарной математики“ („Вѣстникъ“, № 233), содержитъ извѣстное канторовское доказательство упомянутой теоремы.

# Непрерывность
## и
# ирраціональныя числа.

### Предисловіе автора.

Разсужденія, составляющія предметъ этого маленькаго сочиненія, относятся къ осени 1858 года. Тогда я, въ качествѣ профессора Союзнаго политехникума въ Цюрихѣ, въ первый разъ по своему положенію обязанъ былъ излагать элементы дифференціальнаго исчисленія и при этомъ чувствовалъ живѣе, чѣмъ когда-либо, недостатокъ въ дѣйствительно научномъ обоснованіи ариѳметики. При изложеніи понятія о приближеніи перемѣнной величины къ постоянному предѣлу и именно при доказательствѣ того положенія, что величина, которая возрастаетъ постоянно, но не сверхъ всякихъ границъ, должна приближаться къ нѣкоторому предѣлу, я прибѣгалъ къ геометрической наглядности. Да и теперь я изъ дидактическихъ основаній считаю такое привлеченіе геометрической наглядности при первомъ обученіи дифференціальному исчисленію необычайно полезнымъ, даже неизбѣжнымъ, если не хотятъ потратить слишкомъ много времени. Но никто не станетъ отрицать того, что этотъ способъ введенія въ изученіе дифференціальнаго исчисленія не можетъ имѣть никакого притязанія на научность.

Во мнѣ тогда это чувство неудовлетворенности преобладало въ такой степени, что я принялъ твердое рѣшеніе думать до тѣхъ поръ, пока не найду чисто ариѳметическаго и вполнѣ строгаго основанія для началъ анализа безконечныхъ. Говорятъ часто, что дифференціальное исчисленіе занимается непрерывными величинами, однако же нигдѣ не даютъ опредѣленія этой непрерывности и даже при самомъ строгомъ изложенiи дифференцiальнаго исчисленiя доказательства не основываютъ на непрерывности, а апеллируютъ болѣе или менѣе сознательно либо къ геометрическимъ представленiямъ, либо къ представленiямъ, которыя берутъ свое начало въ геометрiи, либо, наконецъ, основываютъ доказательства на положенiяхъ, которыя сами никогда не были доказаны чисто ариѳметическимъ путемъ. Сюда относится, напримѣръ, и вышеупомянутое положенiе; болѣе точное изысканiе убѣдило меня въ томъ, что это или всякое другое эквивалентное ему предложенiе можетъ до извѣстной степени разсматриваться, какъ достаточный фундаментъ для анализа безконечныхъ. Все сводится только къ тому, чтобы открыть настоящее начало этого положенiя въ элементахъ ариѳметики и вмѣстѣ съ этимъ прiобрѣсти дѣйствительное опредѣленiе существа непрерывности. Это удалось мнѣ 24 ноября 1858 года, и, нѣсколько дней спустя, я сообщилъ результаты своихъ размышленiй моему дорогому другу Durège'у, что повело къ продолжительной и оживленной бесѣдѣ. Впослѣдствiи я излагалъ эти мысли о научномъ обоснованiи ариѳметики то одному, то другому изъ моихъ учениковъ, читалъ также объ этомъ предметѣ докладъ въ ученомъ обществѣ профессоровъ здѣсь, въ Брауншвейгѣ, но я не могъ окончательно рѣшиться на дѣйствительное опубликованiе, потому, во-первыхъ, что изложенiе представляется не легкимъ, и потому еще, что и самый предметъ такъ мало плодовитъ. Нѣсколько дней назадъ, 14 марта, въ то время, какъ я наполовину сталъ уже подумывать о томъ, чтобы избрать эту тему предметомъ настоящаго юбилейнаго сочиненiя *), ко мнѣ въ руки попала, благодаря любезности ея автора, статья E. Heine (Crelle's Journal, Bd. 74), которая и подкрѣпила меня въ моемъ рѣшенiи. По существу я вполнѣ согласенъ съ содержанiемъ этого сочиненiя, но долженъ откровенно сознаться, что мое изложенiе кажется мнѣ болѣе простымъ по формѣ и болѣе точно выдвигающимъ настоящее ядро вопроса. Въ то время, какъ я писалъ это предисловiе (20 марта 1872 г.), я получилъ интересную статью „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen" G. Cantor'a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd. 5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Какъ мнѣ

*) Авторъ выпустилъ это сочиненiе къ юбилею своего отца.

(*Примѣч. переводчика*).

кажется при быстромъ чтеніи, аксіома въ § 2 вполнѣ согласуется, независимо отъ внѣшней формы ея изложенія, съ тѣмъ, что я отмѣчаю ниже въ § 3, какъ сущность непрерывности. Какую же пользу представитъ выдѣленіе, хотя бы только въ понятіи, дѣйствительныхъ чиселъ еще болѣе высокаго порядка, я, согласно съ моимъ пониманіемъ системы дѣйствительныхъ чиселъ, какъ совершенной въ самой себѣ, еще признать не въ состояніи.

## § 1. Свойства раціональныхъ чиселъ.

Хотя ариѳметика раціональныхъ чиселъ предполагается здѣсь уже извѣстной, но мнѣ думается, что полезно будетъ выдвинуть нѣкоторые главные моменты, не подвергая ихъ обсужденію, а съ тою только цѣлью, чтобы заранѣе намѣтить точку зрѣнія, на которую я становлюсь въ послѣдующемъ изложеніи. Я смотрю на всю ариѳметику, какъ на необходимое или, по крайней мѣрѣ, натуральное слѣдствіе простѣйшаго ариѳметическаго акта — счета; самый же счетъ представляетъ не что иное, какъ послѣдовательное созиданіе безконечнаго ряда положительныхъ цѣлыхъ чиселъ, гдѣ каждый индивидуумъ опредѣляется непосредственно ему предшествующимъ. Простѣйшій актъ заключается въ переходѣ отъ созданнаго уже индивидуума къ слѣдующему, вновь созидаемому. Уже сама по себѣ цѣпь этихъ чиселъ образуетъ необычайно полезное вспомогательное средство для человѣческаго ума и представляетъ неизсякаемое богатство замѣчательныхъ законовъ, къ которымъ мы приходимъ посредствомъ введенія четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Сложеніе есть соединеніе въ одинъ актъ упомянутыхъ простѣйшихъ актовъ, повторенныхъ сколько угодно разъ. Такимъ же образомъ изъ сложенія проистекаетъ умноженіе. Между тѣмъ, какъ обѣ эти операціи всегда выполнимы, выполнимость обратныхъ операцій — вычитанія и дѣленія — оказывается ограниченной. Каковъ бы ни былъ здѣсь ближайшій поводъ, какія бы сравненія и аналогіи съ опытомъ и наблюденіемъ ни приводили къ этому — мы этотъ вопросъ оставимъ въ сторонѣ; достаточно того, что именно эта ограниченность въ выполненіи обратныхъ операцій всякій разъ становилась настоящей причиной новаго творческаго акта. Такъ созданы человѣческимъ умомъ отрицательныя и дробныя числа, благодаря чему пріобрѣтено было орудіе безконечно болѣе высокаго совершенства въ видѣ системы всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Эта система, которую я обозначу черезъ R, обладаетъ прежде всего тою полнотою и законченностью, которую я въ другомъ мѣстѣ *) отмѣтилъ, какъ признакъ *числового корпуса* (Zahlkörper), и которая состоитъ въ томъ, что четыре основныя операціи со всякими двумя индивидуумами изъ R выполнимы, то есть, что результатомъ этихъ операцій всегда опять является опредѣленный индивидуумъ изъ R, если только исключить единственный случай дѣленія на нуль.

Для нашей ближайшей цѣли гораздо болѣе важнымъ является другое свойство системы R, которое можетъ быть выражено тѣмъ, что система R представляетъ правильно распредѣленную, безконечно простирающуюся въ двѣ стороны область одного измѣренія. Что̀ этимъ хотятъ сказать — достаточно указывается выборомъ выраженій, заимствованныхъ изъ геометрическихъ представленій; становится поэтому тѣмъ болѣе необходимымъ выдѣлить соотвѣтствующія имъ чисто ариѳметическія особенности, — чтобы не могло даже только казаться, будто ариѳметика нуждается въ такихъ чуждыхъ ей представленіяхъ.

Если нужно выразить, что знаки $a$ и $b$ означаютъ одно и то же раціональное число, то полагаютъ одинаково $a = b$, какъ и $b = a$ Различіе двухъ раціональныхъ чиселъ сказывается въ томъ, что разность $a - b$ имѣетъ или положительное, или отрицательное значеніе. Въ первомъ случаѣ $a$ *больше* $b$, $b$ *меньше* $a$, что и указывается знаками $a > b$, $b < a$ **). Такъ какъ во второмъ случаѣ $b - a$ имѣетъ положительное значеніе, то $b > a$, $a < b$. Сообразно съ этой двойственностью въ характерѣ различія двухъ чиселъ $a$ и $b$, имѣютъ мѣсто слѣдующіе законы:

I. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$. Всякій разъ, когда $a$, $c$ будутъ два различныхъ (или неравныхъ) числа и когда $b$ будетъ больше одного и меньше другого, мы, не опасаясь отголоска геометрическихъ представленій, будемъ это выражать такъ: $b$ лежитъ между обоими числами $a$, $c$.

II. Если $a$, $c$ суть два различныхъ числа, то всегда существуетъ безконечное множество чиселъ, лежащихъ между $a$, $c$.

III. Если $a$ есть опредѣленное число, то всѣ числа системы

*) «Vorlesungen ueber Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet». Zweite Auflage. § 159.

**) Въ послѣдующемъ подразумѣвается такъ называемое «алгебраическое» больше и меньше, если только не прибавлено слово «абсолютно».

$R$ распадаются на два класса $A_1$ и $A_2$, изъ коихъ каждый содержитъ безконечно много индивидуумовъ. Первый классъ $A_1$ обнимаетъ собою всѣ тѣ числа $a_1$, которыя меньше $a$; второй классъ $A_2$ обнимаетъ всѣ числа $a_2$, которыя больше $a$. Само число $a$ можетъ быть отнесено по произволу къ первому или ко второму классу, и тогда оно соотвѣтственно бываетъ наибольшимъ числомъ въ первомъ классѣ или наименьшимъ числомъ во второмъ. Въ каждомъ случаѣ разложенiе системы $R$ на два класса $A_1$, $A_2$ таково, что каждое число перваго класса $A_1$ меньше каждаго числа второго класса $A_2$.

