В. Кутузов.

В. ЛИТЦМАНН и В. ТРИЕР

В ЧЕМ ОШИБКА?

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО

MATHESIS

ОДЕССА 1923

(См. 3 стр. обложки)

Б. Кузнецов.
3/IX 302. Москва.

W. LIETZMANN
V. TRIER

WO STECKT DER FEHLER?

В. ЛИТЦМАНН
Ст. преподаватель в Бармене

В. ТРИЕР
Магистр наук в Копенгагене

В ЧЕМ ОШИБКА?

ЛОЖНЫЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ и УЧЕНИЧЕСКИЕ ОШИБКИ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Л. С. ЛЕВИНОЙ-БРИ

С 24 чертежами в тексте

MATHESIS

ОДЕССА 1923

Р. О. П. (Одесса) № 1403.
1-я Гостипогр. им. Карла Маркса. — № 2367. 3000 экз.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом томике, уже десятом в „Математической Библиотеке“, объединяются шутка и серьезное из области математики. Шутливые ложные умозаключения затрагивают немало вопросов, подлежащих серьезному научному исследованию, зато, с другой стороны, на серьезном лице учителя наверно появится веселая улыбка при взгляде на некоторые из этих ученических ошибок. Хотелось бы, чтобы учащим и учащимся, веселым и серьезным математикам этот небольшой сборник кое-что принес; пусть он содействует тому, чтобы привнести в серьезное преподавание некоторые веселые, а в веселую беседу—некоторые более серьезные моменты.

Ложные умозаключения собраны Литцманном. Ученические ошибки выбраны Триером (по предложению издателя „Математической Библиотеки“) из его рукописного сборника, которым он пользовался втечение ряда лет,

как материалом для упражнений при подготовке преподавателей. Знакомые и коллеги принесли свои лепты для настоящего сборника. Им всем, а в особенности профессорам Гутцмеру (Галле), Штёккелю (Гейдельберг) и Виттингу (Дрезден), помогавшим читать корректуру, приносим нашу искреннюю благодарность.

В. Литцманн, В. Триер

Бармен и Копенгаген
Март 1913

СОДЕРЖАНИЕ

Часть первая

Ошибочные математические умозаключения

Часть вторая

Ученические ошибки в математике

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стран.	Строка	Напечатано	Должно быть
23	1 сн.	черт. 3	черт. 4
24	1 св.	черт. 4	черт. 3
26	13 св.	восставим	восставим из их середины
29	3 сн.	$2BE$	$-2BE$
31	4 св.	LD	LH
48	11 сн.	равнений	уравнений
75	8 сн.	698 950	698 860

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Ошибочные математические умозаключения

I. ВВЕДЕНИЕ

Собранные в первой части этой книжки ошибочные умозаключения в большинстве строятся на таком приеме: ошибка намеренно включается в цепь умозаключений по возможности незаметным образом для читателя, который лишь, дойдя до нелепого вывода, замечает, что в чем-то дал себя провести. Не с каждым читателем и не в отношении каждой задачи цель эта может быть достигнута в одинаковой степени. Бывают люди чрезвычайно подозрительные, которых трудно обойти, особенно, когда какое-нибудь поразительное утверждение с самого начала заставляет их удвоить свою осторожность. Помимо того, далеко не безразлично, в какой мере читатель знаком с общепринятыми в элементарной математике приемами вычислений и доказательств. Так, например, я включил ложные умозаключения, основанные на теории неравенств, только потому, что в школьном курсе (по крайней мере, в Германии) отдел этот является каким-то пасынком. Для того, кто много работал с неравенствами, дело сводится

просто на просто к грубым ошибкам. То же относится и к примерам из теории рядов.

Итак, мы должны замаскировать ошибку, если хотим поразить читателя.

Если из равенства

$$0.7 = 0.8$$

путем деления на 0 мы приходим к выводу, что

$$7 = 8;$$

если из равенства

$$(-a)^2 = a^2$$

путем извлечения корня квадратного из обеих частей равенства мы находим

$$-a = a;$$

если из сопоставления двух противоречащих друг другу уравнений

$$x + y = 1$$
$$x + y = 2$$

делается заключение, что

$$1 = 2,$$

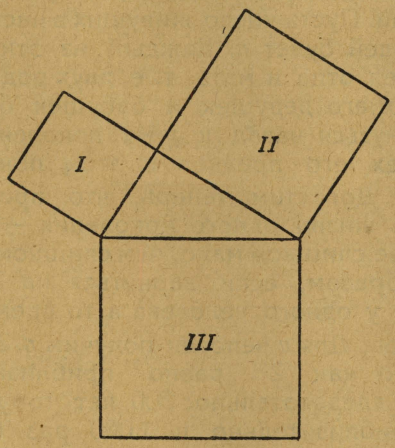
— то все эти способы выводов так нелепы, что вряд ли кто впадет в такие ошибки.

