БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ. II.

Проф. І. ГЕЙБЕРГЪ

НОВОЕ СОЧИНЕНІЕ

АРХИМЕДА

Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ теоремахъ механики.

MATHESIS

БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ. II.

Проф. І. ГЕЙБЕРГЪ

НОВОЕ СОЧИНЕНІЕ АРХИМЕДА.

Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ теоремахъ механики.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Съ предисловіемъ привать-доцента И. Ю. ТИМЧЕНКО.

τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν.

Платонъ.

ОДЕССА. 1909.

Типографія М. ШПЕНЦЕРА, ул. Новосельскаго, 66.


ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

АРХИМЕДЪ

и его новооткрытое произведеніе.

Архимедъ—величайшій математикъ древности, одинъ изъ величайшихъ геніевъ всѣхъ временъ. Древніе передавали чудесные разсказы о его открытіяхъ и изобрѣтеніяхъ, и слава его пережила многіе вѣка и, нисколько не померкнувъ, дошла до нашего времени. Лейбницъ ставилъ на ряду съ нимъ только двухъ великихъ математиковъ-мыслителей—Галилея и Декарта. Мы могли бы прибавить къ этимъ двумъ именамъ лишь другія два—самого Лейбница и его великаго современника и соперника Ньютона. [1])

Архимедъ родился въ Сиракузахъ, вѣроятно, около 287 г. до Р. Х. Какъ передаютъ нѣкоторые изъ его біографовъ[2]), онъ въ молодости былъ въ Александріи, гдѣ учился у Евклида, и по возвращеніи оттуда посвятилъ свою жизнь исключительно научнымъ занятіямъ. По смерти сиракузскаго царя Гіерона, съ которымъ, какъ говорятъ, Архимедъ состоялъ въ родствѣ, для родины великаго ученаго наступили черные дни. Гіерону наслѣдовалъ его внукъ, умершій вскорѣ послѣ вступленія на престолъ. Военачальникъ Гиппократъ, желая захватить власть въ свои руки, вступилъ въ сношенія съ Карѳагеномъ и, въ угоду своимъ союзникамъ, приказалъ умертвить большое число римлянъ около сицилійскаго города Леонтія. Тогда римляне рѣшили завла-

---

[1]) Sed scientiae pulcherrimae in clara luce collocatae laus summo Viro Renato Cartesio debebatur.... Si quis.... summam rerum et inventorum multitudinem spectaverit, fatebitur post Archimedem et Galilaeum nullum exstare scriptorem Mathematicum unde plura et majora disci possent.

[2]) Главнымъ источникомъ біографическихъ свѣдѣній объ Архимедѣ служило для древнихъ жизнеописаніе, составленное нѣкіимъ Гераклидомъ и до насъ не дошедшее. Это былъ, вѣроятно, Гераклидъ изъ Оксиринха, сынъ астронома Серапіона, жившій во II вѣкѣ до Р. Х. Въ настоящее время источниками для жизнеописанія Архимеда служатъ Титъ Ливій (XXV), Цицеронъ (Tuscul. Disp. и C. Verrem), Діодоръ, Силій Италикъ, Валерій Максимъ. Тцетцесъ, жившій въ XII в., говоритъ, что Архимедъ прожилъ 75 лѣтъ, а такъ какъ онъ умеръ въ 212 г. до Р. Х., то долженъ былъ родиться около 287 г. до Р. Х. Особенно интересны свѣдѣнія о той роли, которую игралъ Архимедъ при осадѣ Сиракузъ, передаваемыя Плутархомъ въ жизнеописаніи Марцелла. Ср. Heiberg. Questiones Archimedeae, Havn. 1879.

дѣть Сиракузами. Римскій полководецъ Марцеллъ подступилъ къ городу въ 214 г. до Р. Х. и осадилъ его съ суши и съ моря. Архимедъ приложилъ всѣ свои геніальныя способности, всѣ силы своей великой души къ защитѣ отчизны. Подъ его руководствомъ жители Сиракузъ сопротивлялись римлянамъ въ теченіе двухъ лѣтъ и отражали ихъ нападенія съ помощью удивительныхъ военныхъ орудій, изобрѣтенныхъ самимъ Архимедомъ. Славному ученому не пришлось, однако, спасти родного города. Римлянамъ удалось захватить сиракузянъ врасплохъ и войти въ городъ, Архимедъ, погруженный въ это время въ рѣшеніе геометрической задачи, ничего не зналъ о происходящемъ. Римскіе солдаты ворвались къ нему въ домъ, и одинъ изъ нихъ убилъ Архимеда. Такъ погибъ въ 212 г. до Р. Х. славный защитникъ Сиракузъ, къ большому огорченію Марцелла, по приказанію котораго Архимеда похоронили съ почестями и на памятникѣ его, по завѣщанію самого геометра, изобразили шаръ, вписанный въ цилиндръ,—фигуру, напоминавшую объ одномъ изъ замѣчательнѣйшихъ его открытій. Цицеронъ, во время своей квестуры въ Сициліи, видѣлъ еще этотъ памятникъ, но онъ тогда уже былъ заброшенъ и заросъ кустарникомъ.

До насъ дошло, не считая новооткрытаго „Эфодика“, восемь математическихъ сочиненій, приписываемыхъ Архимеду, въ двѣнадцати книгахъ, а именно: 1) Двѣ книги о равновѣсіи плоскихъ фигуръ вмѣстѣ съ книгой о квадратурѣ параболы; 2) Двѣ книги о шарѣ и цилиндрѣ; 3) Объ измѣреніи круга; 4) Объ улиткообразныхъ линіяхъ, или спираляхъ; 5) О коноидахъ и сфероидахъ; 6) Псаммитъ, или исчисленіе песку; 7) Двѣ книги о плавающихъ тѣлахъ; 8) Леммы [1]).

Ѳ. И. Петрушевскій перевелъ на русскій языкъ книги о шарѣ и цилиндрѣ, объ измѣреніи круга, Леммы и книгу Псаммитъ. Пейрардъ (Peyrard) перевелъ на французскій языкъ всѣ восемь упомянутыхъ сочиненій Архимеда; Ниццe (Nizze) перевелъ ихъ на нѣмецкій языкъ. Въ 1897 г. Хисзъ (Heath) издалъ собраніе сочиненій Архимеда съ современными обозначеніями и съ объясненіями—изданіе очень полезное для читателей, владѣющихъ англійскимъ языкомъ. Лучшее, хотя уже устарѣлое, изданіе сочиненій Архимеда

[1]) Разборъ всѣхъ сочиненій Архимеда см. въ исторіи математики Кантора, т. I, гл. 14 и 15. Архимеду приписывали еще неопредѣленную задачу, называемую „задачей о быкахъ“, написанную въ стихахъ и едва ли принадлежащую Архимеду. Ср. Heiberg, Questiones Archimedeae, 26.

съ комментаріями Евтокія Аскалонскаго, на греческомъ и латинскомъ языкахъ, съ краткими объясненіями, принадлежитъ Гейбергу [1]).

Изъ сочиненій Архимеда дошли до насъ въ подлинникѣ, т. е. на томъ суровомъ дорическомъ діалектѣ греческаго языка, на которомъ говорили въ Сиракузахъ, книги о равновѣсіи плоскихъ фигуръ, о спираляхъ, о коноидахъ и сфероидахъ и Псаммитъ; книги о шарѣ и цилиндрѣ—въ позднѣйшей переработкѣ, въ которой дорическій діалектъ замѣненъ общимъ греческимъ [2]). Книга о плавающихъ тѣлахъ была извѣстна до послѣдняго времени только по средневѣковому латинскому переводу [3]). Всѣ сочиненія Архимеда, за исключеніемъ Псаммита, къ тому же содержатъ позднѣйшія вставки въ большемъ или меньшемъ числѣ. Леммы переведены съ арабскаго языка на латинскій и въ томъ видѣ, въ которомъ дошли до насъ, не могли быть написаны Архимедомъ; многія изъ нихъ, однако, вѣроятно принадлежатъ самому Архимеду [4]).

Сочиненіе, вновь открытое Гейбергомъ въ палимпсестѣ на Константинопольскомъ подворьѣ монастыря св. Гроба Господня въ Іерусалимѣ, носитъ заглавіе, которое по-русски могло бы быть переведено такъ: Книга Архимеда, содержащая изложеніе метода, связаннаго съ механическими теоремами. Книгу эту Архимедъ посвятилъ своему современнику, знаменитому александрійскому математику и астроному Эратосѳену. Она была извѣстна Герону Александрійскому, жившему въ концѣ второго вѣка до Р. Х.; Геронъ называетъ ее Ἐφοδικόν. Свида говоритъ, что Ѳеодосій (въ I вѣкѣ до Р. Х.) написалъ комментарій къ Архимедовой книгѣ Ἐφοδικόν, что значитъ „руководство“.

[1]) Петрушевскій. Архимеда двѣ книги о шарѣ и цилиндрѣ, измѣреніе круга и леммы. Спб., 1823.—Архимеда Псаммитъ, или исчисленіе песку въ пространствѣ, равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ. Спб., 1824.—Peyrard. Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement, avec un commentaire etc. Paris, 1807.—Archim. Werke, übers. u. erklärt v E. Nizze. Stralsund, 1824.—Arch. edited. in modern notation w. introd. chapters by T. L. Heath. Cambr., 1897.

[2]) О языкѣ Архимеда см. Heiberg, Philol. Stud., XIII, 4: Ueber den Dialekt des Archimedes, pp. 543—566. Questiones Archimedeae, p. 69. Ср. также Susemihl, Geschichte der Griechischen Litteratur in der Alexandrinerzeit, Bd. I. Leipz., 1891, pp. 729, 730.

[3]) Латинскій переводъ книги περὶ ὀχουμένων сдѣланъ въ XIII в. доминиканцемъ Вильгельмомъ фонъ Мёрбеке (Wilh. v. Moerbecke) изъ восточной Фландріи. См. Val. Rose, Deutsche Literaturzeit, 1884, s. 210; Heiberg, Neue Studien zu Archimedes въ Zeitschr. f. Math. und Phys, XXXVI (1889), Supplementheft.

[4]) О Леммахъ, которыя можно считать принадлежащими Архимеду, см. Cantor, Vorlesungen über Gech. der Mathem., Bd. I, 3-te Aufl., pp. 298-300.

Эфодикъ, какъ я буду называть новое сочиненіе Архимеда, близко подходитъ по содержанію своему, съ одной стороны, къ книгамъ о равновѣсіи плоскихъ фигуръ и о квадратурѣ параболы, съ другой—къ книгамъ о шарѣ и цилиндрѣ и, въ особенности, о коноидахъ и сфероидахъ. Всѣ эти сочиненія связываются, такимъ образомъ, въ одно цѣлое —непрерывный рядъ изслѣдованій, составляющихъ важнѣйшую часть научной дѣятельности Архимеда. Вмѣстѣ съ тѣмъ Эфодикъ открываетъ намъ впервые ту сторону работы греческихъ математиковъ, которая, по словамъ самого Архимеда, представляетъ „разсужденія, основанныя на методѣ, но не являющіяся еще доказательствами",—приводящія лишь къ открытію такихъ доказательствъ. Эта сторона работы древнихъ геометровъ до сихъ поръ оставалась для насъ скрытой,—можетъ быть, потому, что они, по большей части, не издавали сочиненій, содержащихъ изложеніе эвристическихъ методовъ, которыми они пользовались въ своихъ произведеніяхъ, а можетъ быть, и потому, что современники ихъ предпочитали знакомиться съ тѣми же изслѣдованіями въ ихъ блестящей діалектической обработкѣ и забывали мало-по-малу о болѣе скромныхъ „Эфодикахъ", полезныхъ только какъ руководства для дальнѣйшей самостоятельной разработки науки.

Наиболѣе замѣчательной чертой Архимедова метода является устанавливаемая имъ связь между геометріей и механикой. Еще до Архимеда грекамъ были извѣстны нѣкоторыя механическія предложенія, въ томъ числѣ теорема, въ силу которой два вѣса, дѣйствующіе на концы прямолинейнаго рычага, находятся въ равновѣсіи, если они обратно пропорціональны плечамъ этого рычага[1].) Понятіе о центрѣ тяжести было, повидимому, введено еще до Архимеда: онъ пользуется имъ безъ опредѣленія. Архимедъ, однако, первый оцѣнилъ значеніе механики, какъ математической науки, которая можетъ быть обоснована и развиваема совершенно такъ же, какъ геометрія, и связь которой съ геометріей настолько велика, что на нее можно смотрѣть, какъ на особый методъ изслѣдованія и доказательства геометрическихъ истинъ. Чтобы имѣть возможность дать болѣе или менѣе строгое научное обоснованіе механикѣ, Архимедъ отбросилъ всѣ туманныя динамическія соображенія своихъ предшественниковъ и превратилъ такимъ образомъ механику въ статику—теорію равновѣсія[2]). Первоначальныя основы этой науки

[1]) Archimedis Opera. Cum commentariis Eutocii, ed. J. L. Heiberg, Vol. II. Lips. 1881, pp. 153, 159. De planorum equilibriis etc., l. I, prop. VI, VII.

[2]) Cp. P. Duhem. Les origines de la Statique, t. I. Paris, 1905, Ch. I. Aristote et Archimède.

изложены имъ въ двухъ книгахъ о равновѣсіи плоскихъ фигуръ. Главное содержаніе этихъ книгъ—разысканіе центровъ тяжести фигуръ прямолинейныхъ и криволинейныхъ. Интересъ автора сосредоточивается, повидимому, не столько на механикѣ, сколько на геометріи; его интересуютъ не рычаги и вѣсомыя тѣла, а доказательства относящихся къ нимъ теоремъ и ихъ геометрическій смыслъ.

Между двумя книгами о равновѣсіи должна быть вставлена книга о квадратурѣ параболы, содержащая теорему о томъ, что площадь параболическаго сегмента вчетверо больше трети треугольника, имѣющаго тоже основаніе и ту же высоту, что и сегментъ. Архимедъ даетъ сначала механическое доказательство своей теоремы, затѣмъ геометрическое. Въ механическомъ доказательствѣ онъ предполагаетъ подвѣшенными къ противоположнымъ концамъ рычага и находящимися въ равновѣсіи, съ одной стороны, треугольникъ или трапецію, съ другой—нѣкоторую прямоугольную площадь и опредѣляетъ, на основаніи теоремы о рычагѣ, отношеніе двухъ подвѣшенныхъ площадей. Параболическій сегментъ, площадь котораго требуется опредѣлить, представляется заключеннымъ между двумя перемѣнными суммами площадей, имѣющихъ видъ трапеціи или треугольника. Эти суммы находятся въ равновѣсіи съ соотвѣтствующими суммами опредѣленныхъ прямоугольныхъ площадей, благодаря чему является возможность найти предѣлы, между которыми заключена площадь параболическаго сегмента. Такъ какъ предѣлы эти перемѣнны и могутъ быть сближены неопредѣленно, и такъ какъ, кромѣ того, между тѣми же предѣлами заключенъ треугольникъ, равновеликій сегменту, то равновеликость эту можно легко доказать отъ обратнаго—per reductionem ad absurdum. Для всѣхъ доказательствъ подобнаго рода древніе пользовались болѣе или менѣе однообразными пріемами. Сущность этихъ пріемовъ можно передать слѣдующимъ образомъ:

Пусть A и B будутъ двѣ величины, равенство которыхъ требуется доказать, и пусть каждая изъ этихъ величинъ заключена между двумя перемѣнными X и Y, изъ которыхъ первая всегда меньше второй, и разность которыхъ Z можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой. Допустимъ, что A и B не равны, и пусть разность ихъ есть D; такъ какъ $X \leqq A \leqq Y$ и $X \leqq B \leqq Y$, то $D \leqq Z$. Но, съ другой стороны, перемѣнная величина Z можетъ быть сдѣлана меньше, чѣмъ D, что обнаруживаетъ нелѣпость допущенія $A \leqq B$; итакъ, $A = B$; что и требовалось доказать[1]).