### § 2. Сравненiе рацiональныхъ чиселъ съ точками прямой линiи.

Поставленныя нами на видъ свойства рацiональныхъ чиселъ напоминаютъ о взаимномъ относительномъ положенiи точекъ прямой линiи $L$. Если различать два принадлежащiя ей противоположныя направленiя словами „вправо“ и „влѣво“, и если $p$, $q$ — двѣ различныя точки, то либо точка $p$ расположена вправо отъ $q$, и въ то же время $q$ — влѣво отъ $p$, или, наоборотъ, $q$ — вправо отъ $p$, и въ то же время $p$ — влѣво отъ $q$. Третiй случай невозможенъ, если $p$ и $q$ дѣйствительно различныя точки. Сообразно съ этимъ различiемъ въ положенiи имѣютъ мѣсто слѣдующiе законы:

I. Если $p$ лежитъ вправо отъ $q$ и $q$ опять вправо отъ $r$, то и $p$ лежитъ вправо отъ $r$; говорятъ тогда, что $q$ лежитъ между точками $p$ и $r$.

II. Если $p$, $r$ двѣ различныя точки, то существуетъ безконечное множество точекъ, лежащихъ между $p$ и $r$.

III. Если $p$ есть опредѣленная точка на $L$, то всѣ точки на $L$ распадаются на два класса $P_1$, $P_2$, изъ коихъ каждый содержитъ безконечное множество индивидуумовъ. Первый классъ $P_1$ обнимаетъ собою всѣ тѣ точки $p_1$, которыя лежатъ влѣво отъ $p$, а второй классъ $P_2$ обнимаетъ всѣ точки, которыя лежатъ вправо отъ $p$. Сама точка $p$ можетъ быть отнесена по произволу къ первому или ко второму классу. Въ каждомъ случаѣ разложенiе прямой $L$ на два класса или куска таково, что каждая точка перваго класса $P_1$ лежитъ влѣво отъ каждой точки второго класса $P_2$.

Эта аналогiя между рацiональными числами и точками прямой становится, какъ извѣстно, дѣйствительною зависимостью, когда на прямой выбираютъ опредѣленную начальную или нулевую точку $o$ и опредѣленную единицу длины для измѣренія отрѣзковъ. При помощи послѣдней можно для каждаго раціональнаго числа $a$ построить соотвѣтствующую длину, и если нанести ее на прямую отъ точки $o$ вправо или влѣво, смотря по тому, есть ли $a$ положительное или отрицательное число, то получимъ опредѣленную конечную точку $p$, которая можетъ быть принята за точку, соотвѣтствующую числу $a$. Раціональному числу нуль соотвѣтствуетъ точка $o$. Такимъ образомъ, каждому раціональному числу $a$, т. е. каждому индивидууму въ R, соотвѣтствуетъ одна и только одна точка $p$, т. е. индивидуумъ на L. Если двумъ числамъ $a$, $b$ отвѣчаютъ двѣ точки $p$, $q$ и если $a > b$, то $p$ лежитъ вправо отъ $q$. Законамъ I, II, III предыдущаго параграфа вполнѣ отвѣчаютъ законы I, II, III настоящаго.

## § 3. Непрерывность прямой линіи.

Но теперь фактомъ величайшей важности является то обстоятельство, что на прямой L есть безконечно много точекъ, которыя не соотвѣтствуютъ никакому раціональному числу. Дѣйствительно, если точка $p$ соотвѣтствуетъ раціональному числу $a$, то, какъ извѣстно, длина $op$ соизмѣрима съ употребленной при построеніи единицей длины, т. е. существуетъ третья длина, такъ называемая общая мѣра, относительно которой обѣ длины представляются цѣлыми кратными. Но уже древніе греки знали и доказали, что существуютъ длины, несоизмѣримыя съ данной единицей длины,—напр., діагональ квадрата, сторона котораго есть единица длины. Если нанести такую длину отъ точки $o$ на прямую, то получимъ конечную точку, которой не соотвѣтствуетъ никакое раціональное число. Такъ какъ легко далѣе показать, что существуетъ безконечное множество длинъ, несоизмѣримыхъ съ единицей длины, то можемъ утверждать: прямая L безконечно болѣе богата индивидуумами-точками, чѣмъ область R раціональныхъ чиселъ индивидуумами-числами.

Если же хотятъ, а это въ самомъ дѣлѣ желательно, изслѣдовать всѣ явленія на прямой также и ариѳметическимъ путемъ, то, въ виду недостаточности для этой цѣли раціональныхъ чиселъ, становится необходимымъ существенно улучшить построенный путемъ созиданія раціональныхъ чиселъ инструментъ R, создавъ новыя числа такимъ образомъ, чтобы область чиселъ пріобрѣла ту же полноту, или, скажемъ прямо, ту же *непрерывность*, какъ и прямая линія.

Приведенныя до сихъ поръ соображенія всѣмъ такъ хорошо извѣстны, что многіе сочтутъ ихъ повтореніе совершенно излишнимъ. Однако же я нахожу ихъ краткое обозрѣніе необходимымъ для того, чтобы надлежащимъ образомъ подготовить главный вопросъ. Принятое до сихъ поръ введеніе ирраціональныхъ чиселъ связывается именно съ понятіемъ о протяженныхъ величинахъ — которое само нигдѣ до сихъ поръ не опредѣлено — и опредѣляетъ число, какъ результатъ измѣренія такой величины другою того же рода *). Вмѣсто этого я требую, чтобы ариѳметика развивалась сама изъ себя. Можно въ общемъ согласиться съ тѣмъ, что такія связи съ неариѳметическими представленіями дали ближайшій поводъ къ расширенію понятія о числѣ (хотя это рѣшительно не имѣло мѣста при введеніи комплексныхъ чиселъ); но это безусловно не можетъ служить достаточнымъ основаніемъ для того, чтобы ввести въ ариѳметику, науку о числахъ, эти чуждыя ей соображенія. Какъ отрицательныя и дробныя раціональныя числа созданы путемъ свободнаго творчества, и какъ вычисленія съ этими числами должны были и могли быть сведены къ законамъ вычисленій съ положительными цѣлыми числами, точно такъ же должно стремиться къ тому, чтобы ирраціональныя числа были вполнѣ опредѣлены черезъ посредство раціональныхъ чиселъ. Но какъ это сдѣлать—вотъ въ чемъ вопросъ.

Предыдущее сравненіе области R раціональныхъ чиселъ съ прямою привело къ открытію въ первой изъяновъ (Lückenhaftigkeit), неполноты, или разрывности, между тѣмъ какъ прямой мы приписываемъ полноту, отсутствіе пробѣловъ, или непрерывность. Въ чемъ же собственно состоитъ эта непрерывность? Все и заключается въ отвѣтѣ на этотъ вопросъ, и только въ этомъ отвѣтѣ мы пріобрѣтемъ научное основаніе для изслѣдованія *всѣхъ* непрерывныхъ областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малѣйшихъ частицъ, конечно, ничего не достигнешь. Дѣло идетъ о томъ, чтобы дать точный признакъ непрерывности, который могъ бы служить базисомъ дѣйствительныхъ дедукцій. Долгое время я напрасно объ

*) Кажущееся преимущество общности такого опредѣленія числа исчезаетъ тотчасъ же, какъ только подумаешь о комплексныхъ числахъ. Наоборотъ, по моему воззрѣнію, понятіе отношенія двухъ однородныхъ величинъ тогда только можетъ быть ясно развито, когда ирраціональныя числа уже введены.

этомъ думалъ, но, наконецъ, нашелъ искомое. Разныя лица, вѣроятно оцѣнятъ эту находку различно, но все же я думаю, что большинство найдетъ ея содержаніе весьма тривіальнымъ. Оно состоитъ въ слѣдующемъ: въ предыдущихъ параграфахъ обращено было вниманіе на то, что каждая точка *p* прямой производитъ разложеніе прямой на двѣ части такимъ образомъ, что каждая точка одной части расположена влѣво отъ каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности въ обратномъ принципѣ, то-есть, въ слѣдующемъ:

«Если всѣ точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка перваго класса лежитъ влѣво отъ каждой точки второго класса, то существуетъ одна и только одна точка, которая производитъ это раздѣленіе прямой на два класса, это разсѣченіе прямой на два куска» *).

Какъ уже и было сказано, я, кажется, не ошибаюсь, принявъ, что каждый тотчасъ же согласится съ истинностью этого утвержденія; большинство моихъ читателей будутъ даже очень разочарованы, узнавъ, что посредствомъ этой тривіальности долженъ быть снятъ

---

*) Т. е., если, слѣдуя какому бы то ни было закону (правилу), напр., подчиняясь условіямъ нѣкоторой задачи, мы произведемъ раздѣленіе точекъ прямой на два класса такимъ образомъ, что 1) каждая точка прямой принадлежитъ либо къ тому, либо къ другому классу, и 2) каждая точка одного класса расположена влѣво отъ каждой точки другого класса, то существуетъ одна и только одна точка такого свойства, что каждая точка, влѣво отъ нея лежащая, принадлежитъ къ одному классу, а всѣ остальныя точки прямой принадлежатъ къ другому классу. Если бы мы разорвали прямую, т. е. удалили бы изъ нея отрѣзокъ AB, то оставшійся геометрическій образъ («разорванная» прямая) былъ бы разбитъ на два куска P и Q, лежащіе съ различныхъ сторонъ изъяна такимъ образомъ, что 1) каждая точка разсматриваемаго образа принадлежала бы либо къ классу P, либо къ классу Q, и 2) если бы кусокъ P, содержащій точку A, лежалъ влѣво отъ изъяна, то каждая точка класса P лежала бы влѣво отъ каждой точки класса Q. Такимъ образомъ, каждая точка, лежащая влѣво отъ точки A, и точка A принадлежатъ къ классу P, а всѣ остальныя точки—къ классу Q. Точка B обладаетъ тѣмъ же свойствомъ: всѣ точки нашего образа, лежащія влѣво отъ B, принадлежатъ къ классу P; остальныя точки—къ классу Q. Существованіемъ не одной, а двухъ точекъ такого свойства, какъ A и B, характеризуется разрывность нашего образа. Невозможностью существованія двухъ такихъ точекъ и существованіемъ одной точки такого рода опредѣляется непрерывность прямой.

(*Примѣч. переводчика*).

покровъ съ тайны непрерывности. Относительно этого я замѣчу слѣдующее: мнѣ очень пріятно, если каждый находитъ упомянутый принципъ столь яснымъ и въ такой мѣрѣ согласнымъ со своимъ представленіемъ о прямой линіи; ибо я рѣшительно не въ состояніи привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не въ состояніи этого сдѣлать. Принятіе этого свойства прямой линіи есть не что иное, какъ аксіома, посредствомъ которой мы только и признаемъ за линіей ея непрерывность, мысленно вкладываемъ (hineindenken) непрерывность въ прямую. Если вообще пространство имѣетъ реальное бытіе, то ему *нѣтъ необходимости* быть непрерывнымъ. Безчисленныя его свойства оставались бы тѣми же, если бы оно было разрывнымъ. И если бы мы знали навѣрно, что пространство не обладаетъ непрерывностью, то, при желаніи, намъ все-таки ничто не могло бы помѣшать сдѣлать его непрерывнымъ черезъ мысленное заполненіе его пробѣловъ. Это заполненіе должно было бы состоять въ созиданіи новыхъ точекъ и осуществлялось бы сообразно упомянутому принципу.