Разумеется, нельзя отрицать, что при случае могут представить интерес и такие ложные умозаключения, в которых ошибки ясны, как на ладони. Вот несколько примеров подобного рода.

Прежде всего возьмем прекрасное доказательство Пифагоровой теоремы, что сумма изо-

браженных на чертеже 1 квадратов I и II, построенных на катетах, равна обозначенному знаком III квадрату, построенному на гипотенузе. Непосредственно путем простого сложения убеждаются, что $I + II = III$.

Вот еще очень известная история: некто приходит в магазин и покупает нож за 1·50 *руб*. На другой день он вновь заходит в



Черт. 1.

магазин, желая обменять свой нож; он выбирает себе другой, стоимостью в 3 *р*, и, ничего не заплатив, собирается уходить. Когда владелец магазина задерживает его, хитрец говорит: Ведь я оставил Вам нож ценою в 1·50 *р*, а вчера я заплатил Вам наличными 1·50 *р*.

Вместе это составляет 3 p, и мы, таким образом, в расчете.

Не менее интересным, хотя далеко не таким общеизвестным, является следующее рассуждение: Часто приходится слышать мнение, что число людей в прежние времена было значительно меньше, чем в настоящее время. Насколько, однако, такой взгляд ложен, можно убедиться помощью следующих простых соображений. Пусть число живущих в настоящее время людей будет n. Каждый из этих n человек имел отца и мать, т. е. двух родителей; число всех его дедушек и бабушек будет 4. Если вернуться назад к p-му поколению, то число всех его предков в этом поколении будет 2^p. Допустим теперь, что продолжительность жизни одного поколения — 30 лет; это скорее слишком мало, чем слишком много. Таким образом, если вернуться на $30p$ лет назад, то у одного человека в то время жило 2^p предков. Для n человек получим $n.2^p$ предков. Так как 2^{10} равно приблизительно 1 000, то, следовательно, 300 лет тому назад было приблизительно в 1 000 раз больше людей, чем в настоящее время, 600 лет тому назад их было в 1 000 000 раз больше и т. д.

В заключение еще один пример; требуется доказать следующее предложение. На прямой заданы точки A, O, M, B, N в указанном порядке так, что

$$AO = OB \text{ и } \frac{OM}{OB} = \frac{OB}{ON}.$$

Надо доказать, что

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{BN}.$$

Решение, которое фактически дал один ученик, было таково. Можно сократить две последние дроби, одну на M, другую на N и получить

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{B}.$$

Это равенство бесспорно верно, следовательно, правильно и доказываемое предложение.

Последний пример, за который иной читатель вероятно расплатится возгласом ау!, напоминает об обычном вопросе новичка в математическом кружке, почему нельзя сократить на d выражение $\frac{dy}{dx}$, или при вычислении положить [1]) $\int\frac{dx}{x}=\int d$, что дает 1, в силу того, что, как известно, интегрирование и дифференцирование являются обратными операциями.

Особый класс ошибочных умозаключений образуют те умозаключения, в которых со-

---

[1]) Фактически было проделано такое вычисление:

$$\frac{\int f(x)\,dx}{\int f(x)\,g(x)\,dx}=\frac{\int dx}{\int g(x)\,dx}=\frac{x}{\int g(x)\,dx}.$$

$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int \operatorname{arc}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln\sin x + C$

arc как „обратная" функция.
Действ. имели место при приеме интеграл.

вершенно неверные вычисления приводят к правильным выводам. Поражает читателя в таких случаях то обстоятельство, что вместо ожидаемого ложного результата, получается правильный. Приведем только два примера такого типа. В дробях $\frac{26}{65}$ или $\frac{16}{64}$ можно безнаказанно „сократить“ числителя и знаменателя каждой на 6; мы, несмотря на это, придем к правильному заключению. Точно так же вполне допустимо „вынести из под знака корня“ 5 в выражении $\sqrt{5\frac{5}{24}}$ или 12 в выражении $\sqrt{12\frac{12}{143}}$. Действительно,

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}},$$

$$\sqrt{12\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}},$$

и вообще

$$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}.$$

Приводимые в дальнейшем сложные ошибочные умозаключения распределены в две главы: в одной содержатся примеры из области арифметики и алгебры, в другой из геометрии. Некоторые ошибочные умозаключения, относящиеся скорее к механике, чем к математике, включены в надлежащие места.