Той же механической методой пользуется Архимедъ и въ Эфодикѣ, съ той только разницей, что доказательство per reductionem ad absurdum отсутствуетъ, а трапеціи, сумма которыхъ при увеличеніи ихъ числа постепенно истощаетъ сегментъ параболы, превращаются въ параллельныя прямыя линіи, которыя въ безчисленномъ множествѣ сплошь покрываютъ площадь сегмента, наполняютъ этотъ сегментъ. Подобныя же соображенія Архимедъ прилагаетъ далѣе къ нѣкоторымъ тѣламъ и ихъ отрѣзкамъ, къ цилиндрамъ, конусамъ, шарамъ, а также къ сфероидамъ и коноидамъ, т. е. къ тѣламъ, полученнымъ отъ вращенія эллипсовъ и параболъ около ихъ осей (сфероиды и параболическіе коноиды) или отъ вращенія гиперболъ около ихъ поперечныхъ осей (гиперболическіе коноиды). Онъ разсматриваетъ ихъ при этомъ, какъ состоящія изъ безчисленнаго множества параллельныхъ круговыхъ сѣченій, наполняющихъ ихъ объемы или объемы ихъ сегментовъ. При такомъ преобразованіи методъ теряетъ свою аподиктическую доказательность, но зато пріобрѣтаетъ простоту, которая дѣлаетъ его могучимъ

[1]) Методъ истощенія древнихъ геометровъ обыкновенно примѣнялся ими въ такой формѣ. Лемма. Данный безконечный процессъ (A) производитъ рядъ величинъ A_1, A_2, $A_3, \ldots A_n, \ldots$, которыя, будучи частями нѣкоторой величины A, постепенно истощаютъ эту послѣднюю: продолжая этотъ процессъ достаточно долго, можно сдѣлать разность между A и A_n какъ угодно малою. Теорема. Даны двѣ однородныя величины A и B. Помощью процесса (A) образуемъ рядъ величинъ A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n, \ldots$, истощающихъ A; подобный же процессъ (B) дастъ соотвѣтственный рядъ величинъ B_1, B_2, $B_3, \ldots B_n, \ldots$, истощающихъ B. Пусть отношеніе $A_n : B_n$ не зависитъ отъ n и равно отношенію величинъ C и D. Мы утверждаемъ что $A : B = C : D$. Доказательство. Если бы отношеніе C къ D не было равно отношенію A къ B, оно было бы больше или меньше его; допустимъ, что оно больше; значитъ, $C : D = A : B'$, гдѣ B' — величина однородная съ B и меньшая этой послѣдней. Мы можемъ найти (Лемма) B_n, болѣе близкое къ B, чѣмъ B', и, слѣдовательно, большее, чѣмъ B'; тогда изъ пропорціи $A_n : B_n = C : D = A : B'$ слѣдуетъ: $A_n : A = B_n : B'$, чего не можетъ быть, ибо A_n меньше, чѣмъ A, а $B_n > B'$; точно такъ же можно показать несообразность предположенія, что отношеніе $C : D$ больше, чѣмъ отношеніе $A : B$. Откуда слѣдуетъ, что $A : B = C : D$, что и требовалось доказать. Не трудно видѣть, какъ пришлось бы измѣнить доказательство, если бы отношеніе $A_n : B_n$ зависѣло отъ n, но стремилось бы къ опредѣленному предѣлу. Архимедъ связываетъ методъ истощенія съ аксіомой: разность двухъ однородныхъ величинъ можно повторить столько разъ, что полученная сумма превзойдетъ каждую изъ двухъ данныхъ величинъ. Этой аксіомой пользовались, по словамъ Архимеда, и другіе геометры до него, въ томъ числѣ и Евдоксъ; ее же встрѣчаемъ мы и у Аристотеля. Cp. Archimedis l. de quadrat. parab., ed. Heib., v. II, p. 296. De Sphaera et Cyl. l. I., postul. 5, ed. Heib., v. I, p. 10; Euclidis Elem., V., def. 4; Aristotelis physic. ausc. l. VIII.

орудіемъ для открытія новыхъ предложеній. Обратный переходъ къ строгой геометрической формѣ доказательства не всегда, конечно, легокъ, но Архимедъ справедливо замѣчаетъ въ предисловіи — посвященіи Эратосѳену, что „легче найти доказательство, когда мы посредствомъ этого метода составляемъ себѣ представленіе объ изслѣдуемомъ вопросѣ, чѣмъ сдѣлать это безъ такого предварительнаго представленія".

Въ концѣ книги Архимедъ, какъ онъ обѣщаетъ въ предисловіи, далъ, повидимому, строгія геометрическія доказательства открытыхъ имъ теоремъ, но, къ сожалѣнію, въ дошедшей до насъ рукописи ни одно изъ этихъ доказательствъ не сохранилось цѣликомъ: удалось возстановить начало только одного изъ нихъ[1]). Это начало, впрочемъ, довольно характерно и представляетъ особый интересъ благодаря особенности нѣкоторыхъ выраженій, которыми пользуется Архимедъ. Онъ говоритъ о сегментѣ цилиндра, отсѣченномъ плоскостью, проходящей черезъ центръ одного основанія и черезъ прямую, касательную къ другому основанію: объемъ этого сегмента равновеликъ $^1/_6$ описанной призмы съ квадратнымъ основаніемъ. „Въ этотъ сегментъ", утверждаетъ Архимедъ, „возможно вписать и вокругъ него описать по фигурѣ, которая состоитъ изъ призмъ, имѣющихъ равныя высоты и въ основаніяхъ подобные треугольники, такъ что описанная фигура будетъ превосходить вписанную на величину, меньшую всякой произвольной величины". Эти слова показываютъ намъ, что для построенія аподиктическихъ доказательствъ служилъ методъ истощенія, и что Архимедъ хорошо сознавалъ общее значеніе этого метода для всѣхъ доказательствъ подобнаго рода. Въ выраженіи „описанная фигура будетъ превосходить вписанную на величину, меньшую всякой произвольной величины" можно уже усмотрѣть зачатки теоріи предѣловъ[2]).

Механическія основанія Архимедова метода ясно изложены имъ въ восьми предложеніяхъ, приведенныхъ безъ доказательствъ въ концѣ его предисловія. Первыя пять изъ нихъ изложены имъ и въ 1-ой книгѣ о равновѣсіи плоскихъ фигуръ. Къ этимъ механическимъ предложеніямъ присоединена алгебраическая лемма, доказанная имъ въ сочиненіи о коноидахъ и сфероидахъ. Лемма эта состоитъ въ слѣдующемъ: если члены двухъ рядовъ величинъ —

[1]) Глава XIV. Ср Zeuthen. Eine neue Schrift des Archimedes, Commentar, Bibl. Mathem., 3 Folge, Bd. 7, p. 356.

[2]) Ср. Archimedis l. de conoid et. sphaer., prop. XIX, ed. Heib., t. I, p. 374, prop. XX, p. 380. Zeuthen. l. c., p. 355 (примѣчаніе).

a_1, a_2, $a_3, \ldots$, a_{n-1}, a_n, съ одной стороны, и b_1, b_2, $b_3, \ldots$, b_{n-1}, b_n, съ другой, — связаны между собою пропорціями $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$; $a_2 : a_3 = b_2 : b_3 : \ldots$; $a_{n-1} : a_n = b_{n-1} : b_n$, а съ членами другихъ двухъ рядовъ α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_m$; β_1, β_2, $\beta_3 \ldots \beta_m$ (гдѣ $m \leqq n$) пропорціями $a_1 : \alpha_1 = b_1 : \beta_1$; $a_2 : \alpha_2 = b_2 : \beta_2$; $a_3 : \alpha_3 = b_3 : \beta_3$; $\ldots a_m : \alpha_m = b_m : \beta_m$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k : \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} b_k : \sum_{k=1}^{m} \beta_k,$$

т. е. всѣ a такъ относятся ко всѣмъ α, какъ всѣ b ко всѣмъ β [1]). Архимедъ примѣняетъ эту лемму и въ томъ случаѣ, когда число членовъ рядовъ безконечно велико,—когда ряды превращаются въ сплошныя системы величинъ, отрѣзковъ прямыхъ или площадей.

Методъ Архимеда въ геометрической своей части есть, такимъ образомъ, тотъ самый методъ недѣлимыхъ, который былъ открытъ въ XVII вѣкѣ Бонавентурой Кавальери, на разработку котораго тратили свои силы лучшіе математики этого вѣка до открытія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій [2]). Геніальные математики XVII вѣка прилежно изучали творенія Архимеда и старались найти тѣ пути, которыми онъ пришелъ къ своимъ открытіямъ. Ихъ генію удалось проникнуть въ самую глубину его мысли и возстановить тотъ именно методъ, которымъ Архимедъ въ дѣйствительности пользовался, въ связи съ механическими теоремами, въ своемъ Эфодикѣ, хотя самъ Эфодикъ былъ, повидимому, неизвѣстенъ ученымъ XVII вѣка. Замѣчательно, что Кавальери въ своихъ сочиненіяхъ пользуется тѣми же самыми выраженіями, какія встрѣчаются въ соотвѣтствующихъ случаяхъ и у Архимеда: они оба говорятъ о всѣхъ линіяхъ, составляющихъ, или наполняющихъ площадь, о всѣхъ плоскихъ фигурахъ, наполняющихъ объемъ [3]). Архимедъ не даетъ никакихъ правилъ для перехода отъ разсужденій, связанныхъ съ его методомъ, къ аподиктическимъ доказательствамъ, между тѣмъ только съ помощью такихъ правилъ

---

[1]) Archimedis l. de conoid. et sphaer., prop. I, ed. Heib., t. I pp. 290—294.

[2]) Bonaventura Cavalieri изъ Милана (1598—1647), ученикъ Галилея, изложилъ свой методъ въ двухъ сочиненіяхъ: 1) Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bonon. 1635, 2-ое изд. ibid., 1653. 2) Exercitationes Geometricae sex. Bonon. 1647.

[3]) Cum ergo nulla sit ex praefatis lineis assignabilis in dicto quadrato et nullum ex praefatis quadratis assignabilis in cubo, per quae non transeat aliquando seu in aliquo momento motum planum (qua ratione dico id ab ipso describi), ideo ea omnia, ita mente collecta, ut nullum excludi supponatur, vocavi: *omnes lineas et omnia plana*. Cavalieri. Exerc. geom., Exerc. III in P. Guldinum, p. 199.

можно сдѣлать методъ общимъ. Математики XVII столѣтія, сочиненія которыхъ представляютъ комментаріи къ сочиненіямъ Архимеда и дальнѣйшее развитіе и дополненіе его трудовъ, примѣняли методъ недѣлимыхъ въ его чистой геометрической формѣ и старались сдѣлать его, по возможности, общимъ, однообразнымъ и притомъ аналитическимъ методомъ, примѣняя къ нему пріемы новой алгебры и аналитической геометріи. Старались они много и о томъ, чтобы превратить эвристическій методъ недѣлимыхъ въ строгій методъ выводовъ и доказательствъ. Одинъ изъ наиболѣе замѣчательныхъ математиковъ этого времени, горячій сторонникъ метода Кавальери, учитель Ньютона Исаакъ Барроу показалъ, какъ можно всегда переходить отъ разсужденій, основанныхъ на недѣлимыхъ и безконечно малыхъ, къ строгимъ геометрическимъ доказательствамъ [1]). Въ связи съ этими стараніями возникла теорія предѣловъ [2]), а съ развитіемъ алгебры и въ особенности съ открытіемъ дифференціальнаго исчисленія методъ Архимеда принялъ абстрактную форму, превратился скоро въ теорію опредѣленныхъ интеграловъ и безконечныхъ рядовъ.

Методъ недѣлимыхъ несомнѣнно не былъ открытъ самимъ Архимедомъ, онъ восходитъ, повидимому, еще къ Демокриту, жившему въ V в. до Р. Х. Архимедъ говоритъ въ Эфодикѣ, что Демокритъ открылъ тѣ теоремы, въ силу которыхъ конусъ и пирамида составляютъ $^1/_3$ цилиндра и призмы соотвѣтственно. Для нахожденія этихъ теоремъ онъ долженъ былъ пользоваться методомъ, близкимъ къ методу недѣлимыхъ, — можетъ быть, именно этимъ методомъ, какъ соотвѣтствующимъ философскимъ воззрѣніямъ самого Демокрита и другихъ атомистовъ. Методъ истощенія, зачатки котораго мы находимъ у Гиппократа Хіосскаго, у Антифона и

---

1) Barrow. Lectiones Geometricae, Lond., 1670; ad Lect. XII Appendicula II, pp. 115—117. The Math. Works of J. Barrow. ed. by W. Whewell, Cambr., 1860, pp. 284—286. Cp. ibid. Lect. II, ed. Whew., p. 183.... methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, et modo rite adhibeatur haud minus certam et infallibilem. О роли математиковъ XVII вѣка въ развитіи исчисленія безконечно малыхъ см. въ книгѣ: H. G. Zeuthen. Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert. Deutsche Ausgabe, Lpzg., 1903 (Abh. z. Gesch. d. Math., XVII Heft), глава III: Entstehung und erste Entwickelung der Infinitesimalrechnung.

2) Опредѣленіе предѣла находится уже въ сочиненіи Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni Gregorii à S. Vincentio (1647). Ср. мою замѣтку въ Bibl. Math., 3 Folge, Bd. I, p. 511. Слово „истощеніе“ было тоже введено математиками XVII вѣка и находится въ связи съ нарождавшейся теоріей предѣловъ: Magnitudo quaevis per inscriptas sibi magnitudines exhauriri dicitur, quum inscriptae magnitudines ab ipsa deficere tandem possunt magnitudine data minore, h. e. quavis parva. Tacquet. Cylindricorum et Annularium ll. Defin. 28 (ad ll. I & II), (1651), 2-ое изд., Antv., 1707, p. 448.

Бризона, современниковъ Сократа, былъ развитъ и усовершенствованъ знаменитымъ математикомъ IV вѣка до Р. X. Евдоксомъ, который такимъ образомъ строго доказалъ справедливость теоремъ, открытыхъ Демокритомъ. Архимедъ впервые послѣ Евдокса примѣнилъ старые методы къ открытію и доказательству новыхъ, неизвѣстныхъ еще до тѣхъ поръ теоремъ о площади параболы, объ объемахъ шаровъ, цилиндровъ, сфероидовъ и коноидовъ и ихъ отрѣзковъ, а затѣмъ и къ нахожденію площадей, ограниченныхъ новыми, имъ же открытыми, линіями — спиралями [1]). При открытіи этихъ теоремъ не мало помогли ему, какъ видно теперь изъ Эфодика, механическія соображенія. По существу своему сложныя и искусственныя, онѣ не представляютъ прямого пути къ открытію геометрическихъ теоремъ, но тѣмъ болѣе поражаютъ они насъ своею геніальностью. Архимедъ разсматриваетъ данное тѣло A, какъ наполненное вѣсомымъ веществомъ, однороднымъ по плотности. Оно разбивается параллельными плоскостями на вѣсомые же элементы двухъ измѣреній. Эти элементы переносятся на одинъ конецъ рычага такъ, чтобы они находились въ равновѣсіи съ соотвѣтствующими элементами нѣкотораго тѣла B, однороднаго съ A, объемъ котораго извѣстенъ и которое занимаетъ опредѣленное положеніе въ отношеніи рычага. Вопросъ приводится къ опредѣленію центра тяжести тѣла B. Зная положеніе этого центра, мы, пользуясь теоремой о рычагѣ, можемъ найти отношеніе объемовъ A и B и, слѣдовательно, опредѣлить A. Наоборотъ, зная объемъ A, мы можемъ найти центръ тяжести B. Въ терминахъ современной механики и интегральнаго исчисленія методъ Архимеда можно представить такъ: [2]) Проведемъ черезъ точку опоры рычага O постоянную плоскость Π. Перемѣнная плоскость Σ, параллельная Π, производитъ въ тѣлѣ B сѣченіе u. Статическій моментъ этого тѣла по отношенію къ плоскости Π выразится интеграломъ $\int xudx$ или $a\int \frac{x}{a}udx$, гдѣ a постоянная длина, а x перемѣнное разстояніе Σ отъ Π. Пусть центръ тяжести тѣла B, на томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, подвѣшенъ къ одному концу рычага, находящемуся отъ плоскости Π на разстояніи b. Объемъ B находится въ равновѣсіи съ объемомъ $A = \int \frac{x}{a}udx$,

---

[1]) См. книгу Архимеда Περί ἑλίκων, ed. Heib., t. II, pp. 2—136; эта книга посвящена такъ называемой „Архимедовой спирали", плоской линіи, уравненіе которой въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ $\rho = a\varphi$.