## § 4. Созиданіе ирраціональныхъ чиселъ.

Послѣдними словами уже достаточно ясно указывается, какимъ образомъ разрывная область R раціональныхъ чиселъ должна быть дополнена до превращенія ея въ непрерывную. Какъ это поставлено было на видъ въ § 1 (III), каждое раціональное число $a$ производитъ разложеніе системы R на два класса $A_1$ и $A_2$ такого рода, что каждое число $a_1$ перваго класса меньше каждаго числа $a_2$ второго класса $A_2$; число $a$ представляетъ либо наибольшее число класса $A_1$, либо наименьшее число класса $A_2$. Если теперь дано какое-либо подраздѣленіе системы R на два класса $A_1$, $A_2$, обладающее только тѣмъ характернымъ свойствомъ, что каждое число $a_1$ въ $A_1$ меньше каждаго числа $a_2$ въ $A_2$, то для краткости мы будемъ называть такое подраздѣленіе *сѣченіемъ* и будемъ его обозначать черезъ $(A_1, A_2)$. Мы можемъ тогда сказать, что каждое число $a$ производитъ одно или, собственно, два сѣченія, на которыя мы, однако, не будемъ смотрѣть какъ на существенно различныя *); это сѣченіе

*) Число $a$ можетъ быть отнесено къ первому или ко второму классу. Оба эти подраздѣленія R на два класса разсматриваются, какъ два случая одного и того же сѣченія. Въ первомъ случаѣ, когда число $a$ отнесено къ первому классу, оно есть наибольшее число въ первомъ

имѣетъ *кромѣ того* то свойство, что либо между числами перваго класса есть наибольшее, либо между числами второго класса существуетъ наименьшее. И наоборотъ, если сѣченіе обладаетъ и этимъ свойствомъ, то оно производится этимъ наибольшимъ или наименьшимъ числомъ.

Легко, однако, убѣдиться въ томъ, что существуетъ безчисленное множество сѣченій, которыя не могутъ быть произведены раціональнымъ числомъ. Ближайшій примѣръ есть слѣдующій.

Пусть D будетъ положительное цѣлое число, но не квадратъ цѣлаго числа. Существуетъ положительное цѣлое число $\lambda$ такого рода, что

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Если возьмемъ для второго класса $A_2$ каждое положительное раціональное число, котораго квадратъ $> D$, а для перваго класса $A_1$ всѣ остальныя раціональныя числа, то это подраздѣленіе составитъ сѣченіе $(A_1, A_2)$, то есть каждое число $a_1$ будетъ меньше каждаго числа $a_2$. Именно, если $a_1 = 0$ или есть отрицательное число, то уже въ силу этого $a_1$ меньше каждаго числа $a_2$, ибо это послѣднее, по опредѣленію, представляетъ собой положительное число. Если же $a_1$ есть число положительное, то его квадратъ $\leq D$, и, слѣдовательно, $a_1$ меньше каждаго числа $a_2$, котораго квадратъ $> D$.

Это сѣченіе не производится, однако, никакимъ раціональнымъ числомъ. Чтобы доказать это, должно прежде всего обнаружить, что нѣтъ никакого раціональнаго числа, котораго квадратъ равенъ D. Хотя это и извѣстно изъ первыхъ элементовъ теоріи чиселъ, но мы все же находимъ возможнымъ удѣлить мѣсто слѣдующему косвенному доказательству. Если есть раціональное число, котораго квадратъ $= D$, то существуютъ и два положительныхъ цѣлыхъ числа $t$ и $u$, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$t^2 - Du^2 = 0,$$

и можно принять, что $u$ есть *наименьшее* положительное цѣлое число, обладающее тѣмъ свойствомъ, что его квадратъ черезъ умноженіе на D обращается въ квадратъ нѣкотораго цѣлаго числа $t$. Такъ какъ, очевидно,

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)\, u,$$

то число

$$u_1 = t - \lambda u$$

---

классѣ, и нельзя указать наименьшаго числа во второмъ классѣ; во второмъ случаѣ нѣтъ наибольшаго числа въ первомъ классѣ, но $a$ есть наименьшее число во второмъ классѣ.

*(Примѣч. переводчика).*

есть положительное цѣлое число и при томъ меньшее $u$. Если, далѣе, положить

$$t_1 = \mathrm{D}u - \lambda t,$$

то и $t_1$ будетъ положительное *) цѣлое число, при чемъ получаемъ

$$t_1^2 - \mathrm{D}u_1^2 = (\lambda^2 - \mathrm{D})\,(t^2 - \mathrm{D}u^2) = 0,$$

что противорѣчитъ допущенію, сдѣланному относительно $u$.

Такимъ образомъ, квадратъ всякаго раціональнаго числа $a$ или $<\mathrm{D}$, или $>\mathrm{D}$. Отсюда легко выводится, что въ классѣ $A_1$ нѣтъ наибольшаго, а въ классѣ $A_2$ нѣтъ наименьшаго числа. Дѣйствительно, если положить

$$y = \frac{x\,(x^2 + 3\mathrm{D})}{3x^2 + \mathrm{D}},$$

то

$$y - x = \frac{2x\,(\mathrm{D} - x^2)}{3x^2 + \mathrm{D}}$$

и

$$y^2 - \mathrm{D} = \frac{(x^2 - \mathrm{D})^3}{(3x^2 + \mathrm{D})^2}.$$

Если взять здѣсь для $x$ положительное число изъ класса $A_1$, то $x^2 < \mathrm{D}$, слѣдовательно, $y > x$ и $y^2 < \mathrm{D}$; поэтому $y$ также принадлежитъ къ классу $A_1$. Если же положить, что $x$ есть число изъ класса $A_2$, то $y < x$; $x > 0$ и $y^2 > \mathrm{D}$, такъ что и $y$ принадлежитъ къ классу $A_2$. Это сѣченіе не производится, слѣдовательно, никакимъ раціональнымъ числомъ.

Въ томъ свойствѣ, что не всѣ сѣченія производятся раціональными числами, и состоитъ неполнота, или разрывность, области R раціональныхъ чиселъ.

Теперь всякій разъ, когда намъ дано сѣченіе $(A_1, A_2)$, которое не можетъ быть произведено никакимъ раціональнымъ числомъ, мы *создаемъ* новое *ирраціональное* число $\alpha$, которое разсматривается нами, какъ вполнѣ опредѣленное этимъ сѣченіемъ $(A_1, A_2)$. Мы скажемъ, что число $\alpha$ соотвѣтствуетъ этому сѣченію, или что оно производитъ это сѣченіе. Такимъ образомъ, отнынѣ каждому опредѣленному сѣченію соотвѣтствуетъ одно и только одно раціональное или ирраціональное число, и мы будемъ смотрѣть на два

*) ибо $t_1 u = \mathrm{D}u^2 - \lambda t u = t^2 - \lambda t u = t\,(t - \lambda u) = t u_1$.

(*Примѣч. переводчика*).

числа, какъ на *различныя,* или *неравныя*, тогда и только тогда, когда они соотвѣтствуютъ существенно различнымъ сѣченіямъ.

Чтобы найти основаніе для распредѣленія всѣхъ *вещественныхъ*, т. е. всѣхъ раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, намъ необходимо прежде всего изслѣдовать соотношенія между двумя какими-либо сѣченіями $(A_1, A_2)$ и $(B_1 B_2)$, производимыя какими угодно двумя числами $\alpha$ и $\beta$. Всякое сѣченіе $(A_1, A_2)$, очевидно, дано вполнѣ уже въ томъ случаѣ, когда мы знаемъ одинъ изъ двухъ классовъ, напримѣръ, первый классъ $A_1$, потому что второй $A_2$ состоитъ изъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ, не заключающихся въ классѣ $A_1$; характерною же особенностью этого перваго класса является то, что, заключая въ себѣ какое-либо число $a_1$, онъ содержитъ и всѣ числа, меньшія $a_1$. Если теперь сравнимъ два первыхъ класса этого рода $A_1$ и $B_1$, то можетъ случиться, 1) что они вполнѣ тождественны, т. е. каждое число, содержащееся въ $A_1$, содержится также и въ $B_1$, и каждое число, содержащееся въ $B_1$, содержится и въ $A_1$. Въ этомъ случаѣ $A_2$ необходимо тождественно съ $B_2$; оба сѣченія вполнѣ тождественны, что мы знаками выражаемъ черезъ $\alpha=\beta$, или $\beta=\alpha$.

Но если два класса $A_1$ и $B_1$ не тождественны, то въ одномъ, напримѣръ, въ $A_1$, есть число $a'_1=b'_2$, не содержащееся въ классѣ $B_1$ и заключающееся, слѣдовательно, въ $B_2$; поэтому, всѣ числа $b_1$, заключающіяся въ $B_1$, несомнѣнно, будутъ меньше, чѣмъ это число $a'_1=b'_2$; слѣдовательно, всѣ числа $b_1$ заключаются и въ $A_1$.

Если же 2) это число $a'_1$ будетъ единственное число въ $A_1$, не входящее въ $B_1$, то всякое другое число $a_1$, содержащееся въ $A_1$, будетъ содержаться и въ $B_1$, а потому $a_1$ меньше $a'_1$, т. е. $a'_1$ есть наибольшее между числами $a_1$; поэтому сѣченіе $(A_1, A_2)$ производится раціональнымъ числомъ $\alpha=a'_1=b'_2$. Относительно второго сѣченія $(B_1, B_2)$ мы уже знаемъ, что всѣ числа $b_1$ класса $B_1$ содержатся и въ $A_1$, а потому они меньше, чѣмъ число $a'_1=b'_2$, которое содержится въ $B_2$; всякое же другое число $b_2$, содержащееся въ $B_2$, должно быть больше, чѣмъ $b'_2$, потому что иначе $b_2$ было бы также меньше, чѣмъ $a_1'$ и заключалось бы въ $A_1$, а, слѣдовательно, и въ $B_1$. Такимъ образомъ, $b'_2$ есть наименьшее между числами, содержащимися въ $B_2$; слѣдовательно, и сѣченіе $(B_1, B_2)$ производится тѣмъ же раціональнымъ числомъ $\beta=b'_2=a'_1=\alpha$. Оба сѣченія поэтому несущественно различны.

Но если 3) въ $A_1$ есть, по крайней мѣрѣ, два различныхъ раціональныхъ числа $a'_1 = b'_2$ и $a''_1 = b''_2$, не содержащихся въ $B_1$, то ихъ существуетъ и безконечное множество, потому что все безконечное множество чиселъ, лежащихъ между $a'_1$ и $a''_1$ (§ 1, II), содержится, очевидно, въ $A_1$, но не въ $B_1$. Два числа $\alpha$ и $\beta$, соотвѣтствующія въ этомъ случаѣ существенно различнымъ сѣченіямъ ($A_1$, $A_2$) и ($B_1$, $B_2$), мы также называемъ *различными*, а именно скажемъ, что $\alpha$ *больше*, чѣмъ $\beta$, что $\beta$ *меньше*, чѣмъ $\alpha$, и выразимъ это въ знакахъ какъ черезъ $\alpha > \beta$, такъ и черезъ $\beta < \alpha$. Здѣсь слѣдуетъ поставить на видъ, что это опредѣленіе вполнѣ совпадаетъ съ прежнимъ, когда оба числа $\alpha$ и $\beta$ были раціональными.