Разделение не проводится вполне строго. В главе, относящейся к геометрии, тоже при-

ходится вычислять. Я полагаю, что бывают такие случаи, когда только вычисления и могут обнаружить ошибочность вывода; таковы, например, те случаи, когда, скажем осторожно, у некоторых людей непосредственное созерцание дает отказ. Я хотел бы напомнить здесь об известном вопросе - шутке.

Вообразим себе, что земной экватор охвачен веревкой, что она немного велика и превосходит его по размерам приблизительно на 10 метров. Вообразим себе далее, что концы веревки соединены между собой, и что веревка повсюду одинаково свободно натянута вокруг земли. Спрашивается, как далеко отстоит веревка от земли. В состоянии ли муха пробраться между землей и отстающей от нее веревкой?

Ответ, как известно, гласит, что муха безусловно может пробраться, и что даже человек не слишком высокого роста в состоянии пройти под веревкой, не наклоняясь.

С наглядным представлением этого факта дело обстоит плохо. Не один математик уверял меня, что он не в состоянии себе этого представить; многие не-математики говорили мне, что это вообще не верно, в вычислениях кроется, очевидно, ошибка.

Ошибочных умозаключений, которые вопреки своей математической внешности относятся к области физики, я здесь не рассматривал. Они очень многочисленны. Назову только один пример. Из известного уравнения состояния газов $p.v = RT$ следует, что при постоянном давлении, скажем, в одну атмо-

сферу, объем газа сведется к нулю, когда газ охладится до — 273°, и затем, что объем станет меньше нуля, отрицательным, если продолжать охлаждение далее.

Я не указывал источников отдельных ложных заключений. Во многих случаях этого сделать нельзя; любопытные случаи ошибок передаются из уст в уста и лишь впоследствии их, быть может, кто-нибудь опубликовал, при чем нет уверенности в том, что указанный случай не появился раньше в каком-нибудь семейном или ученическом журнале. Мне хотелось бы только отметить, что в новейшем издании известной работы W. W. Rouse Ball'a, Mathematical Recreations and Essays, я встретил среди многих известных и значительное число незнакомых ошибочных заключений. Быть может, тот или другой читатель сумеет пополнить каким-либо иным интересным ложным выводом тот материал, который дан на следующих страницах.

В заключение еще пару слов относительно того, как я себе представляю чтение этих ошибочных умозаключений. Недостаточно отдать дань изумления ложному выводу и вытекающему отсюда ошибочному умозаключению, будто и математика, стоящая выше всяких ошибок, тоже может оказаться бессильной. Следует, разумеется, открыть ошибку и разобраться в ней. Я всецело предоставляю эту работу читателю и даже избегаю давать хотя бы только указания в этом направлении. Но и раскрытие ошибок читателем еще не является конечной целью. Не следует ограни-

читься только тем, что ткнешь пальцем в ошибочное место. Следует вывести эту ошибку на свежую воду, извлечь ее из той более или менее замаскированной оболочки, в которую она наряжена. Полезно, пожалуй, и придумать для нее другие одежды. Зародыши многих из этих ошибок сыграли в истории математики важную роль, некоторые ошибки следует рассматривать, как исходные точки для новых путей математического исследования.

II. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

1

$$2\,кгр = 2\,000\,гр$$

$$3\,кгр = 3\,000\,гр\,.$$

Произведения равных на равные дают равные результаты, поэтому

$$6\,кгр = 6\,000\,000\,гр\,.$$

2

Если к двум предложениям:

1 кошка имеет 4 ноги

0 кошек имеют 3 ноги

(последнее предложение читай: нет кошки, имеющей 3 ноги) применить основное положение: „равные величины, сложенные с равными, дают равные“, то мы получим замечательный результат:

1 кошка имеет 7 ног.

3

Всякое число равно такому же удвоенному числу.