[2]) Cp. Zeuthen. Bibl. Math., 3 Folge, Band. 7, p. 351.

подвѣшеннымъ къ другому концу рычага, находящемуся отъ П на разстояніи a; такъ что

$$A:B=b:a.$$

Съ помощью этой пропорціи, зная B, можно опредѣлить A по b или b по A.

Вновь открытое сочиненіе Архимеда, какъ я уже сказалъ, связываетъ между собою главнѣйшія изъ извѣстныхъ уже сочиненій великаго математика: о равновѣсіи плоскихъ фигуръ и о квадратурѣ параболы, о коноидахъ и сфероидахъ, о шарѣ и цилиндрѣ. Оно написано, повидимому, послѣ книги о равновѣсіи плоскихъ фигуръ и до книги о коноидахъ и сфероидахъ. Вѣроятно, предшествуетъ оно и книгамъ о шарѣ и цилиндрѣ [1]).

[1]) Архимедъ говоритъ въ Эфодикѣ, что механическія положенія, на которыя опирается его методъ, были уже сообщены имъ раньше. Съ другой стороны, объ алгебраической леммѣ онъ говоритъ, что ее легко можно доказать. Часть механическихъ положеній находится въ книгахъ о равновѣсіи плоскихъ фигуръ, алгебраическая лемма доказана въ сочиненіи о коноидахъ и сфероидахъ. Ср. Zeuthen. Bibl. Math. 3 Folge, Bd. 7, p. 363.

Новое сочиненіе Архимеда.

Проф. I. Гейберга.

Прошлымъ лѣтомъ въ метохѣ (въ Константинополѣ) церкви Гроба Господня въ Іерусалимѣ я изслѣдовалъ рукопись, которая подъ эвхологіемъ XIII столѣтія содержитъ сочиненія Архимеда, написанныя красивымъ полууставомъ X столѣтія; этотъ текстъ былъ только смытъ, а не стертъ, а потому съ помощью лупы его можно разобрать.

Эта рукопись (№ 355,4⁰) исходитъ изъ монастыря св. Саввы близъ Іерусалима; ее описалъ въ первый разъ Пападопуло Керамевсъ (Ἱεροσολυμιτικὴ βιβλιοθήκη, IV), который приводитъ также выдержку изъ нижняго текста [1]); по этой выдержкѣ я тотчасъ узналъ, что текстъ принадлежитъ Архимеду.

Здѣсь имѣются большіе отрывки изъ его сочиненій Περὶ ἑλίκων и Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, меньшіе изъ Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι и Κύκλου μέτρησις, которые я сличилъ съ извѣстнымъ текстомъ и которыми воспользуюсь въ предпринимаемомъ нынѣ новомъ изданіи Архимеда; впрочемъ, для этихъ сочиненій они даютъ не много. Важнѣе то, что рукопись содержитъ почти полный греческій текстъ сочиненія Περὶ ὀχουμένων, которое до сихъ поръ было извѣстно только въ латинскомъ переводѣ, принадлежащемъ Вильгельму ф. Мёрбеку (Wilhelm von Moerbek); многіе пробѣлы и изъяны этого перевода въ настоящее время можно пополнить и исправить. Кромѣ того, эта рукопись, содержитъ начало статьи о στομάχιον, изъ которой Зутеръ (Suter) раньше опубликовалъ другой отрывокъ, сохранившійся только на арабскомъ языкѣ. Это—„Ioculus Archimedius", родъ „китайской игры".

Но несравненно болѣе значительное пріобрѣтеніе представляетъ содержащійся въ этой рукописи большой отрывокъ изъ сочиненія, озаглавленнаго: Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν

---

[1]) На эту статью обратилъ мое вниманіе проф. H. Schöne.

(Прим. автора).

θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος. Это есть Ἐφοδικόν, которое комментировалъ Θеодосій и много разъ цитируетъ Геронъ. Въ теоремѣ о площади параболическаго сегмента сохранилось только механическое доказательство; геометрическое доказательство, которое авторъ обѣщаетъ, утрачено вмѣстѣ съ концомъ всего сочиненія.

Та же судьба постигла теорему, цитируемую Герономъ: — отъ нея не осталось никакого слѣда. Напротивъ, изъ доказательства второй теоремы, о которой упоминаетъ Геронъ, сохранилась настолько значительная часть, что возможно возстановить ея содержаніе. Вообще оставшіеся пробѣлы имѣютъ для содержанія мало значенія. Впрочемъ, пусть текстъ говоритъ самъ за себя.

Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ теоремахъ механики.

Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος.

Архимедъ привѣтствуетъ Эратосѳена.

Я переслалъ тебѣ раньше нѣкоторыя найденныя мною теоремы и изложилъ при этомъ одни положенія безъ доказательствъ, предложивъ тебѣ найти не сообщенныя мною доказательства. Положенія пересланныхъ тебѣ теоремъ были слѣдующія:

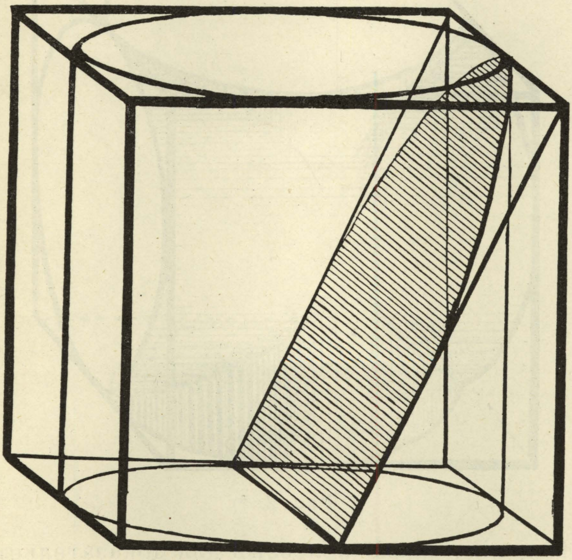
1. Если въ прямую призму, основаніемъ которой служитъ параллелограммъ[2]), мы впишемъ цилиндръ, основанія котораго расположены въ этихъ противолежащихъ другъ другу параллелограммахъ [2]), а боковыя линіи лежатъ на остальныхъ плоскостяхъ, составляющихъ призму, и если черезъ центръ круга, который служитъ основаніемъ цилиндра, и черезъ сторону квадрата въ противолежащей плоскости мы проведемъ плоскость, то эта плоскость отсѣчетъ отъ цилиндра часть, которая будетъ ограничена двумя плоскостями — сѣкущей и содержащей основаніе — и, кромѣ того, цилиндрической поверхностью, лежащей между этими плоскостями, — эта отрѣзанная часть цилиндра составляетъ $\frac{1}{6}$ всей призмы.

---

[2]) Должно означать квадратъ (примѣчаніе проф. H. G. Zeuthen'а въ Копенгагенѣ. „Bibliotheca Mathematica". 1907).

2. Если мы въ кубъ впишемъ цилиндръ, основанія котораго находятся въ противолежащихъ параллелограммахъ [3]), а цилиндрическая поверхность касается остальныхъ плоскостей, и далѣе въ этотъ самый кубъ впишемъ другой цилиндръ, основанія котораго находятся въ двухъ другихъ параллелограммахъ [3]), а цилиндрическая поверхность касается четырехъ другихъ плоскостей, то тѣло, ограниченное цилиндрическими поверхностями и содержащееся въ обоихъ цилиндрахъ, составляетъ $\frac{2}{3}$ куба.

Эти предложенія существенно отличаются отъ тѣхъ, которыя я сообщалъ ранѣе; тѣ тѣла, а именно: коноиды [4]),



Фиг. 1.

сфероиды [5]) и ихъ сегменты, мы сравнивали съ объемами конусовъ и цилиндровъ, но при этомъ ни одно изъ нихъ не оказалось равнымъ тѣлу, ограниченному плоскостями; напротивъ, каждое изъ этихъ тѣлъ, ограниченныхъ двумя плоско-

---

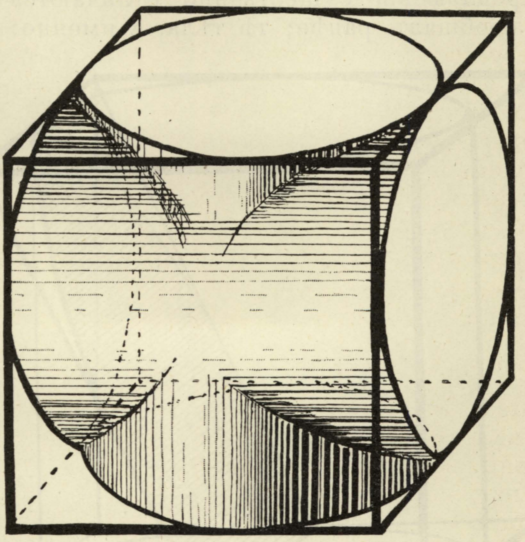
[3]) Должно означать квадратъ (примѣчаніе проф. H. G. Zeuthen'а въ Копенгагенѣ. „Bibliotheca Mathematica". 1907).

[4]) Коноидомъ Архимедъ называетъ тѣло, полученное вращеніемъ параболы вокругъ ея оси, или параболоидъ вращенія.

[5]) Сфероидомъ Архимедъ называетъ тѣло, полученное отъ вращенія эллипса вокругъ его оси, или эллипсоидъ вращенія.

стями и цилиндрическими поверхностями, оказывается равнымъ нѣкоторому тѣлу, ограниченному плоскостями. Доказательство этого я посылаю тебѣ въ этой книгѣ.

Но, какъ я еще раньше говорилъ, я вижу, что ты серьезный ученый и не только выдающійся учитель философіи, но и почитатель [математическихъ изслѣдованій] [6]); поэтому я счелъ полезнымъ развить и изложить тебѣ въ этой книгѣ особенный методъ, которымъ ты сможешь воспользоваться, какъ руководствомъ для изслѣдованія при помощи механики нѣкоторыхъ геометрическихъ вопросовъ. Этотъ методъ, по



Фиг. 2. [8])

моему убѣжденію, также полезенъ для доказательства этихъ самыхъ теоремъ; и многое, что я раньше выяснилъ при помощи механики, я потомъ доказалъ посредствомъ геометріи [7]), ибо мои разсужденія, основанныя на этомъ методѣ, не были еще доказательствами; легче, конечно, найти доказательство,

[6]) Въ прямыхъ скобкахъ помѣщены тѣ части текста, которыя въ оригиналѣ возстановлены, главнымъ образомъ, по смыслу.

[7]) Къ сожалѣнію, изъ геометрическихъ доказательствъ въ оригиналѣ возстановлено (и то отчасти) только одно (см. глава XIV), но его совершенно достаточно для того, чтобы выяснить себѣ методъ исчерпыванія данной величины посредствомъ ея разложенія на элементы, предлагаемый Архимедомъ въ качествѣ дѣйствительнаго доказательства.

[8]) Этихъ двухъ фигуръ въ оригиналѣ нѣтъ; они вставлены для ясности въ русское изданіе.

когда мы посредствомъ этого метода составимъ себѣ представленіе объ изслѣдуемомъ вопросѣ, чѣмъ сдѣлать это безъ такого предварительнаго представленія. Такъ, напримѣръ, относительно извѣстнаго положенія, что конусъ и пирамида составляютъ $\frac{1}{3}$, конусъ — цилиндра и пирамида — призмы, когда у нихъ общія основанія и равныя высоты, впервые доказаннаго Евдоксомъ, не малую часть заслуги нужно также признать за Демокритомъ, который былъ первымъ, выразившимъ безъ доказательства эти предложенія о вышеупомянутыхъ тѣлахъ. Мы тоже были въ состояніи сообщаемыя здѣсь теоремы [такимъ же образомъ] найти предварительно и теперь чувствуемъ себя обязанными сдѣлать этотъ методъ извѣстнымъ, отчасти для того, чтобы никто не думалъ, что мы, сообщая объ этомъ раньше, распространяли пустые разговоры, отчасти же изъ убѣжденія, что это принесетъ немало пользы математикѣ; а именно, я думаю, что кто-нибудь изъ теперешнихъ или будущихъ изслѣдователей посредствомъ предложеннаго здѣсь метода найдетъ и другія теоремы, которыя намъ не пришли еще въ голову.

Сначала мы изложимъ то, что и намъ стало впервые ясно при помощи механики, а именно, что параболическій сегментъ составляетъ $\frac{4}{3}$ треугольника, который имѣетъ то же основаніе и такую же высоту; потомъ рядъ нѣкоторыхъ теоремъ, найденныхъ посредствомъ вышеназваннаго метода; а въ концѣ книги мы предлагаемъ геометрическія [доказательства названныхъ теоремъ.] . . . .
[Мы предпосылаемъ слѣдующія предложенія, которыми мы будемъ пользоваться]:

1. Когда отъ [нѣкоторой величины мы отнимемъ другую величину, которая имѣетъ не тотъ же центръ тяжести, то мы найдемъ центръ тяжести остатка, если мы прямую линію, которая соединяетъ центръ тяжести цѣлаго и отнятой части, продолжимъ въ сторону центра тяжести цѣлаго] и на продолженіи отложимъ отрѣзокъ, который относится къ отрѣзку между названными центрами тяжести, какъ вѣсъ отнятой величины къ вѣсу остатка. [De plan. aequil., I, 8].

2. Когда центры тяжести произвольнаго числа величинъ лежатъ на одной прямой, то и центръ тяжести этихъ величинъ, соединенныхъ вмѣстѣ, лежитъ на той же прямой [срав. ib. I, 5].

3. Центромъ тяжести отрѣзка прямой служитъ его средина [срав. ib. I, 4].

4. Центромъ тяжести треугольника служитъ точка, въ которой пересѣкаются прямыя, проведенныя изъ вершины треугольника къ срединамъ его сторонъ [ib. I, 14].

5. Центромъ тяжести параллелограмма служитъ точка, въ которой встрѣчаются діагонали [ib. I, 10].

6. Центромъ тяжести [круга] служитъ центръ [круга].

7. Центромъ [тяжести цилиндра служитъ средина его оси.

8. Центръ тяжести конуса дѣлитъ его ось такъ, что отрѣзокъ отъ вершины] втрое больше [отрѣзка отъ основанія].

[Все это уже раньше было] мною сообщено. [Кромѣ того, я еще воспользуюсь слѣдующимъ положеніемъ, которое можетъ быть легко доказано].

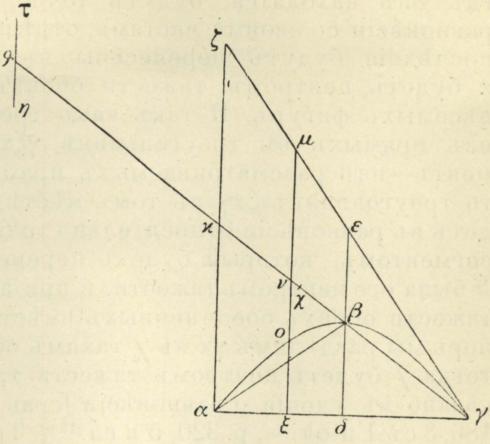
[Если величины двухъ рядовъ въ порядкѣ ихъ расположенія попарно пропорціональны, далѣе,] если величины [перваго ряда]—всѣ или нѣкоторыя изъ нихъ—находятся въ произвольномъ, но одинаковомъ отношеніи [къ соотвѣтствующимъ величинамъ третьяго ряда], а величины второго находятся въ томъ же отношеніи къ соотвѣтствующимъ величинамъ [четвертаго ряда], то сумма величинъ изъ перваго ряда относится къ суммѣ величинъ, взятыхъ изъ третьяго, какъ сумма соотвѣтствующихъ величинъ второго ряда относится къ суммѣ соотвѣтственно взятыхъ величинъ четвертаго ряда. [De conoid., 1].