Остаются еще слѣдуюшіе возможные случаи: если 4) въ $B_1$ содержится одно и только одно число $b'_1 = a'_2$, не содержащееся въ $A_1$, то оба сѣченія ($A_1$, $A_2$) и ($B_1$, $B_2$) только несущественно различны и производятся однимъ и тѣмъ же числомъ $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$. Если же 5) въ $B_1$ есть, по крайней мѣрѣ, два различныхъ числа, не содержащихся въ $A_1$, то $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Такъ какъ этимъ исчерпываются всѣ случаи, то заключаемъ, что изъ двухъ различныхъ чиселъ одно необходимо большее, другое —меньшее; въ этомъ заключаются два возможныхъ случая. Третій случай невозможенъ. Это заключалось уже въ употребленіи *сравнительной степени* (больше, меньше) для выраженія отношенія между $\alpha$ и $\beta$; но только теперь выборъ такого выраженія вполнѣ оправданъ. Именно при изысканіяхъ такого рода необходимо самымъ заботливымъ образомъ остерегаться, чтобы, даже при всемъ желаніи быть честнымъ, не увлечься и не сдѣлать непозволительныхъ перенесеній изъ одной области въ другую изъ-за поспѣшнаго выбора выраженій, относящихся къ другимъ, уже развитымъ представленіямъ.

Если снова точно обсудимъ случай $\alpha > \beta$, то найдемъ, что меньшее число $\beta$ въ томъ случаѣ, когда оно раціональное, навѣрное, принадлежитъ къ классу $A_1$. Дѣйствительно, такъ какъ въ $A_1$ есть число $a'_1 = b'_2$, принадлежащее классу $B_2$, то, независимо отъ того, будетъ ли $\beta$ наибольшимъ числомъ въ $B_1$ или наименьшимъ въ $B_2$, навѣрное имѣемъ $\beta \leqq a'_1$, и, слѣдовательно, $\beta$ содержится въ $A_1$. Точно такъ же изъ $\alpha > \beta$ выводится, что большее число $\alpha$, когда оно раціональное, навѣрное содержится въ $B_2$, ибо $\alpha \leqq a'_1$. Соединяя оба соображенія, найдемъ слѣдующій результатъ: если сѣченіе ($A_1$, $A_2$) производится числомъ $\alpha$, то всякое раціональное число принадлежитъ къ классу $A_1$ или къ классу $A_2$, смотря по тому, будетъ ли оно меньше или больше $\alpha$. Если само число $\alpha$ раціональное, то оно можетъ принадлежать къ тому или другому классу.

Огсюда, наконецъ, вытекаетъ еще и слѣдующее: если $\alpha > \beta$, если, значитъ, существуетъ безчисленное множество чиселъ въ $A_1$, не содержащихся въ $B_1$, то существуетъ среди нихъ также безконечное множество такихъ чиселъ, которыя одновременно отличны и отъ $\alpha$ и отъ $\beta$. Каждое такое раціональное число $c < \alpha$, ибо оно содержится въ $A_1$, и въ то же время оно $> \beta$, потому что содержится въ $B_2$.

### § 5. Непрерывность области вещественныхъ чиселъ.

Сообразно съ твердо установленными нами родами различія чиселъ, система $\mathfrak{R}$ всѣхъ вещественныхъ чиселъ образуетъ правильно распредѣленную область одного измѣренія. Этимъ сказано только то, что нижеслѣдующіе законы имѣютъ мѣсто.

I. Если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то и $\alpha > \gamma$. Мы будемъ говорить, что $\beta$ лежитъ между числами $\alpha$ и $\gamma$.

II. Если $\alpha$, $\gamma$ суть два различныхъ числа, то всегда существуетъ безконечное мнсжество различныхъ чиселъ, лежащихъ между числами $\alpha$ и $\gamma$.

III. Если $\alpha$ есть опредѣленное число, то всѣ числа системы $\mathfrak{A}$ распадаются на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, изъ коихъ каждый содержитъ безконечно много индивидуумовъ. Первый классъ $\mathfrak{A}_1$ обнимаетъ собою всѣ тѣ числа $\alpha_1$, которыя $< \alpha$; второй классъ $\mathfrak{A}_2$ обнимаетъ всѣ тѣ числа $\alpha_2$, которыя $> \alpha$. Само число $\alpha$ можетъ быть отнесено по произволу къ первому или ко второму классу, и тогда оно соотвѣтственно бываетъ наибольшимъ числомъ въ первомъ или наименьшимъ во второмъ классѣ. Въ каждомъ случаѣ разложеніе системы $\mathfrak{A}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ таково, что каждое число перваго класса $\mathfrak{A}_1$ меньше каждаго числа второго класса $\mathfrak{A}_2$, и мы говоримъ, что это разложеніе произведено числомъ $\alpha$.

Чтобы быть краткимъ и не утомлять читателя, я опускаю доказательства этихъ положеній, вытекающія непосредственно изъ опредѣленій предыдущихъ параграфовъ.

Кромѣ этихъ свойствъ, область $\mathfrak{R}$ обладаетъ еще *непрерывностью*, т. е. имѣетъ мѣсто слѣдующее положеніе:

IV. Если система $\mathfrak{R}$ всѣхъ вещественныхъ чиселъ распадается на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такого рода, что каждое число $\alpha_1$ класса $\mathfrak{A}_1$

меньше каждаго числа $\alpha_2$ класса $\mathfrak{A}_2$, то существуетъ одно и только одно число $\alpha$, посредствомъ котораго это разложеніе производится.

*Доказательство.* Вмѣстѣ съ разложеніемъ, или сѣченіемъ $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ дается и нѣкоторое сѣченіе $(A_1, A_2)$ системы $R$ всѣхъ раціональныхъ чиселъ, опредѣленное тѣмъ правиломъ, что $A_1$ содержитъ всѣ раціональныя числа класса $\mathfrak{A}_1$, а $A_2$ — всѣ остальныя раціональныя числа, т. е. всѣ раціональныя числа класса $\mathfrak{A}_2$. Пусть $\alpha$ будетъ то вполнѣ опредѣленное число, которымъ производится это сѣченіе $(A_1, A_2)$. Если теперь $\beta$ есть какое-либо число, отличное отъ $\alpha$, то существуетъ безконечно много раціональныхъ чиселъ $c$, которыя лежатъ между $\alpha$ и $\beta$. Если $\beta < \alpha$, то $c < \alpha$; поэтому $c$ принадлежитъ къ классу $A_1$, а, слѣдовательно, и къ классу $\mathfrak{A}_1$, но такъ какъ вмѣстѣ съ этимъ $\beta < c$, то и $\beta$ принадлежитъ къ тому же классу $\mathfrak{A}_1$, ибо каждое число въ $\mathfrak{A}_2$ больше каждаго числа $c$ въ $\mathfrak{A}_1$. Если же $\beta > \alpha$, то $c > \alpha$; поэтому $c$ принадлежитъ къ классу $A_2$, а, слѣдовательно, и къ классу $\mathfrak{A}_2$; но такъ какъ вмѣстѣ съ этимъ $\beta > c$, то и $\beta$ принадлежитъ къ классу $\mathfrak{A}_2$, потому что каждое число въ $\mathfrak{A}_1$ меньше каждаго числа $c$ въ $\mathfrak{A}_2$. Такимъ образомъ, каждое число $\beta$, отличное отъ $\alpha$, принадлежитъ или къ классу $\mathfrak{A}_1$, или къ классу $\mathfrak{A}_2$, смотря по тому, будетъ ли $\beta < \alpha$, или $\beta > \alpha$; слѣдовательно, само $\alpha$ представляетъ либо наибольшее число въ $\mathfrak{A}_1$, либо наименьшее въ $\mathfrak{A}_2$, т. е. $\alpha$ есть нѣкоторое и, очевидно, единственное число, посредствомъ котораго производится разложеніе $\mathfrak{R}$ на классы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Что и требовалось доказать.

## § 6. Вычисленія съ вещественными числами.

Для того, чтобы вычисленіе съ двумя вещественными числами $\alpha$ и $\beta$ свести къ вычисленію съ раціональными числами, нужно только по двумъ сѣченіямъ $(A_1, A_2)$ и $(B_1, B_2)$, производимымъ числами $\alpha$ и $\beta$ въ системѣ $R$, опредѣлить сѣченіе $(C_1, C_2)$, соотвѣтствующее результату $\gamma$ вычисленія *). Мы ограничимся здѣсь приведеніемъ простѣйшаго примѣра — сложенія.

---

*) Авторъ, очевидно, хотѣлъ сказать слѣдующее: дѣйствія $(+)$, $(-)$, $(\times)$ и $(:)$ опредѣлены были до сихъ поръ только для раціональныхъ чиселъ; для ирраціональныхъ же чиселъ эти дѣйствія не будутъ имѣть смысла до тѣхъ поръ, пока мы не условимся относительно того, какой именно смыслъ мы *желаемъ* имъ придавать въ примѣненіи къ ирраціональнымъ числамъ. Такъ, напримѣръ, сумму двухъ ирраціональныхъ чи-