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2 .$$

Если в левой части вынести a за скобку, а к правой части применить формулу

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 ,$$

то отсюда будет следовать, что

$$a \,.\, (a-a) = (a+a) \,.\, (a-a) .$$

Если теперь обе части равенства разделим на общего множителя $(a-a)$, то получим в заключение, что

$$a = 2a .$$

Это ложное умозаключение с некоторыми его следствиями можно облечь в другую форму. Пусть будет $x = 1$, тогда $x^2 = 1$ или $x^2 - 1 = 0$, следовательно (после деления на $x - 1$), и $x + 1 = 0$, т. е. $x = -1$. Отсюда следует, что $1 = -1$ или $2a = 0$, т. е. всякое число есть нуль. Нетрудно поэтому математически доказать поговорку: „Однажды значит ни разу“! („Einmal ist keinmal“).

4

Все числа равны между собой. Пусть a и b два числа и притом $a > b$. Тогда вводят положительное число c, которое удовлетворяет соотношению

$$a = b + c .$$

Если помножить это равенство на $a-b$, то получим

$$a.a-a.b=a.b+a.c-b.b-b.c$$
$$a.a-a.b-a.c=a.b-b.b-b.c$$
$$a.(a-b-c)=b.(a-b-c),$$

и, сокращая обе части на общего множителя, найдем, что

$$a=b.$$

5

Даны уравнения

$$2x+y=8$$
$$x=2-\frac{y}{2}.$$

Чтобы решить их, вставляют значение x из второго уравнения в первое и получают

$$4-y+y=8.$$

Отсюда следует

$$4=8.$$

6

Уравнение

$$6x+25=10x+15$$

преобразовывают следующим образом:

$$3(2x-5)=5(2x-5);$$

следовательно,

$$3=5.$$

7

Уравнение

$$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}$$

преобразовывают таким образом:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x};$$

$$-\frac{4x-40}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x};$$

$$\frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x},$$

и находят, что $7=13$.

8

Доказательство того, что $2\times2=5$. Есть театральная пьеса под таким заглавием: дважды два равняется пяти. Если качество театральной пьесы пропорционально числу представлений, которая она выдерживает, то это должна быть очень хорошая пьеса. К сожалению, я не знаю только, доказывается ли в этой пьесе справедливость заглавного равенства. Во всяком случае это можно было бы сделать в следующей форме:

$$16-36=25-45;$$

$$16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4};$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2;$$

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2};$$

$$4=5.$$

9

Число не изменяет своего значения, если прибавить к нему единицу. Из равенства

$$n^2 - n(2n+1) = (n+1)^2 - (n+1)(2n+1),$$

в справедливости которого легко убедиться, выполнив умножение, следует

$$n^2 - n(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= (n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2;$$

$$\left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2 = \left((n+1) - \frac{2n+1}{2}\right)^2;$$

$$n - \frac{2n+1}{2} = n + 1 - \frac{2n+1}{2};$$

$$n = n + 1.$$

10

Два произвольных числа равны друг другу.

Дается равенство

$$(x-a)^2 = (x-b)^2.$$

Если из обеих частей равенства извлечь корень, то мы получим

$$x - a = x - b;$$

следовательно

$$a = b.$$

11

Всякое положительное число равно отрицательному числу, имеющему ту же абсолютную величину.
По правилам извлечения корней имеем

$$\sqrt{-a}\,.\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)\,.\,(-a)}=\sqrt{a^2}=a\,;$$

$$\sqrt{-a}\,.\sqrt{-a}=(\sqrt{-a})^2=-a\,;$$

откуда следует

$$a=-a\,.$$

12

Логарифм отрицательного числа равен логарифму соответствующего положительного числа.
Имеем:

$$2\log a=\log(a^2)=\log([-a]^2)=2\log(-a)\,,$$

и, следовательно, согласно утверждению,

$$\log a=\log(-a)\,.$$

Частным случаем является утверждение: логарифм —1 есть нуль.
Логарифмируя выражение

$$(-1)^2=1\,,$$

получаем

$$2\log(-1)=\log 1=0\,.$$

Из заключения $\log(-1)=0$ можно сделать еще другие поразительные выводы. Отсюда

следует, например, что

$$10^0 = -1,$$

и так как левая часть равенства $= 1$, то

$$1 = -1.$$

13

Если $a > b$, то и $a > 2b$ (a и b положительные числа). Из неравенства

(1) $$a > b$$

путем умножения на b получаем

$$a \cdot b > b^2,$$

и далее, отнимая от обеих частей по a^2,

$$a \cdot b - a^2 > b^2 - a^2.$$

После деления на $b - a$ получаем

$$a > b + a.$$

Если к этому уже достаточно замечательному неравенству прибавить почленно неравенство (1), то получим