I.

Пусть (фиг. 3) $\alpha\beta\gamma$ будетъ параболическій сегментъ, ограниченный прямой $\alpha\gamma$ и параболой $\alpha\beta\gamma$; положимъ, что прямая $\alpha\gamma$ раздѣлена въ точкѣ δ пополамъ, а прямая $\delta\beta\varepsilon$ параллельна діаметру, и проведены прямыя $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Сегментъ $\alpha\beta\gamma$ составляетъ въ такомъ случаѣ $\frac{4}{3}$ треугольника $\alpha\beta\gamma$.

Изъ точекъ α, γ мы проводимъ $\alpha\zeta \parallel \delta\beta\varepsilon$ и касательную $\gamma\zeta$, продолжаемъ [$\gamma\beta$ до $\varkappa$ и откладываемъ $\varkappa\vartheta = \gamma\varkappa$]. Представимъ себѣ $\gamma\vartheta$, какъ коромысло вѣсовъ, центръ котораго есть $\varkappa$, и произвольную прямую $\mu\xi \parallel \varepsilon\delta$. Такъ какъ $\gamma\beta\alpha$ есть парабола, $\gamma\zeta$ касательная и $\gamma\delta$ ордината, то $\varepsilon\beta = \beta\delta$, что доказано въ Элементахъ[9]) [т. е. въ ученіи о коническихъ сѣченіяхъ; срав. Quadrat. parab., 2.[10])]. На этомъ основаніи и такъ какъ $\zeta\alpha$ и $\mu\xi \parallel \varepsilon\delta$, то $\mu\nu = \nu\xi$, $\zeta\varkappa = \varkappa\alpha$. И такъ какъ

$\gamma\alpha:\alpha\xi=\mu\xi:\xi o$ [11]) (тоже доказано въ вспомогательной теоремѣ [срав. Quadr. parab., 5]), $\gamma\alpha:\alpha\xi=\gamma\varkappa:\varkappa\nu$ и $\gamma\varkappa=\varkappa\vartheta$, то $\vartheta\varkappa:\varkappa\nu=\mu\xi:\xi o$. Такъ какъ $\mu\nu=\nu\xi$, то ν есть центръ тяжести прямой $\mu\xi$; если мы поэтому отложимъ отрѣзокъ $\tau\eta=$ $=\xi o$ а за его центръ тяжести возьмемъ точку ϑ, такъ что $\tau\vartheta=\vartheta\eta$, то прямая $\tau\vartheta\eta$ будетъ находиться въ равновѣсіи съ прямой $\mu\xi$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ она находится. Дѣйствительно, отрѣзокъ $\vartheta\nu$ раздѣленъ въ обратномъ отношеніи вѣсовъ $\tau\eta$ и $\mu\xi$, т. е. $\vartheta\varkappa:\varkappa\nu=\mu\xi:\eta\tau$, поэтому $\varkappa$ будетъ центромъ тяжести двухъ соединенныхъ вмѣстѣ вѣсовъ. Всѣ прямыя, которыя прове-



Фиг. 3.

---

9) Отрѣзокъ $\varepsilon\delta$ есть такъ называемая подкасательная на оси параболы; она дѣлится вершиной параболы β пополамъ.

10) Сочиненіе Архимеда „О квадратурѣ параболы".

11) Основное свойство параболы заключается въ томъ, что отношеніе $\frac{\alpha\delta^2}{\beta\delta}$ представляетъ собой постоянную величину (т. н. параметръ параболы), т. е. не зависитъ отъ выбора точки α. Архимедъ доказываетъ это свойство, исходя изъ опредѣленія параболы, какъ сѣченія конической поверхности плоскостью, параллельной оси (О квадратурѣ параболы, предл. 4); аналитически это свойство выражается уравненіемъ параболы $y^2=px$ $(\alpha\delta=y, \beta\delta=x)$. Если мы поэтому черезъ точку o проведемъ прямую $o\lambda$ (на чертежѣ не нанесенную) параллельно $\alpha\gamma$ и пересѣкающую прямую $\beta\delta$ въ точкѣ λ, то

$$\frac{o\lambda^2}{\lambda\beta}=\frac{\alpha\delta^2}{\beta\delta}, \text{ или } \frac{\beta\delta}{\lambda\beta}=\frac{\alpha\delta^2}{o\lambda^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\beta\delta-\lambda\beta}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta^2-o\lambda^2}{\alpha\delta^2}=\frac{(\alpha\delta+o\lambda)(\alpha\delta-o\lambda)}{\alpha\delta^2}.$$

Но

$$\alpha\delta+o\lambda=\alpha\delta+\xi\delta=\xi\delta+\delta\gamma=\xi\gamma,$$

$$\alpha\delta-o\lambda=\alpha\delta-\xi\delta=\alpha\xi,$$

$$\beta\delta-\lambda\beta=\lambda\delta=o\xi.$$

дены параллельно $\varepsilon\delta$ въ треугольникѣ $\zeta\alpha\gamma$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онѣ находятся, будутъ точно такъ же находиться въ равновѣсіи со своими частями, отрѣзанными параболой, когда послѣднія будутъ перенесены въ ϑ, и такимъ образомъ $\varkappa$ будетъ центромъ тяжести обоихъ соединенныхъ вмѣстѣ вѣсомыхъ фигуръ. И такъ какъ треугольникъ $\gamma\zeta\alpha$ состоитъ изъ прямыхъ въ треугольникѣ $\gamma\zeta\alpha$, а параболическій сегментъ—изъ разсматриваемыхъ прямыхъ ξo въ сегментѣ $\alpha\beta\gamma$, то треугольникъ $\zeta\alpha\gamma$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки $\varkappa$ съ параболическимъ сегментомъ, который будетъ перенесенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести, и при этомъ $\varkappa$ будетъ центромъ тяжести обоихъ соединенныхъ вмѣстѣ вѣсомыхъ фигуръ. Теперь мы раздѣлимъ $\gamma\varkappa$ въ χ такимъ образомъ, чтобы $\gamma\varkappa = 3\varkappa\chi$; тогда χ будетъ центромъ тяжести треугольника $\alpha\zeta\gamma$, что доказано въ ученіи о равновѣсіи [срав. De plan. aequil., I, 15, p. 186, 3 съ Eutokios, p. 320, 5 и сл.[12])]. Треугольникъ $\zeta\alpha\gamma$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ теперь въ равновѣсіи относительно точки $\varkappa$ съ сегментомъ $\beta\alpha\gamma$, когда этотъ сегментъ будетъ перенесенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести, а центромъ тяжести треугольника $\zeta\alpha\gamma$ будетъ χ; поэтому $\triangle\alpha\zeta\gamma$ относится къ сегменту $\alpha\beta\gamma$, перенесенному такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести, какъ $\vartheta\varkappa : \varkappa\chi$; но $\vartheta\varkappa = 3\varkappa\chi$, поэтому и $\triangle\alpha\zeta\gamma = 3$ сегментамъ $\alpha\beta\gamma$; но $\triangle\zeta\alpha\gamma$ равенъ

Поэтому

$$\frac{o\xi}{\beta\delta} = \frac{\alpha\xi \cdot \xi\gamma}{\alpha\delta^2}.$$

Съ другой стороны,

$$\frac{\nu\xi}{\beta\delta} = \frac{\gamma\xi}{\gamma\delta} = \frac{\gamma\xi}{\alpha\delta}.$$

Поэтому

$$\frac{o\xi}{\nu\xi} = \frac{\alpha\xi}{\alpha\delta}.$$

А такъ какъ $\mu\xi = 2\nu\xi$, $\alpha\gamma = 2\alpha\delta$, то

$$\frac{o\xi}{\mu\xi} = \frac{\alpha\xi}{\alpha\gamma},$$

что и требовалось доказать.

[12]) Первая ссылка относится къ сочиненію Архимеда „О равновѣсіи плоскихъ фигуръ“, о которомъ уже упоминалось выше; вторая—къ комментатору Архимеда Евтокію Аскалонскому, жившему въ IV вѣкѣ.

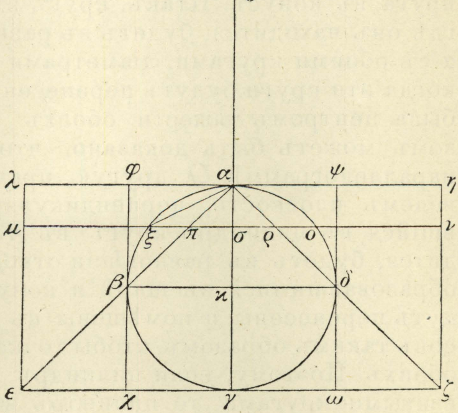
Нужно имѣть въ виду, что вставки въ прямоугольныхъ скобкахъ принадлежатъ Гейбергу.

также 4 $\triangle\alpha\beta\gamma$, такъ какъ $\zeta\varkappa = \varkappa\alpha$ и $\alpha\delta = \delta\gamma$: поэтому сегментъ $\alpha\beta\gamma = \frac{4}{3}\triangle\alpha\beta\gamma$. Это станетъ ясно . . . .

Посредствомъ всего, здѣсь теперь сказаннаго, эта теорема не доказана, но изложенныя разсужденія все-таки убѣждаютъ, что выводъ правиленъ. Такъ какъ мы видѣли, что сдѣланный выводъ не доказанъ, но предполагали, что онъ все-таки вѣренъ, то мы придумали для него геометрическое доказательство, которое раньше уже сообщили и которое ниже еще приведемъ.

II.

Что шаръ въ четыре раза больше конуса, который имѣетъ основаніемъ большой кругъ этого шара и высота котораго равна радіусу этого шара, и что цилиндръ, основаніемъ котораго служитъ тоже большой кругъ шара, а высота равна его діаметру, въ полтора раза больше, чѣмъ шаръ, можно уяснить посредствомъ названнаго метода слѣдующимъ образомъ [13]). Положимъ, что намъ данъ (фиг. 4) шаръ, въ которомъ $\alpha\beta\gamma\delta$ есть большой кругъ, а $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ суть два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра; возьмемъ въ этомъ шарѣ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ кругу $\alpha\beta\gamma\delta$, на этомъ перпендикулярномъ кругѣ построимъ конусъ съ вершиной въ α и затѣмъ продолжимъ его поверхность; этотъ конусъ пересѣчемъ плоскостью, проходящей черезъ γ параллельно основанію; и такимъ образомъ получимъ въ сѣченіи кругъ, перпендикулярный къ $\alpha\gamma$, діаметромъ котораго будетъ $\varepsilon\zeta$; на этомъ кругѣ построимъ



Фиг. 4.

---

[13]) Эти предложенія доказаны Архимедомъ въ сочиненіи „О сферѣ и цилиндрѣ". Архимедъ въ такой мѣрѣ дорожилъ установленными имъ соотношеніями между объемами шара, конуса и цилиндра, что одно изъ нихъ, а именно: отношенія между объемами шара, конуса, у котораго высота и радіусъ основанія равны діаметру этого шара, и цилиндра, у котораго радіусъ основанія равенъ діаметру, а высота равна радіусу этого шара, выражающіяся числами 1: 2: 3, завѣщалъ изобразить на своей могилѣ.

цилиндръ, ось котораго есть $\alpha\gamma$, а боковыми линіями [14]) служатъ $\varepsilon\lambda$ и $\zeta\eta$; продолжимъ $\gamma\alpha$, отложимъ $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$ и представимъ себѣ $\gamma\vartheta$ въ видѣ коромысла вѣсовъ, центромъ котораго служитъ α; проведемъ далѣе произвольную прямую $\mu\nu$ параллельно $\beta\delta$; она пересѣкаетъ кругъ $\alpha\beta\gamma\delta$ въ ξ и o, діаметръ $\alpha\gamma$ въ σ, прямую $\alpha\varepsilon$ въ π и $\alpha\zeta$ въ ρ; черезъ прямую $\mu\nu$ проведемъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\gamma$; въ сѣченіи съ цилиндромъ она образуетъ кругъ діаметра $\mu\nu$, въ сѣченіи съ шаромъ $\alpha\beta\gamma\delta$ — кругъ діаметра ξo и съ конусомъ $\alpha\varepsilon\zeta$ — кругъ діаметра $\pi\rho$. Такъ какъ $\gamma\alpha \times \alpha\sigma = \mu\sigma \times \sigma\pi$ (ибо $\alpha\gamma = \sigma\mu$, $\alpha\sigma = \pi\sigma$) и $\gamma\alpha \times \alpha\sigma = \alpha\xi^2 = \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2$, то $\mu\sigma \times \sigma\pi = \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2$. Далѣе, такъ какъ $\gamma\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma : \sigma\pi$ и $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$, то $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma : \sigma\pi = \mu\sigma^2 : \mu\sigma \times \sigma\pi$. Но было доказано, что $\xi\sigma^2 + \sigma\pi^2 = \mu\sigma \times \sigma\pi$; слѣдовательно, $\alpha\vartheta : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2$. Но $\mu\sigma^2 : \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2 = \mu\nu^2 : \xi o^2 + \pi\rho^2$ равно отношенію круга діаметра $\mu\nu$ въ цилиндрѣ къ суммѣ круга, діаметромъ котораго служитъ $\pi\rho$, въ конусѣ и круга, діаметромъ котораго служитъ ξo, въ шарѣ; или $\vartheta\alpha : \alpha\sigma$, какъ кругъ въ цилиндрѣ относится къ суммѣ круга въ шарѣ и круга въ конусѣ. Итакъ, кругъ въ цилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ обоими кругами, діаметрами которыхъ служатъ ξo и $\pi\rho$, когда эти круги будутъ перенесены въ ϑ такъ, чтобы точка ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Такимъ же самымъ образомъ можетъ быть доказано, что, когда мы проведемъ въ параллелограммѣ $\zeta\lambda$ другую прямую $\parallel \varepsilon\zeta$ и черезъ нее проведемъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$, то образовавшійся въ цилиндрѣ кругъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ двумя образовавшимися въ шарѣ и конусѣ кругами, когда они будутъ перенесены и помѣщены въ точкѣ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такимъ образомъ, чтобы точка ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Поэтому, если цилиндръ, шаръ и конусъ наполнены взятыми кругами, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ шаромъ и конусомъ, взятыми вмѣстѣ, если они будутъ перенесены въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщены такимъ образомъ, чтобы точка ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Такъ какъ названныя тѣла находятся въ равновѣсіи — цилиндръ съ центромъ тяжести въ $\varkappa$, шаръ и конусъ, перенесенные, какъ сказано, такъ, чтобы ихъ центромъ тяжести была точка ϑ, — то $\vartheta\alpha : \alpha\varkappa =$ цилиндръ: (шаръ + конусъ). Но $\vartheta\alpha = 2\alpha\varkappa$; слѣдовательно, и цилиндръ $= 2 \times$ (шаръ + конусъ). Но цилиндръ также $= 3$ конусамъ [Евклидъ, Elem., XII, 10],

[14]) образующими

поэтому 3 конуса = 2 конусамъ + 2 шара. Если мы отъ обѣихъ частей равенства отнимемъ эти 2 конуса, то конусъ, котораго осевой треугольникъ есть $\alpha\varepsilon\zeta$, равенъ 2 шарамъ; но конусъ, осевой треугольникъ котораго есть $\alpha\varepsilon\zeta$, равенъ 8 конусамъ, осевой треугольникъ которыхъ есть $\alpha\beta\delta$, такъ какъ $\varepsilon\zeta = 2\beta\delta$; итакъ, названные 8 конусовъ равны 2 шарамъ. Слѣдовательно, шаръ, большой кругъ котораго есть $\alpha\beta\gamma\delta$, въ четыре раза больше конуса, вершина котораго есть α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ $\alpha\gamma$.