Если $c$ есть какое-либо раціональное число, то мы отнесемъ его къ классу $C_1$, когда существуетъ число $a_1$ въ $A_1$ и число $b_1$ въ $B_1$ такого рода, что $a_1+b_1 \geqq c$. Всѣ другія числа $c$ отнесемъ къ классу $C_2$. Это подраздѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса $C_1$ и $C_2$, очевидно, образуетъ сѣченіе, ибо всякое число $c_1$ въ $C_1$ меньше каждаго числа $c_2$ въ $C_2$. Если теперь оба числа $\alpha$ $\beta$ раціональны, то каждое содержащееся въ $C_1$ число $c_1 \geqq \alpha+\beta$, ибо $a_1 \geqq \alpha$ и $b_1 \geqq \beta$, а потому и $a_1+b_1 \geqq \alpha+\beta$. Если бы, далѣе, въ $C_2$ содержалось какое-либо число $c_2 < \alpha+\beta$, такъ что было бы $\alpha+\beta = c_2+p$, гдѣ $p$ означаетъ положительное число, то мы нашли бы, что

$$c_2=(\alpha-\frac{1}{2}p)+(\beta-\frac{1}{2}p),$$

а это находится въ противорѣчіи съ опредѣленіемъ числа $c_2$, такъ

---

селъ нельзя опредѣлить ни какъ совокупность, въ которой содержится столько единицъ и аликвотныхъ частей единицы, сколько ихъ въ двухъ слагаемыхъ, вмѣстѣ взятыхъ, ни индуктивно, какъ это дѣлаетъ Грассманъ для цѣлыхъ чиселъ, ибо ни то ни другое опредѣленіе не имѣетъ здѣсь смысла. Мы могли бы и совсѣмъ не употреблять термина «сумма» въ примѣненіи къ ирраціональнымъ числамъ, говоря, что ирраціональныя числа не имѣютъ суммы, но дѣлать такое или подобное ограниченіе было бы въ высшей степени неудобно; съ другой стороны, сообразуясь съ выгодами соблюденія въ одной и той же области знанія такъ называемаго правила перманентности въ опредѣленіи термина (по этому правилу всякое измѣненіе въ соозначеніи термина должно совершаться такъ, чтобы новое соозначеніе по возможности не только не противорѣчило прежнему, но заключало бы послѣднее, какъ частный случай), будетъ наиболѣе цѣлесообразнымъ опредѣлить термины основныхъ дѣйствій надъ вещественными числами такъ, чтобы въ своемъ новомъ соозначеніи эти термины могли быть относимы какъ къ раціональнымъ, такъ и къ ирраціональнымъ числамъ, и чтобы, совершая надъ раціональными числами дѣйствія на основаніи новаго ихъ опредѣленія, мы всегда получали прежніе результаты. Пусть $\gamma$ будетъ результатъ совершенія нѣкотораго дѣйствія О надъ двумя произвольными раціональными числами $\alpha$ и $\beta$. Если найдемъ правило К, по которому, зная сѣченія, производимыя числами $\alpha$ и $\beta$, мы всегда въ состояніи найти сѣченіе, производимое числомъ $\gamma$, то дѣйствіе О можно будетъ опредѣлить, какъ процессъ составленія нѣкотораго сѣченія по правилу К изъ сѣченій, производимыхъ числами $\alpha$ и $\beta$. Такое опредѣленіе дѣйствія О, имѣя смыслъ и въ томъ случаѣ, когда одно изъ чиселъ $\alpha$ и $\beta$ или оба ирраціональны, обладаетъ свойствомъ перманентности. Процессъ отысканія новыхъ перманентныхъ опредѣленій дѣйствій при переходѣ отъ раціональныхъ чиселъ ко всѣмъ вещественнымъ авторъ называетъ приведеніемъ вычисленій съ вещественными числами къ вычисленіямъ съ раціональными числами *(Примѣч. переводчика).*

какъ $\alpha - \frac{1}{2}p$ есть число изъ $A_1$. а $\beta - \frac{1}{2}p$ есть число изъ $B_1$. Таким образомъ, каждое содержащееся въ $C_2$ число $c_2 \geqq \alpha + \beta$; слѣдовательно, сѣченіе $(C_1, C_2)$ образуется въ этомъ случаѣ суммой $\alpha + \beta$. Мы поэтому не погрѣшимъ противъ опредѣленія, которое имѣетъ мѣсто въ ариѳметикѣ раціональныхъ чиселъ, если во всѣхъ случаяхъ будемъ разумѣть подъ *суммой* $\alpha + \beta$ двухъ произвольныхъ вещественныхъ чиселъ $\alpha$, $\beta$ то число $\gamma$, посредствомъ котораго образуется сѣченіе $(C_1, C_2)$ *). Далѣе, если только одно изъ двухъ чиселъ $\alpha$, $\beta$,—напримѣръ, $\alpha$—раціонально, то легко убѣдиться, что на сумму $\gamma = \alpha + \beta$ не вліяетъ то обстоятельство, отнесемъ ли мы $\alpha$ къ первому классу $A_1$ или ко второму $A_2$.

Такъ же, какъ сложеніе, можно опредѣлить и остальныя операціи такъ называемой элементарной ариѳметики, а именно составленіе разности, произведенія, степени, корня, логариѳма. Такимъ образомъ можно придти къ дѣйствительному доказательству теоремъ (какъ, напримѣръ, $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6}$), которыя, сколько я знаю, до сихъ поръ нигдѣ не доказаны. Слишкомъ большія подробности, которыхъ слѣдуетъ опасаться при опредѣленіи болѣе сложныхъ операцій, лежатъ частью въ природѣ самого предмета, большею же частью онѣ могутъ быть устранены. Въ этомъ отношеніи является весьма полезнымъ понятіе объ *интервалѣ*, т. е о системѣ A раціональныхъ чиселъ, обладающихъ слѣдующимъ характернымъ свойствомъ: если $a$ и $a'$ суть числа системы A, то всѣ раціональныя числа, лежащія между $a$ и $a'$, содержатся въ A. Система R раціональныхъ чиселъ, а также и оба класса каждаго ея сѣченія суть интервалы. Если существуетъ раціональное число $a_1$, которое меньше каждаго числа интервала A, и если есть раціональное число $a_2$, которое больше каждаго числа интервала A, то A называется конечнымъ интерваломъ; въ этомъ случаѣ существуетъ, очевидно, безконечное множество чиселъ того же рода, что и $a_1$, и безконечное множество чиселъ такого же рода, какъ $a_2$. Вся область R распадается на три куска: $A_1$, A, $A_2$. при чемъ появляются два вполнѣ опредѣленныхъ раціональныхъ или ирраціональныхъ числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, которыя соотвѣтственно могутъ быть названы нижней и верхней (или меньшей и большей) *границей* интервала A. Нижняя граница $\alpha_1$ опредѣляется сѣченіемъ, въ

*) Изъ сѣченій $(A_1, A_2)$ и $(B_1, B_2)$ по указанному только-что способу. (*Примѣч. переводчика*)

которомъ первый классъ образованъ системой $A_1$; верхняя же граница $\alpha_2$ опредѣляется сѣченіемъ, въ которомъ $A_2$ образуетъ второй классъ. О всякомъ раціональномъ или ирраціональномъ числѣ $\alpha$, лежащемъ между $\alpha_1$ и $\alpha_2$, будемъ говорить, что оно лежитъ *внутри* интервала A. Когда всѣ числа интервала A являются также числами интервала B, то A будетъ называться кускомъ B.

Придется, повидимому, сдѣлать еще большія отступленія, когда захотятъ перенести безчисленныя предложенія ариѳметики раціональныхъ чиселъ (напримѣръ, предложеніе $(a+b)c=ac+bc$) на произвольныя вещественныя числа. Это однако не такъ: скоро убѣждаешься, что все здѣсь приводится къ доказательству положенія, по которому ариѳметическія операціи сами обладаютъ нѣкоторой непрерывностью. То, что я подъ этимъ понимаю, я облеку въ форму общей теоремы.

„Если число $\lambda$ есть результатъ вычисленій, совершенныхъ надъ числами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,...., и если $\lambda$ лежитъ внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C (внутри которыхъ лежатъ числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,...) такого рода, что результатъ такого же вычисленія, въ которомъ, однако, числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... замѣнены любыми числами интервала A, B, C,...., будетъ всегда представлять число, лежащее внутри интервала L". Однако же, ужасная трудность, связанная со словеснымъ изложеніемъ такой теоремы, убѣждаетъ насъ въ томъ, что здѣсь необходимо что-нибудь предпринять для того, чтобы придти въ помощь языку: этого мы дѣйствительно достигаемъ самымъ совершеннымъ образомъ, когда вводимъ понятіе *о перемѣнныхъ величинахъ, о функціяхъ, о предѣлахъ*. Всего цѣлесообразнѣе было бы основать на этихъ понятіяхъ опредѣленія даже простѣйшихъ ариѳметическихъ операцій, что здѣсь, однако, не можетъ быть дальше проведено.

## § 7. Анализъ безконечныхъ.

Въ заключеніе мы уяснимъ себѣ зависимость между приведенными до сихъ поръ соображеніями и основными положеніями анализа безконечныхъ.

Говорятъ, что перемѣнная величина $x$, пробѣгающая послѣдовательныя опредѣленныя численныя значенія, приближается къ постоянному *предѣлу* $\alpha$, если она въ ходѣ процесса измѣненія *окончательно* *) заключается между каждыми двумя числами, между кото-

*) Авторъ употребляетъ слово «definitiv» = «рѣшительно, окончательно» въ томъ смыслѣ, что, пріобрѣтя какое-либо свойство въ опре-

рыми $\alpha$ само лежитъ, или, что то же, если разность $x - \alpha$, взятая абсолютно, окончательно опускается ниже всякаго даннаго значенія, отличнаго отъ нуля.

Одно изъ важнѣйшихъ предложеній гласитъ такъ: „Если величина $x$ возрастаетъ постоянно, но не сверхъ всякихъ границъ, то она приближается къ нѣкоторому предѣлу".

Я доказываю это предложеніе слѣдующимъ образомъ: по предположенію, существуетъ одно, а, слѣдовательно, и безчисленное множество чиселъ $\alpha_2$ такого рода, что $x$ постоянно остается $< \alpha_2$. Я обозначаю черезъ $\mathfrak{A}_2$ систему всѣхъ этихъ чиселъ $\alpha_2$ и черезъ $\mathfrak{A}_1$ систему всѣхъ остальныхъ чиселъ $\alpha_1$; каждое изъ послѣднихъ имѣетъ то свойство, что въ продолженіе процесса измѣненія имѣемъ окончательно $x \geqq \alpha_1$; поэтому каждое число $\alpha_1$ меньше каждаго числа $\alpha_2$, и, слѣдовательно, существуетъ число $\alpha$, которое представляетъ собою или наибольшее въ $\mathfrak{A}_1$, или наименьшее въ $\mathfrak{A}_2$ (§ 5, IV). Перваго быть не можетъ, ибо $x$ никогда не перестаетъ возрастать; поэтому $\alpha$ есть наименьшее число въ $\mathfrak{A}_2$. Какое бы число $\alpha_1$ мы ни взяли, рано или поздно будетъ окончательно $\alpha_1 < x < \alpha$, т. е. $x$ приближается къ предѣлу $\alpha$.

Это предложеніе эквивалентно принципу непрерывности, т. е оно теряетъ свою силу, какъ только мы станемъ смотрѣть хоть на одно вещественное число, какъ на число, отсутствующее въ области $\mathfrak{R}$; или, выражаясь иначе, если это предложеніе вѣрно, то вѣрна и теорема IV въ § 5.

Другое предложеніе, также ему эквивалентное, но еще болѣе часто встрѣчающееся въ анализѣ безконечныхъ, гласитъ такъ: „Если въ процессѣ измѣненія величины $x$ можно указать для каждой положительной величины $\delta$ соотвѣтствующій моментъ, начиная съ котораго $x$ измѣняется меньше, чѣмъ на $\delta$, то $x$ приближается къ нѣкоторому предѣлу".