$$2a > 2b + a,$$

следовательно,

$$a > 2b.$$

14

Всякое положительное число меньше нуля. Пусть n целое положительное число. Тогда

$$2n - 1 < 2n.$$

Если умножить это неравенство на $-a$, где a любое положительное число, то получим

$$-2an+a<-2an.$$

И, следовательно, прибавляя к обеим частям неравенства по $2an$, найдем, что

$$a<0.$$

15

$i^2=1$. Имеем равенство

$$\sqrt{x-y}=i\sqrt{y-x},$$

где i, как известно, означает $\sqrt{-1}$.

Равенство это справедливо, какие бы значения ни принимали x и y. Поэтому

$$\sqrt{a-b}=i.\sqrt{b-a},$$

и точно так же

$$\sqrt{b-a}=i.\sqrt{a-b}.$$

Если перемножить оба эти равенства, то получим

$$\sqrt{a-b}.\sqrt{b-a}=i^2.\sqrt{b-a}.\sqrt{a-b}.$$

После деления на общих множителей имеем

$$i^2=1.$$

Этот факт можно „доказать“ еще и другим путем. Имеем равенство

$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1},$$

следовательно,

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

или

$$\frac{1}{i}=i.$$

Таким образом,

$$i^2=1.$$

16

К критике одного физического закона. Если газ, нагреваясь на t^0 при постоянном давлении, расширяется в объеме от v_0 при 0^0 до v_t, то, как известно, по закону Гей-Люссака имеем:

$$v_t=v_0(1+\alpha t),$$

где α равняется $\frac{1}{273}$.

Если же, напротив того, оставить объем постоянным, то между давлениями p_t и p_0 при t^0 и 0^0 будет существовать равенство

$$p_t=p_0(1+\alpha t).$$

Если перемножить оба равенства, то получим

$$v_t\cdot p_t=p_0\cdot v_0(1+\alpha t)^2.$$

Итак, известный закон Бойля-Гей-Люссака

$$v_tp_t=v_0p_0(1+\alpha t)$$

ложен?

17

Ахилл и черепаха. Ахилл и черепаха затеяли бег взапуски. Черепахе дали фору, скажем, в 100 *м*. Наше рассуждение покажет, что Ахилл не в состоянии догнать черепаху даже в том случае, если бы он бежал быстрее своей противницы, скажем, в 10 раз. Когда Ахилл пробежит 100 метров, черепаха будет впереди его на 10 *м*. Когда он пробежит и эти 10 *м*, то черепаха всетаки будет впереди его на 1 *м*. Когда Ахилл пройдет и этот метр, его соперница будет впереди на 10 *см*. Когда он преодолеет и это расстояние, черепаха все еще будет впереди его. Продолжая это рассуждение, мы найдем, что хотя расстояние между ними уменьшается, но никогда вполне не исчезает; фактически таким образом Ахилл никогда не догонит черепахи.

История Тристрам Шенди [1]). История Тристрам Шенди является чем-то противоположным состязанию в беге между Ахиллом и черепахой. Шенди начал писать свою биографию и делал это так основательно, что на историю первых двух дней своей жизни он потратил 2 года. Очевидно, что, продолжая работать таким же темпом, он не закончит своей работы, за которой его застигнет смерть.

---

[1]) Эта история, в сущности, не ошибочное умозаключение, а парадокс. Предыдущее ошибочное умозаключение также известно под именем парадокса Зенона.

Если бы, однако, он жил достаточно долго, вся биография была бы закончена. В самом деле, допустим, что дело идет о двух днях хотя бы очень поздней поры его жизни; —если только он будет жить достаточно долго, он всетаки доберется до этого момента в своей биографии.

18

Сумма бесконечного ряда $1-1+1-1+1-1+\cdots$ есть $\frac{1}{2}$. Сумма s бесконечной геометрической прогрессии с начальным членом a и знаменателем отношения q есть

$$s=\frac{a}{1-q}.$$

Данный ряд есть геометрический ряд с первым членом 1 и знаменателем отношения -1. Если подставить эти значения в формулу суммы, то получим

$$s=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}.$$

Кто знаком с учением о рядах, тот легко получит ряды:

$$\frac{1}{1+x+x^2}=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+\cdots,$$

в справедливости которых можно убедиться

простым делением. Если положить в них $x=1$, то получим для суммы нашего ряда также числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Что же правильно?