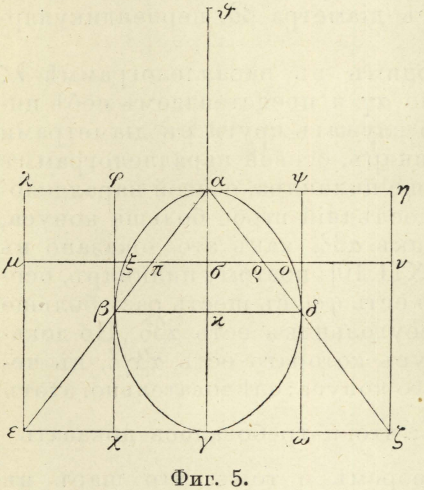
Черезъ β и δ мы проводимъ въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ прямыя $\varphi\beta\chi$ и $\psi\delta\omega$ параллельно $\alpha\gamma$ и представляемъ себѣ цилиндръ, основаніями котораго служатъ круги съ діаметрами $\varphi\psi$ и $\chi\omega$, а осью—$\alpha\gamma$. Но цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\omega$, вдвое больше цилиндра, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\delta$, а послѣдній втрое больше конуса, у котораго осевой треугольникъ $\alpha\beta\delta$, какъ это доказано въ Элементахъ [Евклидъ, Elem. XII, 10]; поэтому цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\omega$, въ шесть разъ больше конуса, у котораго осевой треугольникъ есть $\alpha\beta\delta$. Но доказано, что шаръ, большой кругъ котораго есть $\alpha\beta\gamma\delta$, въ четыре раза больше того же самаго конуса; слѣдовательно, этотъ цилиндръ составляетъ $\frac{3}{2}$ шара; что и требовалось доказать.

Благодаря изложенной теоремѣ о томъ, что шаръ въ четыре раза больше конуса, котораго основаніемъ служитъ большой кругъ, а высота равна радіусу круга, мнѣ пришла въ голову мысль, что поверхность шара въ четыре раза больше его большого круга, причемъ я исходилъ изъ представленія, что кругъ равенъ треугольнику, основаніемъ котораго служитъ периферія круга, а высота равна радіусу круга, такъ же, какъ шаръ равенъ конусу, котораго основаніемъ служитъ поверхность шара, а высота равняется радіусу этого шара.

III.

Посредствомъ этого метода можно также убѣдиться въ томъ, что цилиндръ, основаніемъ котораго служитъ большой кругъ сфероида, а высотой — ось сфероида, въ полтора раза больше этого сфероида; когда же это установлено, то ясно, что, если мы пересѣчемъ сфероидъ плоскостью, проходящей черезъ его центръ, перпендикулярно къ его оси, то половина сфероида вдвое больше конуса, основаніемъ котораго служитъ основаніе сегмента, а ось та же самая.

Дѣйствительно, пересѣчемъ сфероидъ (фиг. 5) плоскостью, которая проходитъ черезъ ось; она образуетъ на его поверхности эллипсъ $\alpha\beta\gamma\delta$, главные діаметры котораго суть $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, а центромъ служитъ точка $\varkappa$; затѣмъ проведемъ въ сфероидѣ перпендикулярно къ $\alpha\gamma$ кругъ діаметра $\beta\delta$; далѣе, представимъ себѣ конусъ, основаніемъ котораго служитъ указанный кругъ, а вершина находится въ α; продолжимъ затѣмъ его поверхность и плоскостью, проходящей черезъ γ параллельно основанію, отсѣчемъ конусъ; сѣченіе будетъ, слѣдовательно, кругомъ діаметра $\varepsilon\zeta$, перпендикулярнымъ къ $\alpha\gamma$; далѣе, представимъ себѣ цилиндръ, основаніемъ котораго служитъ тотъ же кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$, а осью $\alpha\gamma$; отрѣзокъ $\alpha\gamma$ продолженъ, и $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$; $\vartheta\gamma$ мы представляемъ себѣ въ видѣ коромысла вѣсовъ съ центромъ α и въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ проводимъ прямую $\mu\nu \| \varepsilon\zeta$, а черезъ $\mu\nu$ проводимъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$; она въ сѣченіи съ цилиндромъ образуетъ при этомъ кругъ, діаметръ котораго есть $\mu\nu$, съ сфероидомъ—кругъ, діаметръ котораго есть ξo, и съ конусомъ — кругъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$. Такъ какъ $\gamma\alpha : \alpha\sigma = \varepsilon\alpha : \alpha\pi = \mu\sigma : \sigma\pi$[15]) и $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$, то $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma : \sigma\pi$. Но $\mu\sigma : \sigma\pi = \mu\sigma^2 : \mu\sigma \times \sigma\pi$ и $\mu\sigma \times \sigma\pi = \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$.



Фиг. 5.

Дѣйствительно, $\alpha\sigma \times \sigma\gamma : \sigma\xi^2 = \alpha\varkappa \times \varkappa\gamma : \varkappa\beta^2 =$ [16]) $\alpha\varkappa^2 : \varkappa\beta^2$ (такъ какъ оба отношенія равны отношенію діаметровъ къ

---

[15]) Изъ подобія треугольниковъ $\varepsilon\gamma\alpha$ и $\pi\sigma\alpha$.

[16]) Это, какъ и другія равенства, относящіяся къ эллипсу, мы можемъ легко провѣрить, просто приводя ихъ къ извѣстному виду уравненія эллипса. Напримѣръ, это соотношеніе въ заданной формѣ при соотвѣтствующихъ обозначеніяхъ имѣетъ видъ:

$$\frac{(a-x)(a+x)}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}, \text{ или } \frac{a^2-x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

освобождаемся отъ знаменателя, тогда $a^2b^2 - x^2b^2 = a^2y^2$, или $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$, дѣлимъ обѣ части на a^2b^2 и получаемъ извѣстное уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Можно, конечно, отъ этого уравненія исходить; можно получить то же чисто геометрически.

параметру [Аполлоній, Con., I, 21]) $= \alpha\sigma^2 : \sigma\pi^2$; поэтому $\alpha\sigma^2 : \alpha\sigma \times \sigma\gamma = \pi\sigma^2 : \sigma\xi^2 = \sigma\pi^2 : \sigma\pi \times \pi\mu$ [17]); а, слѣдовательно, $\mu\pi \times \pi\sigma = \sigma\xi^2$. Къ обѣимъ частямъ равенства мы прибавляемъ $\pi\sigma^2$; тогда $\mu\sigma \times \sigma\pi = \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$.

Слѣдовательно, $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$. Но $\mu\sigma^2 : \sigma\xi^2 + \sigma\pi^2 =$ кругу, діаметръ котораго есть $\mu\nu$, въ цилиндрѣ : на кругъ діаметра $\xi o +$ кругъ діаметра $\pi\rho$; слѣдовательно, кругъ діаметра $\mu\nu$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ двумя кругами, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, когда они будутъ перенесены и помѣщены въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы точка ϑ была центромъ тяжести обоихъ круговъ; такъ какъ ϑ будетъ центромъ тяжести обоихъ круговъ, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, вмѣстѣ взятыхъ, когда они будутъ перенесены, то $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу съ діаметромъ $\mu\nu$: на оба круга, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$. Такимъ же самымъ образомъ можетъ быть доказано, что, когда мы проведемъ въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ другую прямую $\parallel \varepsilon\zeta$ и на ней построимъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$, то кругъ, образованный цилиндромъ, въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно α съ обоими образованными въ сфероидѣ и конусѣ кругами, взятыми вмѣстѣ, когда они будутъ перенесены въ точку ϑ коромысла вѣсовъ такимъ образомъ, чтобы точка ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Если мы, слѣдовательно, цилиндръ, сфероидъ и конусъ наполнимъ такого рода кругами, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ относительно точки α находиться въ равновѣсіи со сфероидомъ $+$ конусъ, когда они будутъ перенесены и помѣщены въ точкѣ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы точка ϑ была центромъ тяжести обоихъ. Теперь, такъ какъ $\varkappa$ есть центръ тяжести цилиндра, а ϑ, какъ сказано, центръ тяжести сфероида и конуса, взятыхъ вмѣстѣ, то $\vartheta\alpha : \alpha\varkappa =$ цилиндру : на сфероидъ $+$ конусъ. Но $\alpha\vartheta = 2\alpha\varkappa$; слѣдовательно, и цилиндръ $= 2 \times$ (сфероидъ $+$ конусъ) $= 2 \times$ сфероидъ $+ 2 \times$ конусъ. Но цилиндръ $= 3 \times$ конусъ; слѣдовательно, $3 \times$ конусъ $= 2 \times$ конусъ $+ 2 \times$ сфероидъ. Отъ обѣихъ частей равенства мы отнимемъ $2 \times$ конусъ; тогда конусъ, осевой треугольникъ котораго есть $\alpha\varepsilon\zeta$, $= 2 \times$ сфероидъ. Но этотъ самый конусъ $= 8$ конусамъ, осевые треугольники которыхъ суть $\alpha\beta\delta$; итакъ, 8 такихъ конусовъ $= 2 \times$ сфероидъ, $4 \times$ конусъ $=$ сфероиду; слѣдовательно, сфероидъ вчетверо больше конуса, вершина котораго есть α, а

---

[17]) Первую пропорцію получаемъ, переставляя члены предыдущей; а вторую — изъ подобія треугольниковъ $\alpha\sigma\pi$ и $\varepsilon\mu\pi$, именно: $\alpha\sigma : \varepsilon\mu = \pi\sigma : \pi\mu$, или $\alpha\sigma : \sigma\gamma = \pi\sigma : \pi\mu$; $\alpha\sigma^2 : \alpha\sigma \times \sigma\gamma = \pi\sigma^2 : \pi\sigma \times \pi\mu$.

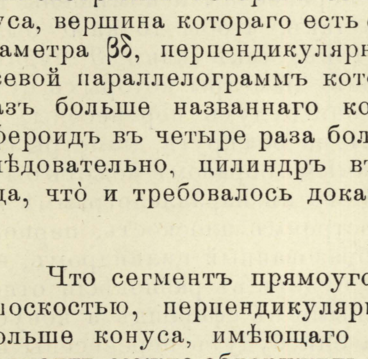
основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ $\gamma\alpha$, а половина сфероида вдвое больше названнаго конуса.

Проведемъ черезъ точки $\beta\delta$ въ параллелограммѣ $\lambda\zeta$ прямыя $\varphi\chi$ и $\psi\omega \parallel \alpha\gamma$ и представимъ себѣ цилиндръ, основаніями котораго служатъ круги діаметровъ $\varphi\psi$ и $\chi\omega$. а осью $\alpha\gamma$. Тогда цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\omega$, будетъ вдвое больше цилиндра, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\delta$, такъ какъ у нихъ равныя основанія, а ось его вдвое больше этой оси; кромѣ того, цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\delta$, будетъ втрое больше конуса, вершина котораго есть α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, перпендикулярный къ $\alpha\gamma$; поэтому цилиндръ, осевой параллелограммъ котораго есть $\varphi\omega$, будетъ въ шесть разъ больше названнаго конуса. Но было доказано, что сфероидъ въ четыре раза больше, чѣмъ этотъ самый конусъ; слѣдовательно, цилиндръ въ полтора раза больше сфероида, что̀ и требовалось доказать.

IV.

Что сегментъ прямоугольнаго коноида [18]), отсѣченный плоскостью, перпендикулярной къ оси, въ полтора раза больше конуса, имѣющаго то же основаніе и ось, что и сегментъ, можно обнаружить посредствомъ названнаго метода слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что данъ (фиг. 6) прямоугольный коноидъ, разсѣченный плоскостью, проходящей черезъ ось; при пересѣченіи съ его поверхностью эта плоскость образуетъ параболу $\alpha\beta\gamma$; положимъ, что онъ пересѣченъ также и другой плоскостью, перпендикулярной къ оси; линіей пересѣченія этихъ двухъ плоскостей будетъ $\beta\gamma$, а осью сегмента будетъ $\delta\alpha$, которая продолжена до ϑ, такъ что $\vartheta\alpha = \alpha\delta$; представимъ себѣ $\delta\vartheta$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ точкѣ α; кругъ діаметра $\beta\gamma$, перпендикулярный къ $\alpha\delta$, будетъ служить основаніемъ сегмента; представимъ себѣ теперь конусъ, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\beta\gamma$, а вершиной α; возьмемъ еще цилиндръ,



Фиг. 6.

[18]) Подъ коноидомъ греческіе геометры разумѣли тѣло вращенія. Въ данномъ случаѣ рѣчь идетъ о параболоидѣ вращенія.

основанiемъ котораго служитъ кругъ дiаметра $\beta\gamma$, а осью $\alpha\delta$; въ параллелограммѣ проведемъ прямую $\mu\nu \parallel \beta\gamma$ и черезъ $\mu\nu$ проведемъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\delta$; она образуетъ при этомъ въ сѣченiи съ цилиндромъ кругъ дiаметра $\mu\nu$, а съ сегментомъ прямоугольнаго коноида—кругъ дiаметра ξo. Такъ какъ $\beta\alpha\gamma$ есть парабола, $\alpha\delta$ ея дiаметръ, а $\xi\sigma$ и $\beta\delta$ ординаты, то [Quadrat. parab., 3] $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta^2 : \xi\sigma^2$. Но $\delta\alpha = \alpha\vartheta$; слѣдовательно, $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \sigma\xi^2$. Но $\mu\sigma^2 : \sigma\xi^2 =$ кругу дiаметра $\mu\nu$ въ цилиндрѣ : на кругъ дiаметра ξo въ сегментѣ прямоугольнаго коноида; итакъ, $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу дiаметра $\mu\nu$: на кругъ дiаметра ξo; слѣдовательно, кругъ дiаметра $\mu\nu$ въ цилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсiи относительно точки α съ кругомъ, дiаметръ котораго есть ξo, когда этотъ кругъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Центръ тяжести круга, дiаметръ котораго есть $\mu\nu$, будетъ σ, а другого круга, дiаметръ котораго есть ξo, когда мы его перенесемъ, будетъ ϑ, и мы имѣемъ, такимъ образомъ, обратное отношенiе: $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ $=$ кругу дiаметра $\mu\nu$: на кругъ дiаметра ξo. Такимъ же образомъ можетъ быть доказано, что, когда мы проведемъ въ параллелограммѣ $\varepsilon\gamma$ другую прямую $\parallel \beta\gamma$, то образовавшiйся въ цилиндрѣ кругъ [19]) въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсiи относительно точки α съ кругомъ, образовавшимся въ сегментѣ прямоугольнаго коноида, когда этотъ кругъ будетъ перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Поэтому, если цилиндръ и сегментъ прямоугольнаго коноида будутъ наполнены, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсiи относительно точки α съ сегментомъ прямоугольнаго коноида, когда онъ будетъ перенесенъ и помѣщенъ въ точкѣ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такимъ образомъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ названныя величины находятся въ равновѣсiи относительно точки α, а $\varkappa$ есть центръ тяжести цилиндра, когда $\alpha\delta$ раздѣлена въ $\varkappa$ пополамъ, ϑ же есть центръ тяжести перенесеннаго туда сегмента, то имѣетъ мѣсто слѣдующая обратная пропорцiональность: $\vartheta\alpha : \alpha\varkappa =$ цилиндру : на сегментъ. При этомъ $\vartheta\alpha = 2\alpha\varkappa$; слѣдовательно, и цилиндръ $= 2 \times$ сегментъ. Но этотъ самый цилиндръ въ три раза больше конуса, основанiемъ котораго служитъ кругъ дiаметра $\beta\gamma$, а вершиной точка α; ясно, такимъ образомъ, что сегментъ въ полтора раза больше этого конуса.