Это обращеніе легко доказуемой теоремы, по которой перемѣнная величина, приближающаяся къ опредѣленному предѣлу, измѣняется, въ концѣ концовъ, меньше, чѣмъ на любую данную положительную величину, можетъ быть выведено какъ изъ предыдущаго

---

дѣленный моментъ своего измѣненія, перемѣнная величина удерживаетъ это свойство въ продолженіе всего остального хода процесса.

(*Примѣч. переводчика*).

предложенія, такъ и непосредственно изъ принципа непрерывности. Мы выберемъ послѣдній путь. Пусть $\delta$ будетъ произвольная положительная величина (т. е. $\delta > 0$); по предположенію, наступаетъ моментъ, съ котораго $x$ начинаетъ измѣняться меньше, чѣмъ на $\delta$, т. е., если въ этотъ моментъ $x$ обладаетъ значеніемъ $a$, то впослѣдствіи всегда $x > a - \delta$ и $x < a + \delta$. Я оставляю на время первоначальную гипотезу и держусь только сейчасъ доказаннаго факта, что всѣ позднѣйшія значенія перемѣнной $x$ лежатъ между конечными значеніями, которыя могутъ быть даны. На этомъ я основываю двойное подраздѣленіе всѣхъ вещественныхъ чиселъ. Къ системѣ $\mathfrak{A}_2$ я отношу всякое число $\alpha_2$ (напр., $a + \delta$), обладающее тѣмъ свойствомъ, что въ ходѣ процесса $x$ окончательно становится $\leqslant \alpha_2$; къ системѣ $\mathfrak{A}_1$ я отношу всякое число, не содержащееся въ $\mathfrak{A}_2$. Если $\alpha_1$ есть такое число, то, какъ бы далеко процессъ ни продолжался, случай $x > \alpha_1$ будетъ еще наступать безчисленное множество разъ *). Такъ какъ каждое число $\alpha_1$ меньше каждаго числа $\alpha_2$ **), то существуетъ вполнѣ опредѣленное число $\alpha$, которымъ производится это сѣченіе $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ системы $\mathfrak{R}$ и которое я буду называть верхнимъ предѣломъ перемѣнной величины $x$, остающейся всегда конечною. Но характеромъ измѣненій перемѣнной $x$ порождается также другое сѣченіе $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ системы $\mathfrak{R}$: число $\beta_1$ (напр., $a - \delta$) заключается въ $\mathfrak{B}_1$, если въ продолженіе процесса окончательно $x \geqslant \beta_1$; всякое другое число $\beta_2$, подлежащее включенію въ $\mathfrak{B}_2$, имѣетъ то свойство, что $x$ никогда окончательно не становится $\geqslant \beta_2$, такъ что случай $x < \beta_2$ будетъ наступать еще безчисленное множество разъ. Число $\beta$, производящее это сѣченіе, пусть называется нижнимъ предѣломъ перемѣнной $x$. Оба числа $\alpha$, $\beta$, очевидно, характеризуются слѣдующимъ свойствомъ: если $\varepsilon$ есть произвольно малая положительная величина, то всегда будетъ окончательно $x < \alpha + \varepsilon$ и $x > \beta - \varepsilon$, но никогда не будетъ окончательно $x < \alpha - \varepsilon$ и $x > \beta + \varepsilon$. Теперь возможны два случая. Если $\alpha$ и $\beta$ отличны другъ отъ друга, то необходимо $\alpha > \beta$, ибо всегда $\alpha_2 \geqslant \beta_1$; перемѣнная величина $x$ колеблется,

---

*) Ибо противное означало бы, что неравенство $x \leqslant \alpha_1$ справедливо *окончательно*, т. е. $\alpha_1$ принадлежало бы къ классу $\mathfrak{A}_2$

(*Прим. перев.*).

**) Потому что послѣ того, какъ величина $x$ *окончательно* стала $\leqslant \alpha_2$, она еще больше или сдѣлается еще больше, чѣмъ $\alpha_1$.

(*Прим. перев.*).

и, какъ бы далеко процессъ ни пошелъ, она все еще претерпѣваетъ измѣненія, значенія которыхъ превосходятъ $(\alpha-\beta)-2\varepsilon$, гдѣ $\varepsilon$ означаетъ произвольно малую положительную величину. Первоначальная гипотеза, къ которой я теперь только возвращаюсь, находится въ противорѣчіи съ этимъ выводомъ; остается поэтому только второй случай $\alpha=\beta$, и, такъ какъ уже доказано, что, какъ бы мала ни была положительная величина $\varepsilon$, окончательно будетъ всегда $x<\alpha+\varepsilon$ и $x>\beta-\varepsilon$, то $x$ приближается къ предѣлу $\alpha$, что и требовалось доказать.

Удовольствуемся этими примѣрами въ изложеніи связи между принципомъ непрерывности и анализомъ безконечныхъ.

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНІЯ
# ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ
## (по Cantor'у).

---

### Предварительныя замѣчанія.

§ 1. Число N называется *алгебраическимъ*, когда оно удовлетворяетъ уравненію вида.

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0 \quad \ldots. \quad (1),$$

гдѣ показатель $m$ есть положительное цѣлое число, коэффиценты $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ суть цѣлыя числа и $a$ отлично отъ нуля.

Въ этомъ уравненіи можемъ считать коэффиціентъ $a$ высшаго члена положительнымъ, ибо, допуская противное и мѣняя знаки всѣхъ членовъ уравненія, найдемъ, что число N удовлетворяетъ уравненію того же вида, но при этомъ коэффиціентъ высшаго члена уже есть положительное число. Можно также предположить, что общій наибольшій дѣлитель $d$ всѣхъ коэффиціентовъ уравненія равенъ единицѣ, ибо, предположивъ $d$ отличнымъ отъ единицы и раздѣливъ обѣ части уравненія на $d$, найдемъ, что число N удовлетворяетъ уравненію вида (1) съ коэффиціентами, которыхъ общій наибольшій дѣлитель равенъ единицѣ.

Разсматривая алгебраическія уравненія, мы всюду будемъ предполагать, что эти уравненія приведены къ виду (1), и что коэффиціенты въ этихъ уравненіяхъ удовлетворяютъ условіямъ, установленнымъ нами относительно коэффиціентовъ уравненія (1).

Степень алгебраическаго уравненія, которому удовлетворяетъ алгебраическое число N, по опредѣленію, не можетъ быть меньше единицы и, слѣдовательно, имѣетъ minimum. Зная это, докажемъ слѣдующую теорему.

**Теорема I.** *Если алгебраическое уравненіе*

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

*есть уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся числомъ* N, *и если полиномъ* A *дѣлится безъ остатка на полиномъ*

$$B = bx^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} + b_n,$$

*въ которомъ показатель* n *и коэффиціенты* $b$, $b_1, \ldots, b_{n-1}$, $b_n$ *удовлетворяютъ условіямъ, установленнымъ соотвѣтственно относительно показателя* m *и коэффиціентовъ полинома* A, *то полиномы* A *и* B *тождественно равны, т. е.*

$$m = n;\ a = b;\ a_1 = b_1; \ldots; a_{m-1} = b_{n-1};\ a_m = b_n.$$

**Доказательство.** Нельзя допустить, чтобы было $n > m$, ибо въ этомъ случаѣ полиномъ A не можетъ дѣлиться безъ остатка на полиномъ B. Покажемъ также, что и неравенство $n < m$ невозможно. Когда $n < m$, то частное отъ дѣленія полинома A на полиномъ B представится въ видѣ полинома

$$C = cx^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n-1} x + c_{m-n}$$

съ раціональными коэффиціентами, гдѣ $c = \frac{a}{b}$ есть положительное число.

Приведемъ всѣ коэффиціенты $c, c_1, \ldots, c_{m-n}$ къ одному знаменателю $q$ и допустимъ, что послѣ этого ихъ числители имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ число $d$. Полиномъ C представится въ видѣ

$$C = \frac{d}{q}\ C',$$

гдѣ

$$C' = c' x^{m-n} + c'_1 x^{m-n-1} + \ldots + c'_{m-n-1} x + c'_{m-n}.$$

Показатель $m - n$ и коэффиціенты $c', c'_1, \ldots c'_{m-n}$ удовлетворяютъ теперь условіямъ, установленнымъ относительно показателя и коэффиціентовъ полинома A, и мы имѣемъ тождественно:

$$A = \frac{d}{q} BC'.$$

Число N, обращая въ нуль полиномъ A, должно обратить въ нуль одинъ изъ двухъ полиномовъ B и $C'$, что невозможно, ибо степени алгебраическихъ уравненій $B = 0$ и $C' = 0$ меньше $m$, а уравненіе $A = 0$ есть алгебраическое уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x = N$.

Такимъ образомъ, необходимо допустить, что

$$m = n.$$

Въ этомъ случаѣ частное отъ дѣленія A на B равно $\frac{a}{b}$, и, обозначивъ черезъ $\frac{a'}{b'}$ несократимую дробь, равную $\frac{a}{b}$, будемъ имѣть тождественно:

$$ax^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=\frac{a'}{b'}(bx^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m),$$

откуда

$$b'a=a'b;\ b'a_1=a'b_1;\ldots;\ b'a_m=a'b_m.$$

Принимая во вниманіе, что $a'$ и $b'$ взаимно простыя числа, найдемъ изъ этихъ равенствъ, что каждое изъ чиселъ $a, a_1,\ldots, a_m$ имѣетъ дѣлителемъ число $a'$, а каждое число изъ чиселъ $b, b_1,\ldots, b_m$ имѣетъ дѣлителемъ число $b'$; слѣдовательно, $a'=b'=1$. Но въ такомъ случаѣ предыдущія равенства обращаются въ

$$a=b;\ a_1=b_1;\ldots;\ a_m=b_m,$$

что и требовалось доказать.

**Слѣдствіе.** *Если полиномъ* A *дѣлится безъ остатка на полиномъ*

$$B'=b'x^n+b'x^{n-1}+\ldots+b'_n,$$

*гдѣ* n *есть положительное цѣлое,* $b', b'_1,\ldots b'_n$ *суть раціональныя числа и* $b'$ *отлично отъ нуля, то* B' *отличается отъ* A *только постояннымъ (независимымъ отъ* x*) раціональнымъ множителемъ.* Дѣйствительно, мы видѣли уже, какъ приведеніемъ коэффиціентовъ къ одному знаменателю $q$ и вынесеніемъ за скобки общаго численнаго множителя $d$ можно представить такой полиномъ, какъ B', въ видѣ

$$B'=\frac{d}{q}B,$$

при чемъ въ полиномѣ

$$B=bx^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

коэффиціенты удовлетворяютъ условіямъ, установленнымъ относительно коэффиціентовъ полинома A. Дѣлясь безъ остатка на B', полиномъ A дѣлится безъ остатка и на B, но въ такомъ случаѣ

$$B=A \text{ и } B'=\frac{d}{q}A.$$

**Теорема II.** *Алгебраическое уравненіе* $A=0$ *наименьшей степени* m, *удовлетворяющееся при* $x=N$, **неприводимо,** *т. е. лѣвая его часть неспособна дѣлиться безъ остатка ни на какой полиномъ*

$$B=bx^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n,$$

*гдѣ* $n<m$ *есть цѣлое число,* $b, b_1,\ldots, b_n$ *суть раціональныя числа и* $b$ *отлично нуля.*

Ибо, допустивъ противное, нашли бы, что B отличается отъ A только постояннымъ множителемъ и, слѣдовательно, степень $n$

полинома B не могла бы быть ниже степени $m$ полинома A.