19

Натуральный логарифм числа 2 есть 0. Разложение в ряд дает для натурального логарифма числа 2 значение

$$\log \text{nat}\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Этот ряд сходится. Если собрать отдельно все положительные и отрицательные члены, то получим:

$$\log \text{nat}\, 2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right).$$

Если прибавить выражение, стоящее во вторых скобках, к тому, что стоит в первых, и затем вычесть прибавленное выражение из вторых, то получим

$$\log \text{nat}\, 2 = \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right)\right] - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right).$$

Если раскрыть обе пары круглых скобок и помножить выражение во вторых скобках на 2,

то получим

$$\log \text{nat}\, 2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right) -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right);$$

$$\log \text{nat}\, 2 = 0.$$

20

Значение натурального логарифма числа 2 не изменяется от умножения на 2.

Если ряд

$$(1) \quad \log \text{nat}\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

умножить на 2, то получим

$$2 \log \text{nat}\, 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \cdots.$$

Если собрать члены с одинаковыми знаменателями и расположить дроби в порядке возрастающих знаменателей, то получим

$$(2) \quad 2 \log \text{nat}\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots.$$

Но это то же, что выше отмечено номером (1). Итак,

$$\log \text{nat}\, 2 = 2 \log \text{nat}\, 2,$$

вывод, который, разумеется, можно было бы получить непосредственно из № 19.

21

$e = 1$ и $e = \infty$. Основание $e = 2{\cdot}718\,28\ldots$ натуральных логарифмов чаще всего определяется, как предел, к которому стремится выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, когда n бесконечно возрастает. Если взять предел выражения, стоящего в скобках, то дробь $\frac{1}{n}$ стремится к 0, все выражение в скобках принимает, стало быть, значение 1, и бесконечное произведение множителей, каждый из которых равен 1, само равно 1. Таким образом, e оказывается равным 1.

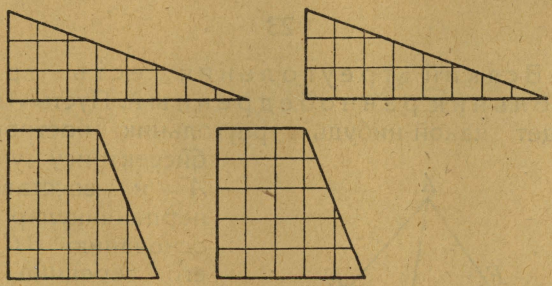
Однако, можно поступить и иначе. Если привести выражения в скобках к общему знаменателю, то получим положительную дробь $\frac{n+1}{n}$. Как бы велико n ни было, дробь всегда неправильная, потому что числитель всегда остается на 1 больше знаменателя. Теперь, как легко убедиться, бесконечное произведение равных множителей равно 0, если множители правильные дроби; равно 1, если множители равны единице (как выше было сказано); равно ∞, если множители > 1. В данном случае имеет место последнее. Таким образом, для предела, а вместе с ним для числа e получаем ∞.

III. ГЕОМЕТРИЯ

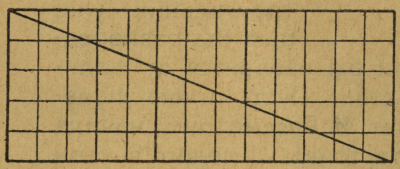
22

Геометрическое доказательство того, что $64 = 65$. Вырежем из миллиме-

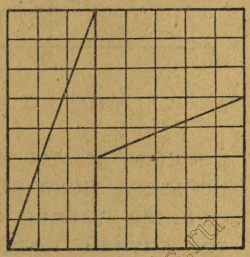
тровой бумаги или из другой какой-нибудь бумаги, разлинованной на квадратики, два прямоугольных треугольника с катетами 3 и 8 и две трапеции с 2 прямыми



Черт. 2.



Черт. 3.



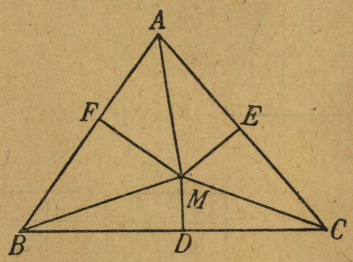
Черт. 4.