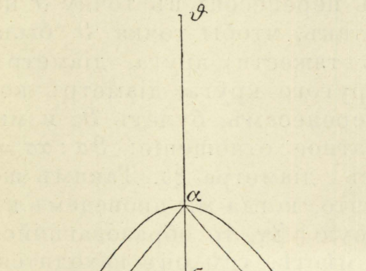
---

[19]) Очевидно, полученный въ сѣченiи съ плоскостью, проведенной черезъ эту прямую перпендикулярно къ оси.

V.

Что центръ тяжести сегмента прямоугольнаго коноида, отсѣченнаго плоскостью, перпендикулярной къ оси, лежитъ на прямой, которая служитъ осью сегмента и дѣлитъ ее такъ, что часть, принадлежащая къ вершинѣ, вдвое больше остальной части, можно обнаружить посредствомъ того же метода слѣдующимъ образомъ.

Сегментъ прямоугольнаго коноида, отсѣченный плоскостью, перпендикулярной къ оси, разсѣченъ другой плоскостью, проходящей черезъ ось; эта плоскость образуетъ (фиг. 7) въ сѣченіи съ его поверхностью параболу $\alpha\beta\gamma$, а общей линіей плоскости, отсѣкающей сегментъ, и этой сѣкущей плоскости будетъ $\beta\gamma$; осью сегмента и діаметромъ параболы $\alpha\beta\gamma$ будетъ $\alpha\delta$; продолжимъ $\delta\alpha$, отложимъ $\alpha\vartheta = \alpha\delta$ и представимъ себѣ $\delta\vartheta$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ точкѣ α; далѣе, впишемъ въ сегментъ конусъ съ боковыми линіями $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ и въ параболѣ проведемъ прямую $\xi o \parallel \beta\gamma$; она пересѣчетъ параболу въ точкахъ ξ и o, а стороны конуса въ π и ρ. Такъ какъ въ параболѣ $\xi\sigma$, $\beta\delta$ проведены перпендикулярно къ діаметру, то $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta^2 : \xi\sigma^2$ [Quadr. parab., 3]. Но



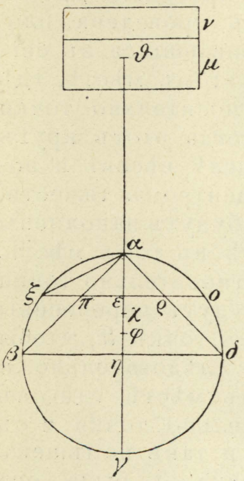
Фиг. 7.

$\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta : \pi\sigma = \beta\delta^2 : \beta\delta \times \pi\sigma$; а потому и $\beta\delta^2 : \xi\sigma^2 = \beta\delta^2 : \beta\delta \times \pi\sigma$. Слѣдовательно, $\xi\sigma^2 = \beta\delta \times \pi\sigma$, или $\beta\delta : \xi\sigma = \xi\sigma : \pi\sigma$, и $\beta\delta : \pi\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$. Но $\beta\delta : \pi\sigma = \delta\alpha : \alpha\sigma = \vartheta\alpha : \alpha\sigma$; слѣдовательно, и $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$. Черезъ ξo проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\delta$; она образуетъ въ сегментѣ прямоугольнаго коноида кругъ, діаметръ котораго есть ξo, а въ конусѣ кругъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$. Такъ какъ теперь $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$, а $\xi\sigma^2 : \sigma\pi^2 =$ кругу діаметра ξo: на кругъ діаметра $\pi\rho$, то $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу, діаметръ котораго есть ξo : на кругъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$. Слѣдовательно, кругъ, діаметръ котораго есть ξo, въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ кругомъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$, когда онъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ теперь σ есть центръ тяжести круга, діаметръ котораго есть ξo, когда этотъ кругъ остается на томъ же мѣстѣ, а ϑ—круга, діаметръ котораго есть $\pi\rho$, когда онъ, какъ сказано, перенесенъ, и такъ какъ имѣетъ мѣсто обратная пропорціональность: $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ кругу діаметра ξo : на кругъ діаметра $\pi\rho$, то эти круги находятся въ равновѣсіи относительно точки α. Такимъ же образомъ можетъ быть доказано, что, когда въ параболѣ будетъ проведена другая прямая $\parallel \beta\gamma$ и черезъ эту прямую будетъ проведена плоскость, перпендикулярная къ $\alpha\delta$, то образовавшійся въ сегментѣ прямоугольнаго коноида кругъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ кругомъ, образуемымъ конусомъ, когда этотъ кругъ будетъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такимъ образомъ, если сегментъ и конусъ будутъ наполнены такими кругами, то всѣ круги въ сегментѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α со всѣми кругами конуса, когда они будутъ перенесены и такъ помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ точкѣ ϑ, чтобы точка ϑ была ихъ центромъ тяжести; а слѣдовательно, и сегментъ прямоугольнаго коноида въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ конусомъ, когда онъ будетъ перенесенъ и такъ помѣщенъ на коромыслѣ вѣсовъ въ ϑ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ центръ тяжести обоихъ тѣлъ, взятыхъ вмѣстѣ, будетъ α, а одного только конуса, когда мы его перенесемъ, будетъ ϑ, то центръ тяжести остальной величины будетъ находиться на продолженіи прямой $\alpha\vartheta$ за точкой α, когда мы отложимъ на этомъ продолженіи отрѣзокъ $\alpha\varkappa$ такимъ образомъ, чтобы $\alpha\vartheta : \alpha\varkappa =$ сегменту : на конусъ. Но сегментъ составляетъ $\frac{3}{2}$ конуса; слѣдовательно $\alpha\vartheta = \frac{3}{2}\alpha\varkappa$, и центръ тяжести прямоугольнаго коноида $\varkappa$ дѣлитъ $\alpha\delta$ такимъ образомъ, что часть отъ вершины сегмента вдвое больше остальной части.

VI.

[Центръ тяжести полушарія лежитъ на его оси и дѣлитъ послѣднюю такимъ образомъ], что часть отъ поверхности полушарія относится къ остальной части, какъ 5 : 3.

Пусть шаръ (фиг. 8) разсѣченъ плоскостью, проходящей черезъ его центръ; она образуетъ въ сѣченіи съ его поверхностью кругъ $\alpha\beta\gamma\delta$; $\alpha\gamma$ и $\beta\delta$ будутъ два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра этого круга; черезъ $\beta\delta$ проведена плоскость перпендикулярно къ $\alpha\gamma$; представимъ себѣ теперь конусъ, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, вершиной α, а боковыми линіями $\beta\alpha$ и $\alpha\delta$; прямая $\gamma\alpha$ продолжена и $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$; мы представляемъ себѣ $\vartheta\gamma$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ точкѣ α и въ полукругѣ $\beta\alpha\delta$ проводимъ прямую $\xi o \parallel \beta\delta$; она пересѣчетъ дугу полукруга въ ξ и o, боковыя стороны конуса въ π и ρ и $\alpha\gamma$ въ ε; черезъ ξo мы проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\alpha\varepsilon$; она образуетъ въ сѣченіи съ полушаріемъ кругъ діаметра ξo, а съ конусомъ—кругъ діаметра $\pi\rho$. Такъ какъ теперь $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \xi\alpha^2 : \alpha\varepsilon^2$ [20]), $\xi\alpha^2 = \alpha\varepsilon^2 + \varepsilon\xi^2$ и $\alpha\varepsilon = \varepsilon\pi$, то $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \xi\varepsilon^2 + \varepsilon\pi^2 : \varepsilon\pi^2$. Но $\xi\varepsilon^2 + \varepsilon\pi^2 : \varepsilon\pi^2 =$ кругу діаметра $\xi o +$ кругъ діаметра $\pi\rho$: на кругъ діаметра $\pi\rho$. Вмѣстѣ съ тѣмъ $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$, такъ что $\vartheta\alpha : \alpha\varepsilon =$ кругу съ діаметромъ $\xi o +$ кругъ съ діаметромъ $\pi\rho$: на кругъ съ діаметромъ $\pi\rho$. Итакъ, оба круга, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α съ кругомъ, діаметръ котораго есть $\pi\rho$, когда онъ перенесенъ и помѣщенъ въ ϑ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Такъ какъ теперь центръ тяжести обоихъ круговъ, діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\rho$, въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, [21]).



Фиг. 8.

. . . .

VII.

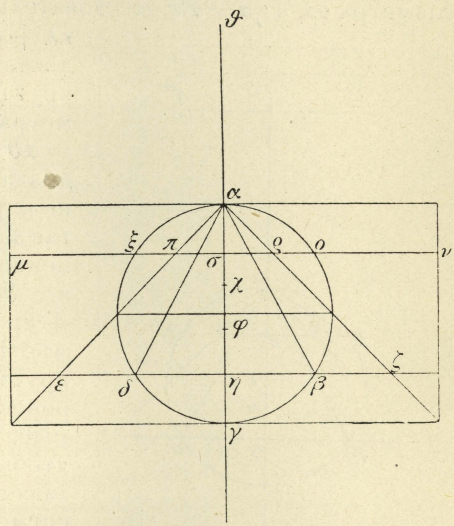
[Посредствомъ этого метода] можно еще уяснить, [что произвольный шаровой сегментъ] относится къ конусу [съ тѣмъ же основаніемъ и высотой, какъ радіусъ шара + высота противоположнаго сегмента относится къ высотѣ противоположнаго сегмента] . . . .
и (фиг. 9) черезъ $\mu\nu$ проводимъ плоскость, перпендикулярную къ $\alpha\gamma$; она образуетъ, такимъ образомъ, въ сѣченіи съ цилиндромъ кругъ, діаметръ котораго есть $\mu\nu$, съ шаровымъ

---

[20]) Это можно получить изъ соотношенія: $\alpha\gamma . \alpha\varepsilon = \alpha\xi^2$.

[21]) Главу VI можно продолжать, воспользовавшись разсужденіями Архимеда въ главѣ VIII, гдѣ онъ разсматриваетъ уже не центръ тяжести полушарія, а любого сегмента, и примѣнить эти разсужденія къ частному, болѣе простому случаю; ε и ζ (фиг. 10) совпадаютъ тогда съ β и δ, и конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$ (фиг. 10) съ конусомъ $\beta\alpha\delta$. Вообще, уяснивъ себѣ методъ Архимеда, довести это разсужденіе до конца уже нетрудно.

сегментомъ — кругъ, діаметръ котораго есть ξo, съ конусомъ, у котораго основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$, а вершиной α, — кругъ, діаметръ котораго есть $\pi\varrho$. Такимъ же образомъ, какъ и раньше, можно теперь доказать, что кругъ, діаметръ котораго есть $\mu\nu$, въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки α съ обоими кругами, [діаметры которыхъ суть ξo и $\pi\varrho$, когда они будутъ перенесены и помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ ϑ. И это самое можетъ быть доказано относительно всѣхъ указанныхъ круговъ]. Если мы теперь цилиндръ, конусъ и шаровой сегментъ наполнимъ соотвѣтствующими кругами, то цилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, [будетъ въ равновѣсіи относительно точки α] съ конусомъ $+$ шаровой сегментъ, когда они будутъ перенесены и помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ точкѣ ϑ. Дѣлимъ $\alpha\eta$ въ φ и χ такъ, что $\alpha\chi = \chi\eta$ и $\alpha\varphi = 3\varphi\eta$; слѣдовательно, χ будетъ центромъ тяжести цилиндра,



Фиг. 9.

такъ какъ это средина оси $\alpha\eta$, [а φ есть центръ тяжести конуса]. Такъ какъ теперь названныя тѣла находятся относительно α въ равновѣсіи, то цилиндръ : къ конусу съ основаніемъ діаметра $\varepsilon\zeta$ $+$ шаровой сегментъ $\beta\alpha\delta = \vartheta\alpha : \alpha\chi$ [22]) . .

. . . .

VIII.

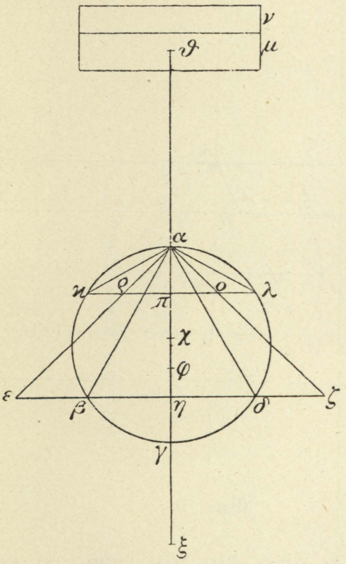
. . . .

мы продолжаемъ (фиг. 10) [23]) $\alpha\gamma$ и откладываемъ $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$ и $\gamma\xi$ = радіусу круга; $\gamma\vartheta$ мы представляемъ себѣ, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ α и въ плоскости, отсѣкающей

[22]) Глава VII устанавливаетъ въ общемъ случаѣ соотношенія, которыя для частнаго случая установлены въ главѣ II, и имѣетъ вспомогательное значеніе для главы VIII, которая эту главу значительно уясняетъ.

[23]) Недостающее начало главы VIII можно себѣ уяснить, дочитавъ ее до конца.

сегментъ, описываемъ кругъ съ центромъ η и съ радіусомъ $= \alpha\eta$ [24]); на этомъ кругѣ мы строимъ конусъ съ вершиной въ α, боковыми линіями котораго будутъ $\alpha\varepsilon$, $\alpha\zeta$; далѣе, мы проводимъ прямую $\varkappa\lambda \parallel \varepsilon\zeta$; она пересѣчетъ дугу сегмента въ $\varkappa$ и λ, боковыя стороны конуса $\alpha\varepsilon\zeta$ въ ρ и o и $\alpha\gamma$ въ π. Такъ какъ теперь $\alpha\gamma : \alpha\pi = \alpha\varkappa^2 : \alpha\pi^2$, $\varkappa\alpha^2 = \alpha\pi^2 + \pi\varkappa^2$ и $\alpha\pi^2 = \pi o^2$ (такъ какъ и $\alpha\eta^2 = \varepsilon\eta^2$), то $\gamma\alpha : \alpha\pi = \varkappa\pi^2 + \pi o^2 : o\pi^2$. Но $\varkappa\pi^2 + \pi o^2 : \pi o^2 =$ кругу діаметра $\varkappa\lambda +$ кругъ діаметра $o\rho$: на кругъ діаметра $o\rho$, а $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$; слѣдовательно, $\vartheta\alpha : \alpha\pi =$ кругу діаметра $\varkappa\lambda +$ кругъ діаметра $o\rho$: на кругъ діаметра $o\rho$. Такъ какъ теперь кругъ діаметра $\varkappa\lambda +$ кругъ діаметра $o\rho$: на кругъ діаметра $o\rho = \alpha\vartheta : \pi\alpha$, то кругъ діаметра $o\rho$ долженъ быть перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести; слѣдовательно, $\vartheta\alpha : \alpha\pi =$ кругу діаметра $\varkappa\lambda +$ кругъ діаметра $o\rho$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, : на кругъ діаметра $o\rho$, когда онъ перенесенъ въ точку ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести; слѣдовательно, круги въ сегментѣ $\beta\alpha\delta$ и въ конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$ находятся въ равновѣсіи относительно точки α съ кругомъ въ конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$. Такимъ же образомъ всѣ круги въ сегментѣ $\beta\alpha\delta$ и въ



Фиг. 10.

конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α со всѣми кругами въ конусѣ $\alpha\varepsilon\zeta$, когда они перенесены въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщены такъ, чтобы точка ϑ была ихъ центромъ тяжести; слѣдовательно, и шаровой сегментъ $\alpha\beta\delta$ съ конусомъ $\alpha\varepsilon\zeta$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки α съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$, когда онъ перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и такъ помѣщенъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести. Пусть цилиндръ $\mu\nu$ равняется конусу, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$, а вершиной α, и пусть $\alpha\eta$ будетъ раздѣлена въ φ такъ, что $\alpha\eta = 4\varphi\eta$; φ будетъ, слѣдовательно, центромъ тяжести конуса $\varepsilon\alpha\zeta$, что уже доказано раньше. Далѣе, мы разсѣкаемъ цилиндръ $\mu\nu$

---

[24]) Очевидно, $\varepsilon\eta = \alpha\eta$.

посредствомъ перпендикулярно-сѣкущей плоскости такъ, чтобы цилиндръ μ находился въ равновѣсіи съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$. Такъ какъ теперь сегментъ $\alpha\beta\delta$ + конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно α съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$, когда онъ перенесенъ въ ϑ на коромыслѣ вѣсовъ и помѣщенъ такъ, чтобы точка ϑ была его центромъ тяжести; цилиндръ $\mu\nu$ = конусу $\varepsilon\alpha\zeta$; оба цилиндра $\mu + \nu$ помѣщены въ ϑ, и $\mu\nu$ находится въ равновѣсіи съ обоими тѣлами; —то цилиндръ ν находится въ равновѣсіи съ шаровымъ сегментомъ относительно точки α. И такъ какъ шаровой сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ, основаніемъ котораго служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, а центромъ тяжести α, $= \xi\eta : \eta\gamma$ (это уже доказано раньше [De sph. et cyl., II, 2]), а конусъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$ = кругу діаметра $\beta\delta$: на кругъ діаметра $\varepsilon\zeta = \beta\eta^2 : \eta\varepsilon^2$ и $\beta\eta^2 = \gamma\eta \times \eta\alpha$, $\eta\varepsilon^2 = \eta\alpha^2$ и $\gamma\eta \times \eta\alpha : \eta\alpha^2 = \gamma\eta : \eta\alpha$,—то конусъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\eta : \eta\alpha$. Но мы доказали, что конусъ $\beta\alpha\delta$: на сегментъ $\beta\alpha\delta = \gamma\eta : \eta\xi$; слѣдовательно, также сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \xi\eta : \eta\alpha$. И такъ какъ $\alpha\chi : \chi\eta = \eta\alpha + 4\eta\gamma : \alpha\eta + 2\eta\gamma$[25]), то и обратно: $\eta\chi : \chi\alpha = 2\gamma\eta + \eta\alpha : 4\gamma\eta + \eta\alpha$ и посредствомъ сложенія: $\eta\alpha : \alpha\chi = 6\gamma\eta + 2\eta\alpha : \eta\alpha + 4\eta\gamma$. Но $\eta\xi = \frac{1}{4}(6\eta\gamma + 2\eta\alpha)$ и $\gamma\varphi = \frac{1}{4}(4\eta\gamma + \eta\alpha)$; все это очевидно; слѣдовательно, $\eta\alpha : \alpha\chi = \xi\eta : \gamma\varphi$, а слѣдовательно, и $\xi\eta : \eta\alpha = \gamma\varphi : \chi\alpha$. Но было доказано, что $\xi\eta : \eta\alpha$ = сегменту, вершина котораго въ α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\beta\delta$, : на конусъ, вершина котораго въ α, а основаніемъ служитъ кругъ діаметра $\varepsilon\zeta$; такимъ образомъ, сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\varphi : \chi\alpha$. И такъ какъ цилиндръ μ съ конусомъ $\varepsilon\alpha\zeta$ находятся относительно α въ равновѣсіи и ϑ есть центръ тяжести цилиндра, а φ — конуса $\varepsilon\alpha\zeta$, то конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$: на цилиндръ $\mu = \vartheta\alpha : \alpha\varphi = \gamma\alpha : \alpha\varphi$. Но цилиндръ $\mu\nu$ = конусу $\varepsilon\alpha\zeta$; слѣдовательно, посредствомъ вычитанія, цилиндръ μ : цилиндръ $\nu = \alpha\varphi : \gamma\varphi$. И цилиндръ $\mu\nu$ = конусу $\varepsilon\alpha\zeta$; слѣдовательно, конусъ $\varepsilon\alpha\zeta$: цилиндру $\nu = \gamma\alpha : \gamma\varphi = \vartheta\alpha : \gamma\varphi$. Но было доказано, что и сегментъ $\beta\alpha\delta$: на конусъ $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\varphi : \chi\alpha$; слѣдовательно, δι'ἴσου сегментъ $\beta\alpha\delta$: цилиндръ $\nu = \vartheta\alpha : \alpha\chi$. И такъ какъ было доказано, что сегментъ $\beta\alpha\delta$ съ цилиндромъ ν находятся въ равновѣсіи относительно α, при чемъ ϑ есть центръ тяжести цилиндра ν, то χ будетъ, слѣдовательно, центромъ тяжести сегмента $\beta\alpha\delta$.

IX.

Такимъ же образомъ, какъ и въ вышеизложенномъ, можно обнаружить, что центръ тяжести произвольнаго ша-

[25]) Этой пропорціей опредѣляется положеніе точкп χ. Доказываемая теорема, формулировка которой, утраченная въ этой главѣ,

рового сегмента лежитъ на прямой, которая служитъ осью сегмента, раздѣленной въ той точкѣ такъ, что часть ея отъ вершины сегмента относится къ остальной части, какъ ось сегмента + учетверенная ось противоположнаго сегмента къ оси сегмента + удвоенная ось противоположнаго сегмента[26]).

X.

Далѣе, посредствомъ этого метода можно сдѣлать очевиднымъ, что [гиперболическій сегментъ] относится [къ конусу], который имѣетъ то же основаніе [и высоту, равную его высотѣ, какъ ось сегмента + утроенный] остатокъ діаметра относится къ оси + удвоенный его остатокъ [De conoid., 25], и еще многое другое, что я, считая этотъ методъ уже выясненнымъ посредствомъ приведенныхъ до сихъ поръ примѣровъ, хочу оставить въ сторонѣ, чтобы еще воспользоваться имъ только для доказательства вышеуказанныхъ теоремъ.

XI.

Если мы въ прямую призму съ квадратнымъ основаніемъ впишемъ цилиндръ, основанія котораго лежатъ въ противоположныхъ квадратахъ, а кривая поверхность касается четырехъ остальныхъ параллелограммовъ, и затѣмъ черезъ центръ круга, который служитъ основаніемъ цилиндра, и сторону противолежащаго квадрата проведемъ плоскость, то тѣло, которое будетъ отсѣчено этой плоскостью [отъ цилиндра], составляетъ $\frac{1}{6}$ всей призмы. Можно посредствомъ того же метода это обнаружить, и, когда теорема будетъ такимъ образомъ уяснена, мы перейдемъ къ ея геометрическому доказательству.

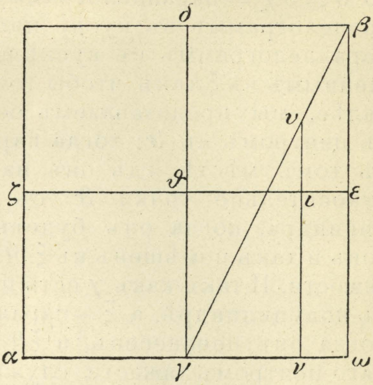
Представимъ себѣ прямую призму съ квадратными основаніями и цилиндръ, вписанный въ эту призму указаннымъ образомъ. Положимъ, что эта призма пересѣчена плоскостью, которая къ плоскости, отсѣкающей часть цилиндра, перпендикулярна и которая проходитъ черезъ ось; сѣченіемъ призмы и цилиндра (фиг. 11) будетъ параллелограммъ $\alpha\beta$, а общая прямая плоскости, отсѣкающей часть цилиндра, и плоскости, проходящей черезъ ось перпендикулярно къ плоскости, отсѣ-

---

сохранилась въ главѣ IX, въ томъ именно и заключается, что центромъ тяжести сегмента служитъ точка χ, опредѣляемая этой пропорціей.

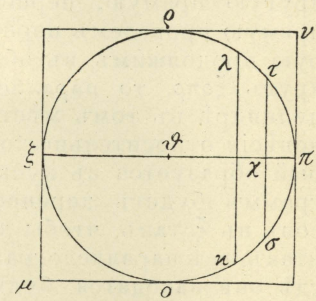
[26]) Смыслъ главы IX заключается въ томъ, что глава VIII устанавливаетъ эти соотношенія только при опредѣленныхъ условіяхъ чертежа. Можно, однако, и при другихъ условіяхъ воспользоваться разсужденіями, аналогичными приведеннымъ въ главѣ VIII.

кающей эту часть цилиндра, будетъ $\beta\gamma$; осью призмы и цилиндра будетъ $\gamma\delta$; посредствомъ прямой $\varepsilon\zeta$ она пересѣчена пополамъ подъ прямымъ угломъ, черезъ $\varepsilon\zeta$ проведена плоскость перпендикулярно къ $\gamma\delta$; эта плоскость образуетъ, слѣдовательно, въ сѣченіи съ призмой квадратъ и съ цилиндромъ кругъ.



Фиг. 11.

Положимъ, что (фиг. 12)[27]) квадратъ $\mu\nu$ будетъ сѣченіемъ призмы, кругъ $\xi o\pi\rho$—цилиндра, и что этотъ кругъ будетъ касаться сторонъ квадрата въ точкахъ ξ, o, π и ρ; общая линія пересѣченія плоскости, отсѣкающей часть цилиндра, и плоскости, проходящей черезъ $\varepsilon\zeta$ перпендикулярно къ оси цилиндра, будетъ $\varkappa\lambda$, которая раздѣлена пополамъ прямой $\pi\vartheta\xi$. Въ полукругѣ $o\pi\rho$ мы проводимъ прямую $\sigma\tau$ перпендикулярно къ $\pi\chi$, черезъ $\sigma\tau$ проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\xi\pi$ и продолжаемъ ее по обѣ стороны круга $\xi o\pi\rho$; въ сѣченіи съ полуцилиндромъ, основаніемъ котораго служитъ полукругъ $o\pi\rho$, а высотой ось призмы, она образуетъ параллелограммъ, одна сторона котораго $= \sigma\tau$, а другая = образующей цилиндра; въ кускѣ цилиндра она также образуетъ параллелограммъ, одна сторона котораго $= \sigma\tau$, а другая $= \nu\upsilon$ (фиг. 11); и вслѣдствіе этого въ параллелограммѣ $\delta\omega$ прямая $\nu\upsilon$ проходитъ $\parallel \beta\omega$ и отрѣзокъ $\varepsilon\iota = \pi\chi$. Такъ какъ теперь $\varepsilon\gamma$ есть параллелограммъ и $\nu\iota \parallel \vartheta\gamma$, а $\varepsilon\vartheta$ и $\beta\gamma$ эти параллельныя пересѣкаютъ, то $\varepsilon\vartheta : \vartheta\iota = \omega\gamma : \gamma\nu = \beta\omega : \upsilon\nu$. Но $\beta\omega : \upsilon\nu =$ паралле-



Фиг. 12.

[27]) Чертежи 11 и 12 замѣчательны тѣмъ, что даютъ проекціонное изображеніе разсматриваемой фигуры 3-хъ измѣреній на 2-хъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ и вмѣстѣ даютъ для этой фигуры дѣйствительно чертежъ, а не плохой рисунокъ, какимъ является обычный чертежъ пространственной фигуры, стремящійся соблюдать перспективу и посредствомъ нажимовъ передать даже тѣни, а поэтому, какъ чертежъ, всегда затруднительный. Въ современной начертательной геометріи методъ изображенія, которымъ Архимедъ здѣсь пользуется, возведенъ, какъ извѣстно, въ принципъ.

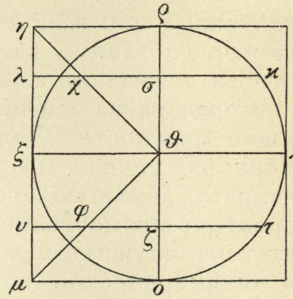
лограмму въ половинѣ цилиндра : на параллелограммъ въ кускѣ цилиндра, такъ какъ оба параллелограмма имѣютъ ту же самую сторону $\sigma\tau$; $\varepsilon\vartheta = \vartheta\pi$, $\iota\vartheta = \chi\vartheta$; и такъ какъ $\pi\vartheta = \vartheta\xi$, то $\vartheta\xi : \vartheta\chi$ = параллелограмму въ половинѣ цилиндра : на параллелограммъ въ кускѣ цилиндра. Мы представляемъ себѣ параллелограммъ въ кускѣ цилиндра перенесеннымъ и помѣщеннымъ въ ξ такъ, чтобы точка ξ была его центромъ тяжести; далѣе, мы представляемъ себѣ $\pi\xi$, какъ коромысло вѣсовъ съ центромъ въ ϑ; тогда параллелограммъ въ полуцилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ съ параллелограммомъ въ кускѣ цилиндра, когда онъ будетъ перенесенъ на коромысло вѣсовъ и такъ помѣщенъ въ ξ, чтобы точка ξ была его центромъ тяжести. И такъ какъ χ есть центръ тяжести параллелограмма въ полуцилиндрѣ, а ξ—параллелограмма въ кускѣ цилиндра, когда онъ перенесенъ, и $\xi\vartheta : \vartheta\chi$ = параллелограмму, у котораго центромъ тяжести служитъ χ, : на параллелограммъ, у котораго центромъ тяжести служитъ ξ, то параллелограммъ, у котораго центромъ тяжести служитъ χ, будетъ въ равновѣсіи относительно ϑ съ параллелограммомъ, у котораго центромъ тяжести служитъ ξ. Такимъ же самымъ образомъ можно доказать, что, когда мы проведемъ въ полукругѣ $o\pi\rho$ другую прямую, перпендикулярную къ $\pi\vartheta$, и черезъ эту прямую проведемъ перпендикулярно къ $\pi\vartheta$ плоскость, которую продолжимъ въ обѣ стороны плоскости, заключающей кругъ $\xi o\pi\rho$, то параллелограммъ, образовавшійся въ полуцилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ съ параллелограммомъ, который образуется въ кускѣ цилиндра, когда этотъ параллелограммъ будетъ перенесенъ и помѣщенъ на коромыслѣ вѣсовъ въ ξ такъ, чтобы точка ξ была его центромъ тяжести; итакъ, всѣ параллелограммы въ полуцилиндрѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ они находятся, будутъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ со всѣми параллелограммами въ кускѣ цилиндра, когда они будутъ перенесены и помѣщены на коромыслѣ вѣсовъ въ точкѣ ξ; слѣдовательно, и полуцилиндръ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ находится, будетъ въ равновѣсіи относительно точки ϑ съ кускомъ цилиндра, когда онъ будетъ перенесенъ и такъ помѣщенъ на коромыслѣ вѣсовъ въ ξ, чтобы точка ξ была его центромъ тяжести.

XII.

Возьмемъ (фиг. 13) отдѣльно начерченный перпендикулярный къ оси параллелограммъ [$\mu\nu$ вмѣстѣ съ кругомъ $\xi o\pi\rho$ и его діаметрами $\xi\pi$ и $o\rho$.[28]) Проведемъ] $\vartheta\mu$ и $\vartheta\eta$ и черезъ

[28]) См. фигуру 12.