**Теорема III.** *Если алгебраическое уравненіе*

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

*удовлетворяющееся при* $x = N$, *неприводимо, и если*

$$B = bx^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

*есть одно изъ алгебраическихъ уравненій наименьшей степени, удовлетворяющихся при* $x = N$, *то полиномы* A *и* B *тождественно равны.*

**Доказательство.** Такъ какъ каждый изъ полиномовъ A и B дѣлится безъ остатка на $x - N$, то общій наибольшій дѣлитель D полиномовъ A и B содержитъ $x$. Изъ самаго же процесса нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя D вытекаетъ, что D есть полиномъ вида

$$D = dx^p + d_1x^{p-1} + \ldots + d_p,$$

гдѣ $p$ есть положительное цѣлое, $d, d_1, \ldots d_p$ — цѣлыя числа, коихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ 1-цѣ, и $d$ отлично отъ нуля. Отсюда, согласно теоремѣ I, вытекаетъ, что полиномы B и D тождественны; слѣдовательно, полиномъ A дѣлится безъ остатка на полиномъ B; но полиномъ A неприводимъ; слѣдовательно, степень $m$ полинома A равна степени $n$ полинома B. Частное отъ дѣленія A на B будетъ поэтому равно $\frac{a}{b}$ и не зависитъ отъ $x$. Частное $\frac{B}{A}$ будетъ равно $\frac{b}{a}$, т. е. полиномъ B дѣлится безъ остатка на полиномъ A, а такъ какъ $B = 0$ есть уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x = N$, и B дѣлится безъ остатка на A, то, по теоремѣ I, полиномы B и A тождественны, что и требовалось доказать.

**Теорема IV.** *Существуетъ только одно алгебраическое уравненіе наименьшей степени, удовлетворяющееся даннымъ алгебраическимъ числомъ* N. *Это уравненіе будемъ называть уравненіемъ, опредѣляющимъ алгебраическое число* N.

Ибо, если $A = 0$ и $B = 0$ суть два алгебраическихъ уравненія наименьшей степени, удовлетворяющихся числомъ N, то, по теоремѣ II, уравненіе $A = 0$ неприводимо, а по теоремѣ III полиномы A и B тождественно равны.

**Слѣдствіе.** Если алгебраическое число N удовлетворяетъ алгебраическому неприводимому уравненію $A = 0$, то уравненіе $A = 0$ и есть то единственное уравненіе, которымъ опредѣляется алгебраическое число N.

**Опредѣленіе трансцендентнаго числа.**

§ 2. Къ классу алгебраическихъ чиселъ относятся:

1) Всѣ раціональныя числа, ибо каждое раціональное число можно представить въ видѣ несократимой дроби $\frac{b}{a}$, которая опредѣляется алгебраическимъ неприводимымъ уравненіемъ

$$ax - b = 0.$$

2) Всѣ тѣ ирраціональныя числа, которыя получаются какъ результатъ соединенія раціональныхъ чиселъ при помощи конечнаго числа раціональныхъ дѣйствій ($+, -, \times, :$) и извлеченія конечнаго числа корней съ раціональными показателями, ибо такія ирраціональныя числа, какъ доказывается въ высшей алгебрѣ, суть корни неприводимыхъ алгебраическихъ уравненій.

3) Всѣ тѣ ирраціональныя числа, которыя, служа корнями алгебраическихъ неприводимыхъ уравненій, не могутъ быть получены какъ результаты соединенія раціональныхъ чиселъ посредствомъ конечнаго числа раціональныхъ дѣйствій и извлеченій корней съ раціональными показателями. Существованіе такихъ *алгебраическихъ* ирраціональныхъ чиселъ впервые доказано Абелемъ.

Спрашивается, исчерпывается ли *весь* классъ ирраціональныхъ чиселъ указанными двумя классами алгебраическихъ ирраціональныхъ чиселъ, или существуютъ еще ирраціональныя неалгебраическія числа, т. е. такія, которыя не могутъ удовлетворять никакому неприводимому алгебраическому уравненію?

Намекъ на существованіе неалгебраическихъ ирраціональныхъ чиселъ содержится уже у англійскаго геометра James Gregory (1638—1675) въ его сочиненіи «Vera circuli et hyperbolae quadratura». Лейбницъ назвалъ такія числа *трансцендентными*.

Итакъ, *трансцендентнымъ называется всякое число, которое неспособно удовлетворить никакому алгебраическому неприводимому уравненію.*

Строгое доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ дано впервые Liouville'емъ (Comptes rendus, 1844 и журналъ Liouville'я 16; 1851). Оно основано на теоріи непрерывныхъ дробей и представляется довольно сложнымъ *). Замѣчательное по простотѣ и геніальное по идеѣ доказательство существованія трансцендентныхъ

*) См. также: 1) E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898, стр. 26—33. 2) В. Каганъ. Новое доказательство трансцендентности чиселъ $\pi$ и $e$. «Вѣстникъ Опыт. Физики и Элементар. Математики», № 286.

чиселъ дано было затѣмъ нѣмецкимъ геометромъ Georg'омъ Cantor'омъ въ статьѣ „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeler algebraischer Zahlen“ въ журналѣ Crelle'я 77 (1873). Къ изложенію этого доказательства мы теперь и переходимъ.

### Понятіе объ исчислимомъ комплексѣ.

§ 3. Комплексомъ называютъ группу, составленную изъ ограниченнаго или неограниченнаго числа предметовъ, называемыхъ членами комплекса.

Мы будемъ разсматривать только такіе комплексы, членами которыхъ служатъ вещественныя числа, взятыя въ неограниченномъ числѣ.

Cantor называетъ *исчислимымъ комплексомъ* (abzählbare Menge) такой комплексъ, члены котораго могутъ быть перенумерованы, т. е. расположены въ одинъ рядъ такимъ образомъ, чтобы каждый членъ комплекса занималъ въ этомъ ряду совершенно опредѣленное мѣсто и чтобы каждое опредѣленное мѣсто ряда было занято однимъ только опредѣленнымъ членомъ комплекса.

Комплексъ положительныхъ четныхъ чиселъ представляетъ примѣръ исчислимаго комплекса, ибо, располагая эти числа въ порядкѣ ихъ возрастанія,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ldots,2n,\ldots,$$

видимъ, что каждый членъ (напримѣръ, $2n$) занимаетъ совершенно опредѣленное ($n$-ое) мѣсто и, наоборотъ, каждое опредѣленное ($n$-ое) мѣсто занято однимъ опредѣленнымъ членомъ ($2n$).

Комплексъ натуральныхъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n,\ldots \qquad (2)$$

представляетъ другой примѣръ исчислимаго комплекса.

Члены этого комплекса могутъ быть разсматриваемы, какъ нумера мѣстъ, занимаемыхъ членами любого исчислимаго комплекса и, слѣдовательно, между членами всякаго исчислимаго комплекса и членами комплекса (2) существуетъ однозначное соотвѣтствіе, т. е. каждому члену исчислимаго комплекса соотвѣтствуетъ членъ комплекса (2) и каждому члену комплекса (2) соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный членъ исчислимаго комплекса.

Когда между членами двухъ комплексовъ возможно установить однозначное соотвѣтствіе, то Cantor говоритъ, что эти комплексы имѣютъ одинаковую *мощность* (Mächtigkeit). Можно поэтому установить слѣдующее опредѣленіе:

*Исчислимымъ комплексомъ называется комплексъ, мощность котораго равна мощности комплекса натуральныхъ чиселъ.*

Съ перваго взгляда можетъ показаться, что комплексъ *всѣхъ раціональныхъ* положительныхъ чиселъ не представляется исчислимымъ комплексомъ. Дѣйствительно, располагая всѣ эти числа въ одинъ рядъ по порядку ихъ возрастанія, находимъ, что каждому опредѣленному раціональному положительному числу N предшествуетъ безчисленное множество другихъ раціональныхъ чиселъ, меньшихъ N, вслѣдствіе чего нельзя указать номера мѣста, занимаемаго въ этомъ ряду числомъ N. Можно, однако же, дать другое расположеніе членамъ комплекса раціональныхъ положительныхъ чиселъ, при чемъ каждое число будетъ занимать совершенно опредѣленное мѣсто.

Комплексъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ представляется комплексомъ всѣхъ неравныхъ между собою раціональныхъ положительныхъ несократимыхъ дробей, которыхъ знаменатели въ частныхъ случаяхъ могутъ быть равны единицамъ. Разсмотримъ одну такую несократимую дробь $\frac{a}{b}$. Положимъ

$$H = a + b \tag{3}$$

и будемъ называть цѣлое положительное число H высотою разсматриваемой несократимой дроби. Каждая несократимая дробь будетъ имѣть опредѣленную высоту H. Наоборотъ, существуетъ только *ограниченное число* несократимыхъ дробей, имѣющихъ данное цѣлое положительное число H своею высотою.

Для нахожденія всѣхъ этихъ дробей достаточно разрѣшить относительно неизвѣстныхъ $a$ и $b$ неопредѣленное уравненіе (3) въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, взять значенія $a$ числителями, а соотвѣтствующія значенія $b$ знаменателями дробей и отбросить всѣ тѣ дроби, которыя окажутся сократимыми. А такъ какъ уравненіе (3) допускаетъ только ограниченное число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній, то число несократимыхъ дробей, имѣющихъ H своею высотой, непремѣнно будетъ ограниченнымъ. Такъ, напримѣръ, въ группѣ дробей

$$\frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, \frac{9}{1}$$

заключаются всѣ тѣ раціональныя числа, которыхъ высота равна 10.

Если распредѣлимъ всѣ раціональныя числа въ классы по ихъ высотамъ 1, 2, 3, 4,..., если затѣмъ внутри каждаго класса расположимъ числа въ порядкѣ ихъ возрастанія и если, наконецъ, соединимъ эти классы въ одинъ рядъ, какъ это здѣсь показано:

$$\text{Числа: } 0,\ 1,\ \underbrace{\left|\frac{1}{2},\ 2\right|}_{3,}\ \underbrace{\left|\frac{1}{3},\ \frac{3}{1}\right|}_{4,}\ \underbrace{\left|\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\right|}_{5,}\ \ldots,$$

$$\text{Высоты: } 1,\ 2,\ \ldots,$$

то каждое положительное раціональное число будетъ занимать въ этомъ ряду опредѣленное мѣсто, и на каждомъ мѣстѣ будетъ находиться только одно опредѣленное число. Такимъ образомъ, комплексъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ оказывается исчислимымъ комплексомъ.