углами каждая, параллельные стороны которых соответственно равны 3 и 5, а расстояние между ними равно 5 (черт. 2). Если сложить эти 4 фигуры вместе так, как указано на черт. 3, то общая площадь равна 64, если же

сложить их так, как указано на черт. 4, то получим 65. Из этих четырех фигур можно составить и такую фигуру, площадь которой выражалась бы числом 63. Кто сумел бы это сделать?

23

Всякий треугольник есть треугольник равнобедренный. Пусть ABC будет какой-нибудь треугольник; построим биссектрису угла A и восставим перпендикуляр к основанию BC в его середине D (черт. 5). Обе прямые пересекутся, иначе они были бы параллельны, а в таком случае треугольник уже был бы равнобедренным, и мы могли бы избавится от дальнейшего доказательства. Пусть точка пересечения прямых будет M. Рассмотрим сначала тот случай, когда эта точка M лежит внутри треугольника. Опустим из M на AB и AC перпендикуляры MF и ME.



Черт. 5.

Тогда

(1) $\triangle AFM \cong \triangle AEM$,

(2) $\triangle MDB \cong \triangle MDC$.

Из (1) следует

$$MF = ME,$$

из (2)

$$MB = MC,$$

следовательно,

(3) $$\triangle MBF \cong \triangle MCE.$$

Из (1) следует

(4) $$AF = AE,$$

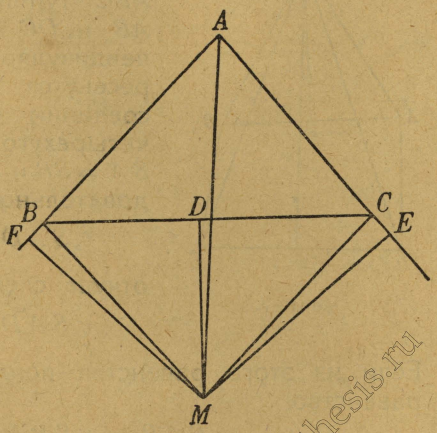
из (3)

(5) $$FB = EC.$$

Если сложить равенства (4) и (5), то получим

$$AB = AC,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 6.

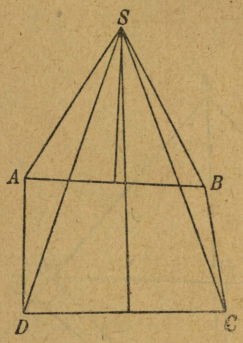
Если бы точка пересечения биссектрисы и медианы лежала не внутри треугольника, а вне его, то, как указано на черт. 6, можно было бы повторить то же доказательство с тем только различием, что в конце доказательства не

пришлось бы складывать равенства (4) и (5), а вычитывать равенство (5) из равенства (4).

Ближайшим следствием доказанного утверждения явится то положение, что все треугольники равнобедренные.

24

Прямой угол равен тупому. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (черт. 7), в котором A прямой угол, стороны AD и BC равной длины и, наконец, угол ABC тупой. К сторонам AB и DC восставим перпендикуляры, которые пересекутся в S. Точку S соединим с вершинами четырехугольника. Тогда $SA = SB$ и $SD = SC$, следовательно,



Черт. 7.

$$\triangle SAD \cong \triangle SBC,$$

откуда следует

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SBC.$$

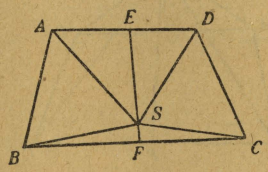
Если из этого равенства почленно вычесть равенство

$$\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA,$$

то в результате найдем, что первоначально принятый нами за тупой угол ABC равен прямому углу BAD.

25

Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны, то другие две стороны параллельны. Пусть $ABCD$ четырехугольник, в котором две противолежащие стороны AB и DC равны по длине (черт. 8). Восставим к стороне AD из ее середины E перпендикуляр, а также перпендикуляр к стороне BC из ее середины F. Оба перпендикуляра пересекутся в точке S



Черт. 8.