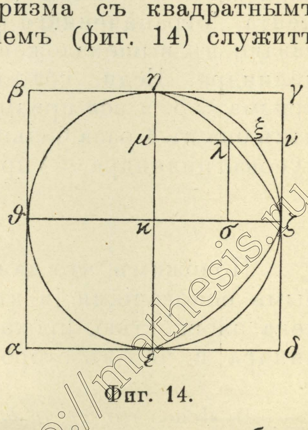
эти прямыя двѣ плоскости, перпендикулярныя къ плоскости, въ которой лежитъ полукругъ $o\pi\rho$; эти плоскости продолжимъ по обѣ ея стороны; мы получимъ такимъ образомъ призму, основанiемъ которой служитъ треугольникъ $\vartheta\mu\eta$, а высота равна оси цилиндра; эта призма составляетъ $\frac{1}{4}$ всей призмы, заключающей цилиндръ. Въ полукругѣ $o\pi\rho$ и въ квадратѣ $\mu\nu$ мы проводимъ затѣмъ двѣ прямыя $\varkappa\lambda$ и $\tau\upsilon$ на одинаковомъ разстоянiи отъ $\pi\xi$; онѣ пересѣкутъ дугу полукруга $o\pi\rho$ въ точкахъ $\varkappa$ и τ, дiаметръ $o\rho$ въ σ и ζ, прямыя $\vartheta\mu$ и $\vartheta\eta$ и въ φ и χ. Черезъ $\varkappa\lambda$, $\tau\upsilon$ мы проводимъ двѣ плоскости перпендикулярно $o\rho$ и продолжаемъ ихъ по обѣ стороны плоскости, на которой лежитъ кругъ $\xi o\pi\rho$; въ полуцилиндрѣ, основанiемъ котораго служитъ полукругъ $o\pi\rho$, а высота — та же, что у цилиндра, онѣ образуютъ, какъ сѣченiе, параллелограммъ, одна сторона котораго $= \varkappa\sigma$, другая равна оси цилиндра; въ призмѣ $\vartheta\eta\mu$ — тоже параллелограммъ, одна сторона котораго $= \lambda\chi$, другая же $=$ оси; такимъ же самымъ образомъ въ полуцилиндрѣ — параллелограммъ, одна сторона котораго $= \tau\zeta$, а другая $=$ оси цилиндра, и въ призмѣ — параллелограммъ, одна сторона котораго $= \upsilon\varphi$, другая же $=$ оси цилиндра . . . .



Фиг. 13.

XIII.

Положимъ, что дана прямая призма съ квадратнымъ основанiемъ, и однимъ ея основанiемъ (фиг. 14) служитъ квадратъ $\alpha\beta\gamma\delta$; въ призму вписанъ цилиндръ, и его основанiемъ служитъ кругъ $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$, который касается сторонъ параллелограмма $\alpha\beta\gamma\delta$ въ ε, ζ, η и ϑ; чрезъ его центръ и черезъ соотвѣтствующую сторонѣ $\gamma\delta$ сторону квадрата, лежащаго противъ даннаго квадрата $\alpha\beta\gamma\delta$, мы проводимъ плоскость; она отсѣчетъ отъ данной призмы другую призму, которая составитъ $\frac{1}{4}$ всей призмы и будетъ ограничена 3 параллелограммами и 2 противолежащими треугольниками. Въ полукругъ $\varepsilon\zeta\eta$ мы вписываемъ параболу, у которой основанiемъ будетъ $\eta\varepsilon$, а осью $\varkappa\zeta$, и въ паралле-



Фиг. 14.

лограммѣ $\delta\eta$ проводимъ $\mu\nu \parallel \varkappa\zeta$; она пересѣчетъ дугу полукруга въ ξ, а параболу въ λ, и, слѣдовательно, $\mu\nu \times \nu\lambda = \nu\zeta^2$ (что уже извѣстно [Аполлоній, Con., I, 11]). Отсюда $\mu\nu : \nu\lambda = \gamma\varkappa^2 : \lambda\sigma^2$ [29]). Черезъ $\mu\nu$ мы проводимъ плоскость перпендикулярно къ $\varepsilon\eta$; она образуетъ, какъ сѣченіе, въ призмѣ, отсѣченной отъ всей призмы, прямоугольный треугольникъ, у котораго однимъ катетомъ будетъ $\mu\nu$, а другимъ прямая, которая лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ $\gamma\delta$ въ ν, и которая равна оси цилиндра, гипотенуза же лежитъ въ сѣкущей плоскости. Далѣе, въ части, которая отсѣчена отъ цилиндра плоскостью, проведенной черезъ $\varepsilon\eta$ и сторону квадрата, лежащую противъ стороны $\gamma\delta$, она, какъ сѣченіе, образуетъ прямоугольный треугольникъ, у котораго однимъ катетомъ служитъ $\mu\xi$, а другимъ прямая, которая проведена на цилиндрической поверхности перпендикулярно къ плоскости $\varkappa\nu$, гипотенуза же . . . .

и всѣ треугольники въ призмѣ : на всѣ треугольники въ кускѣ цилиндра = всѣмъ прямымъ въ параллелограммѣ $\delta\eta$: на всѣ прямыя между параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Но изъ треугольниковъ въ призмѣ состоитъ призма, [и изъ нихъ же въ кускѣ цилиндра состоитъ кусокъ цилиндра; изъ] прямыхъ въ параллелограммѣ $\delta\zeta$ [30]) $\parallel \varkappa\zeta$ — параллелограммъ $\delta\eta$, а изъ прямыхъ, отсѣкаемыхъ параболой и прямой $\varepsilon\eta$, — параболическій сегментъ; слѣдовательно, призма : на кусокъ цилиндра = параллелограмму $\eta\delta$: на сегментъ $\varepsilon\zeta\eta$, ограниченный параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Но параллелограммъ $\delta\eta$ $[=\frac{3}{2}]$ сегмента, [ограниченнаго параболой и прямой $\varepsilon\eta$,] что̀ уже доказано въ вышеизложенномъ; поэтому и призма $= \frac{3}{2}$ куска цилиндра. Если, слѣдовательно, кусокъ цилиндра $= 2$, то призма $= 3$, а вся призма, заключающая цилиндръ, $= 12$, такъ какъ она въ 4 раза больше другой призмы; и такимъ образомъ кусокъ цилиндра $= \frac{1}{6}$ призмы, что и требовалось доказать.

XIV.

Положимъ, что дана прямоугольная призма съ квадратными основаніями [и въ нее вписанъ цилиндръ; она разсѣчена плоскостью, проходящей черезъ центръ основанія цилиндра и черезъ сторону противолежащаго квадрата]. Эта

---

[29]) Ясно, что $\mu\nu : \nu\lambda = \mu\nu^2 : \mu\nu . \nu\lambda$, а въ виду предыдущаго соотношенія $\mu\nu : \nu\lambda = \mu\nu^2 : \nu\zeta^2 = \eta\varkappa^2 : \lambda\sigma^2$.

[30]) Должно означать $\delta\eta$.

плоскость отсѣкаетъ отъ всей призмы призму и отъ цилиндра — кусокъ цилиндра. Можно доказать, что отсѣченный этой плоскостью отъ цилиндра кусокъ составляетъ $\frac{1}{6}$ всей призмы. Но предварительно мы хотимъ доказать, что въ этотъ кусокъ цилиндра возможно вписать и вокругъ него описать по фигурѣ, которая состоитъ изъ призмъ, имѣющихъ равныя высоты и въ основаніяхъ — подобные треугольники, такъ что описанная фигура будетъ превосходить вписанную на величину, меньшую всякой произвольной величины . .
. . . .

Но было доказано, что призма, отсѣченная наклонной плоскостью, меньше $\frac{3}{2}$ тѣла, вписаннаго въ кусокъ цилиндра. При этомъ призма, отсѣченная наклонной плоскостью, : на тѣла, вписанныя въ кусокъ цилиндра, = параллелограмму $\delta\eta$: на параллелограммы, вписанные въ сегментъ, ограниченный параболой и прямой $\varepsilon\eta$; слѣдовательно, параллелограммъ $\delta\eta < \frac{3}{2}$ параллелограмма въ сегментѣ, ограниченномъ параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Но это невозможно, такъ какъ мы въ другомъ мѣстѣ доказали, что параллелограммъ $\delta\eta$ составляетъ $\frac{3}{2}$ сегмента, ограниченнаго параболой и прямой $\varepsilon\eta$. Слѣдовательно . . . . не больше
. . . .

И всѣ призмы въ отсѣченной наклонной плоскостью призмѣ : на всѣ призмы фигуры, описанной вокругъ куска цилиндра = всѣмъ параллелограммамъ въ параллелограммѣ $\delta\eta$: на всѣ параллелограммы въ фигурѣ, которая описана вокругъ сегмента, ограниченнаго параболой и прямой $\varepsilon\eta$, т. е. призма, отсѣченная наклонной плоскостью, : на фигуру, описанную вокругъ куска цилиндра, = параллелограмму $\delta\eta$: на фигуру, заключенную внутри параболы и прямой $\varepsilon\eta$. Но призма, отсѣченная наклонной плоскостью, $> \frac{3}{2}$ фигуры, описанной вокругъ куска цилиндра . . . .

Вышли въ свѣтъ слѣдующія изданія:

АРРЕНІУСЪ, СВ. проф. **Физика неба**. Перев. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. VIII+250 стр. 8°. 66 черн. и 2 цвѣтн. рис. въ текстѣ. Черная и спектральная таблицы. 1905. Ц. Р. 2.—

Научность содержанія, ясность и простота изложенія и превосходный переводъ соперничаютъ другъ съ другомъ. *Русская Мысль.*

АБРАГАМЪ, Г. проф. **Сборникъ элементарныхъ опытовъ по физикѣ** Перев. съ франц. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: Работы въ мастерской—Геометрія и механика—Теплота— XVI+272 стр. 8°. Свыше 300 рис. 2-е изд. 1909 (печатается) Ц. 1 р. 50 к.

Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстникъ и Библіотека Самообразованія.*

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнетизмъ—434+LXXV стр. 8°. Свыше 400 рисунковъ. 1906. Ц. Р. 2. 75 к.

Должна служить настольн. книгой для кажд. экспериментатора. *Физ.-Люб.*

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей, подъ ред. *„Вѣстн. Опытной Физики и Элементарной Математики“* 2-е изданіе. VI+157 стр. 8°. 41 рис. и 2 таблицы. 1907. Ц. 75 к.

Нужно надѣяться, что послѣднее... послужитъ къ широкому распространенію этой чрезвычайно интересной книги. *Русская Мысль.*

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. **Царица міра и ея тѣнь.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ **энергіи и энтропіи**. Пер. съ нѣм. 3-е изд. VIII+56 стр. 8°. 1908. Ц. 40 к.

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересной.
Журн. М. Н. Пр. Проф. О. Хвольсонъ.

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Астрономія для всѣхъ**. Перев. съ англ. подъ ред. прив.-доц *А. Р. Орбинскаго.* XXIV+286 стр. 8°. Съ портр. автора, 64 рис. и 1 табл. 1905. Ц. Р. 1. 50 к.

И вполнѣ научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга... переведена и издана очень хорошо. *Вѣстникъ Воспитанія.*

ВЕБЕРЪ, Г. и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ, I.** проф. **Энциклопедія элементарной алгебры** Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* XIV+623 стр. 8°. Съ 38 чертеж. 1907. Ц. Р. 3. 50 к.

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей. *Педагогическій Сборникъ.*

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. **Непрерывность и ирраціональныя числа.** Перев. съ нѣм. съ примѣч. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*; съ присоединеніемъ его статьи: **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. 8°. 1907. (Печатается 2-е изд.). Ц. 40 к.

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанію трудъ... *Русская Школа.*

ПЕРРИ, ДЖ. проф. **Вращающійся волчекъ.** Публичная лекція. Пер. съ англ. VIII+95 стр. 8°. Съ 63 рис. 2-е изд. 1908. Ц. 60 к.

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цѣховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи. *Русская школа.* *С. Шохоръ-Троцкій.*

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества. Перев. съ нѣмецк. подъ ред. лабор. *Е. С. Елчанинова.* II+192 стр. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. Р. 1. 20 к.

Превосходная книга, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ...серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ.

Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur.

ВИХЕРТЪ, Э. проф. **Введеніе въ геодезію.** Перев. съ нѣмецк. 80 стр, 16°. Съ 41 рисунк. 1907 г. Ц. 35 к.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя ввиду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ШМИДЪ, Б. проф **Философская хрестоматія.** Перев. съ нѣм. *Ю. А. Говсѣева* подъ ред. и съ предисл. проф. *Н. Н. Ланге.* VI+171 стр. 8°. 1907. Ц. Р. 1. —

Философомъ эта хрестоматія не сдѣлаетъ... но для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она даетъ разнообразн. и интересн. матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики.** Пер. съ англійск. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга* и *А. Р. Орбинскаго.* Съ приложеніемъ рѣчи *А. Бальфура:* **„Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества“.** VIII+319 стр. 8°. Съ 5 портрет., 6 таблицами и 33 рисунками. Ц. Р. 2 —

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный міръ.*

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** (іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ III (1907) итальянскаго изданія. XII+166 стр. 8°. Съ 21 рис. 1908. Ц. Р. 1. —

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній.** 46 стр. 8°. 2-е изд., испр. и допол. 1908. Ц. 40 к.

АРРЕНІУСЪ, СВ. проф. **Образованіе міровъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* 208 стр. 8°. Съ 60 рис. 1908. Ц. Р. 1. 75 к.

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 чертежами. 1908. Ц. 35 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матеріи.** Вступительная лекція. Пер. съ итальянскаго. 28 стр. 8°. 1908. Ц. 30 к.

ЛЕМАНЪ, О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* IV+43 стр. 8° Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

ЛАКУРЪ, П. и АППЕЛЬ, Я. Историческая физика. Пер. съ нѣм. подъ ред „Вѣстника опытн. физики и элементарн. математики". Въ 2-хъ том большого формата, 880 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными табл. 1908. (Подробнѣе см. 2-ую стр. обложки). Ц Р. 7. 50 к.

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. прив.-доц. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники.** IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. 1 р.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ.** Пер. съ нѣмецк. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* 1909. Ц. Р. 1. —

Имѣется на складѣ:

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. **Форма и спектръ атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 25 стр. 16°. 1907. Ц. 20 к.

МУЛЬТОНЪ, Ф. проф. **Эволюція солнечной системы.** Перев. съ англ. IV+82 стр. 16°. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.

Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

ЕФРЕМОВЪ, Д. кандид. матем. наукъ. **Новая геометрія треугольника.** 334+XIII стр. 8°. 1902. Ц. Р. 2. —

Печатаются и готовятся къ печати:

ТОПМСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. **Добываніе свѣта.** Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ. Съ рисунками.

КУТЮРА, Л. Алгебра логики. Перев. съ франц. подъ редакціей и съ примѣчаніями проф. *И. Слѣшинскаго.*

ВЕБЕРЪ и ВЕЛЬШТЕЙНЪ, проф. **Энциклопедія элементарной геометріи.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.*

РОУ, СУНДАРА Геометрическія упражнен. съ кускомъ бумаги. Переводъ съ англійскаго.

СНАЙДЕРЪ, проф. **Міровая картина современнаго естествознанія.** Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.*

Кэджори, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** съ нѣкоторыми указаніями для преп. Перев. съ англ. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.*

Томсонъ, Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Пер. съ англ. подъ ред. „В. Оп. Ф. и Эл. Мат.“

Клоссовскій, А. проф. **Основы метеорологіи** (учебникъ). Около 30 печатныхъ листовъ.

Трельсъ-Лундъ. Небо и міровоззрѣніе въ круговоротѣ временъ. Перев. съ нѣмецкаго.

Боллъ, проф. **Вѣка и приливы.** Перев. съ англійскаго.

Адлеръ, А. Теорія геометрическихъ построеній. Пер. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

Лоренцъ, проф. **Учебникъ физики.** Перев. съ нѣмецк. Около 60 печатныхъ листовъ.

Выписывающіе изъ склада изданій „МАТЕЗИСЪ“ (Одесса, Новосельская, 66) на сумму свыше 5 руб. и больше, за пересылку не платятъ.

ОТДѢЛЕНІЕ СКЛАДА ДЛЯ МОСКВЫ:

книжный магазинъ „Образованіе“

Москва, Кузнецкій мостъ, 11.

Каталогъ по требованію высылается безплатно.

MATHESIS

Цѣна 40 коп.