### Комплексъ вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ.

§ 4. Доказательство существованіи трансцендентныхъ вещественныхъ чиселъ основывается у Cantor'а на слѣдующихъ двухъ теоремахъ.

**Первая теорема Cantor'a.** *Комплексъ вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ есть исчислимый комплексъ.*

**Доказательство.** Пусть N будетъ алгебраическое число, опредѣляемое неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_n x^n + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0.$$

Обозначимъ черезъ $|a_n|$ численную величину коэффиціента $a_n$. Положимъ

$$H = m - 1 + a + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots + |a_m| \qquad (4)$$

и будемъ называть число H высотою алгебраическаго числа N и опредѣляющаго его уравненія $A = 0$. Каждое алгебраическое число имѣетъ, такимъ образомъ, опредѣленную высоту H, которая выражается цѣлымъ положительнымъ числомъ.

Наоборотъ, существуетъ только ограниченное число вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ, которыхъ высота равна данному положительному цѣлому числу H. Чтобы найти всѣ алгебраическія числа высоты H, составимъ всѣ тѣ алгебраическія неприводимыя уравненія, которыхъ высота равна H. Для этой цѣли достаточно будетъ сначала разрѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе (4), допускающее только конечное число системъ цѣлыхъ и положительныхъ значеній для $m,\ a,\ |a_1|, \ldots, |a_m|$. Имѣя всѣ системы рѣшеній уравненія (4), напишемъ всѣ тѣ алгебраическія уравненія, которыхъ высота равна H, при чемъ коэффиціентами при $x^n$ въ составляемыхъ уравненіяхъ будутъ служить различныя значеніе выраженія $\pm |a_n|$. Изъ полученной такимъ образомъ системы уравненій исключимъ всѣ приводимыя уравненія, а также и всѣ тѣ уравненія, коэффиціенты которыхъ имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ число, отличное отъ единицы. Остающаяся послѣ этого система уравненій будетъ въ себѣ заключать всѣ тѣ и только тѣ неприводимыя алгебраическія уравненія, которыхъ высота равна H. Система конечнаго числа вещественныхъ чиселъ, изъ коихъ каждое удовлетворяетъ одному изъ этихъ уравненій, будетъ содержать всѣ тѣ и только тѣ алгебраическія числа, которыхъ высота равна H*).

---

*) Найдемъ, для примѣра, всѣ тѣ вещественныя алгебраическія числа, которыхъ высота равна 4. Полагая $H=4$ въ уравненіи (4) и замѣчая, что при этомъ $m$ не можетъ быть больше 5 и что $a_m$ необходимо отлично отъ 0 (ибо въ противномъ случаѣ соотвѣтствующее алгебраическое уравненіе степени $m$, дѣлясь безъ остатка на $x$, будетъ приводимымъ), находимъ, что вопросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ каждаго изъ слѣдующихъ неопредѣленныхъ уравненій:

$$a+|a_1|=4 \quad \ldots \ldots \quad (m=1),$$
$$a+|a_1|+|a_2|=3 \quad \ldots \ldots \quad (m=2),$$
$$a+|a_1|+|a_2|+|a_3|=2 \quad \ldots \ldots \quad (m=3),$$
$$a+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=1 \quad \ldots \ldots \quad (m=4),$$
$$a+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=0 \quad \ldots \ldots \quad (m=5).$$

Послѣднее уравненіе не допускаетъ положительнаго значенія для $a$ и потому должно быть отброшено. Уравненіе, соотвѣтствующее $m=4$, уже при $a=1$ не допускаетъ для $|a_4|$ значенія, отличнаго отъ 0, и потому также должно быть отброшено. Въ уравненіи, соотвѣтствующемъ $m=1$, числа $a$ и $|a_1|$ положительны и общій наибольшій дѣлитель ихъ равенъ единицѣ, а потому имѣемъ только слѣдующія двѣ системы рѣшеній:

$$a=1;\ |a_1|=3,$$
$$a=3;\ |a_1|=1,$$

соотвѣтственно чему имѣемъ два уравненія:

$$x\pm 3=0;\ 3x\pm 1=0.$$

Уравненіе, соотвѣтствующее $m=2$, допускаетъ, при $a$ и $|a_2|$ положительныхъ, только слѣдующія системы рѣшеній:

$$a=|a_1|=|a_2|=1;$$
$$a=1,\ a_1=0,\ |a_2|=2 \text{ и } a=2,\ a_1=0,\ |a_2|=1,$$

соотвѣтственно чему имѣемъ 8 уравненій:

$$x^2\pm x+1=0;\ x^2\pm x-1=0;$$
$$x^2\pm 2=0;\ 2x^2\pm 1=0.$$

Первыя два уравненія, а также и уравненія $x^2+2=0$, $2x^2+1=0$, какъ не содержащія вещественныхъ корней, должны быть отброшены.

Если распредѣлимъ всѣ вещественныя алгебраическія числа въ классы по ихъ высотамъ 1, 2, 3, 4,..., если затѣмъ внутри каждаго класса расположимъ числа въ порядкѣ ихъ возрастанія и если, наконецъ, соединимъ эти классы въ одинъ рядъ, то каждое вещественное алгебраическое число будетъ занимать въ этомъ ряду вполнѣ опредѣленное мѣсто и на каждомъ мѣстѣ будетъ находиться только одно опредѣленное алгебраическое число. Теорема Cantor'а, такимъ образомъ, доказана.

**Вторая теорема Cantor'а.** *Можно найти безконечное число вещественныхъ чиселъ, заключающихся между данными предѣлами* a *и* b > a *и не содержащихся въ данномъ исчислимомъ комплексѣ вещественныхъ чиселъ.*

**Доказательство.** Пусть C будетъ исчислимый комплексъ вещественныхъ чиселъ. Расположимъ эти числа въ одинъ рядъ

$$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, \ldots \qquad (5)$$

такъ, чтобы каждое занимало въ этомъ ряду вполнѣ опредѣленное мѣсто, и обратимъ каждое изъ нихъ въ безконечную десятичную дробь. Если какое-либо изъ чиселъ N обращается въ конечную десятичную дробь,—напримѣръ, 0,26,—то эту десятичную дробь можно будетъ представить въ видѣ безконечной десятичной дроби двумя способами: какъ безконечную десятичную дробь съ періодомъ 0 и какъ безконечную десятичную дробь съ періодомъ 9 т. е.

$$0{,}26 = 0{,}26000\ldots \text{ и } 0{,}26 = 0{,}25999\ldots$$

---

Уравненіе, соотвѣтствующее $m=3$, допускаетъ, при $a$ и $|a_3|$ положительныхъ, только одну систему рѣшеній

$$a = |a_3| = 1; \; |a_1| = |a_2| = 0,$$

соотвѣтственно чему имѣемъ 2 уравненія

$$x^3 \pm 1 = 0.$$

Оба эти уравненія, какъ приводимыя, должны быть отброшены. Такимъ образомъ находимъ, что неприводимыми алгебраическими уравненіями высоты 4, удовлетворяющимися вещественными значеніями $x$, будутъ только слѣдующія уравненія:

$$x \pm 3 = 0; \; 3x \pm 1 = 0; \; x^2 \pm x - 1 = 0; \; x^2 - 2 = 0; \; 2x^2 - 1 = 0.$$

Вещественными алгебраическими числами, которыхъ высота равна 4, будутъ слѣдующія 12 чиселъ:

$$\pm 3; \pm \frac{1}{3}; \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}; \pm \sqrt{2}; \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Мы предположимъ, что, если въ ряду (5) какое-либо изъ чиселъ N обращается въ конечную десятичную дробь, то число N замѣщено двумя равными ему безконечными десятичными дробями. Найдемъ затѣмъ двѣ конечныя десятичныя дроби, отличающіяся другъ отъ друга только одною единицею какого-либо десятичнаго порядка и содержащіяся между двумя данными предѣлами $a$ и $b > a$. Пусть, напримѣръ, будетъ

$$a < 0{,}45 < 0{,}46 < b.$$

Составимъ безконечную десятичную дробь

$$c = 0{,}45\, c_3 c_4 c_5 \ldots c_n \ldots$$

гдѣ $c_3$, $c_4 \ldots$ $c_n \ldots$ суть послѣдовательныя цифры числа $c$, начиная съ третьяго десятичнаго порядка. Каковы бы ни были цифры $c_3$, $c_4, \ldots$ $_n \ldots$, дробь $c$ будетъ содержаться въ границахъ 0,45 и 0,46, а слѣдовательно между $a$ и $b$. Возьмемъ теперь $c_3$ отличнымъ отъ третьей цифры десятичнаго порядка числа $N_1$, или отличнымъ отъ третьихъ цифръ двухъ безконечныхъ періодическихъ дробей, занимающихъ въ ряду (5) мѣсто числа $N_1$. Точно такъ же возьмемъ $c_4$ отличнымъ отъ четвертой цифры числа $N_2$, или отъ четвертыхъ цифръ двухъ дробей, замѣняющихъ въ ряду (5) число $N_2$ и т. д., вообще, цифру $c_n$ возьмемъ отличною отъ $n$-ой цифры числа $N_{n-2}$, или отъ $n$-ыхъ цифръ двухъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, замѣщающихъ число $N_{n-2}$ въ ряду (5). Если затѣмъ подчинимъ выборъ цифръ $c_3$, $c_4, \ldots$ какому-либо опредѣленному дополнительному правилу, которое позволяло бы выбирать каждую цифру однимъ только способомъ, то для $c$ получимъ опредѣленную безконечную десятичную дробь, содержащуюся между предѣлами $a$ и $b$ и не входящую въ составъ комплекса C. Дѣйствительно, допуская противное, мы нашли бы, что $c$ занимаетъ опредѣленное, напримѣръ, $n$-ое мѣсто въ ряду (5), что невозможно, такъ какъ $(n+2)$-ой десятичный знакъ числа $c$ отличается отъ соотвѣтствующаго $(n+2)$-ого знака числа $N_n$, или отъ $(n+2)$-ыхъ цифръ двухъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, равныхъ $N_n$.

Такихъ чиселъ, какъ $c$, можно составить сколько угодно, варіируя дополнительное правило выбора цифръ $c_3$, $c_4, \ldots$, что и требовалось доказать.

Какъ непосредственное слѣдствіе изъ приведенныхъ двухъ теоремъ Cantor'а, вытекаетъ.

**Третья теорема Cantor'а.** *Существуетъ неограниченное число вещественныхъ трансцендентныхъ чиселъ, содержащихся между двумя данными вещественными предѣлами* a *и* b > a.

Ибо, по первой теоремѣ Cantor'а, комплексъ вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ есть исчислимый комплексъ C, а по второй теоремѣ можно написать сколько угодно вещественныхъ чиселъ, не содержащихся въ этомъ комплексѣ и заключающихся между предѣлами $a$ и $b$.

## Содержаніе.

40 коп.