Если же они были бы параллельны, то и AD и BC тоже были бы параллельны, и незачем было бы доказывать наше утверждение. Я желаю доказать, что ESF прямая; отсюда непосредственно будет следовать, согласно с нашим утверждением, что прямые AD и BC параллельны. Соединяю S с вершинами четырехугольника. Тогда треугольники SAE и SDE, а также треугольники SBF и SCF равны, и так как притом $AB = DC$, то равны и треугольники SAB и SDC. Из этих равенств вытекают следующие равенства углов:

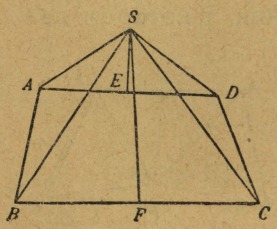
(1) $\measuredangle ESA = \measuredangle ESD$

(2) $\measuredangle ASB = \measuredangle DSC$

(3) $\measuredangle BSF = \measuredangle CSF$.

Складывая эти 3 равенства, найдем, что угол ESF выпрямленный, чем и доказано наше

утверждение. Разумеется нужно разъяснить еще один пункт. Мы допустили, что точка пересечения S двух перпендикуляров, восставленных к сторонам из их середины, лежит внутри четырехугольника. Но она может находиться и вне четырехугольника. Из черт. 9 ясно виден весь соответствующий этому случаю ход доказательства. Только в конце доказательства не нужно складывать три равенства между углами: совпадение SE и SF доказывается тем, что складывают равенства (2) и (3) и обнаруживают, что SE, как и SF, являются биссектрисами угла ASD; обе они должны, следовательно, совпасть.



Черт. 9.

26

Часть прямой равна всей прямой. Пусть в разностороннем треугольнике ABC угол α будет наибольшим, и в силу этого $\measuredangle\ \beta$ острым (черт. 10). Мы откладываем угол γ на стороне AB при вершине A; вторая сторона угла пересекает BC в точке D. Из A опускаем, кроме того, на BC перпендикуляр AE. В таком случае

(1) $$\triangle ABC \sim \triangle DBA,$$

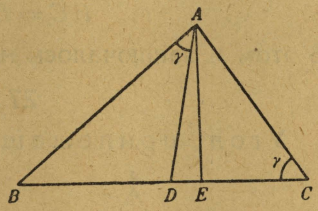
и так как площади подобных треугольников

относятся друг к другу, как квадраты соответственных сторон, то

(2) $$\triangle ABC : \triangle DBA = AC^2 : AD^2.$$

В треугольниках ABC и DBA, если принять стороны BD и BC за основания, высоты равны; следовательно, площади их относятся, как основания BC и BD. Таким путем получаем пропорцию:

(3) $$\frac{AC^2}{BC} = \frac{AD^2}{BD}.$$



Черт. 10.

Против стороны AC в $\triangle ABC$ и против стороны AD в $\triangle ABD$ лежат острые углы. Применим сюда теорему, гласящую, что в треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию другой на нее. В силу этой теоремы имеем:

(4) $$\frac{AB^2 + BC^2 - 2BC.BE}{BC} = \frac{AB^2 + BD^2 - 2BD.BE}{BD}.$$

Если разделить почленно каждое слагаемое числителей на соответствующих знаменателей, то, отняв от обеих частей по $2BE$, получим

(5) $$\frac{AB^2}{BC} + BC = \frac{AB^2}{BD} + BD.$$

Если перенесем BD в левую часть, а BC в

правую и затем приведем в каждой части члены к общему знаменателю, то найдем, что

$$\frac{AB^2 - BC.BD}{BC} = \frac{AB^2 - BC.BD}{BD}.$$

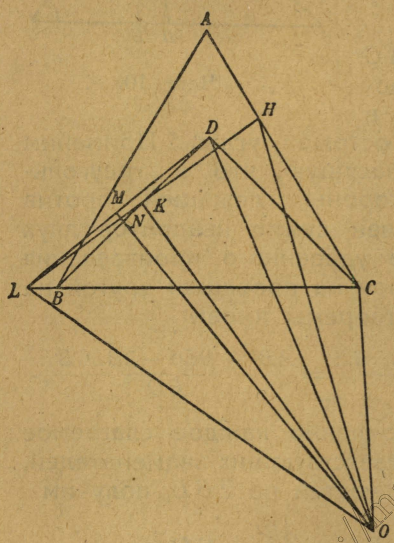
В силу равенства числителей будут равны и знаменатели:

$$BC = BD.$$

В этом и заключалось наше утверждение.

27

Угол, прилежащий к гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника, равен 60^0. На прямой BC по одну сторону ее построим равносторонний треугольник ABC и равнобедренный прямоугольный треугольник DBC (черт. 11). Отложим сторону DC на прямой AC от C до H. Точку H соединим с серединой K стороны BD и продолжим за K до пересече-

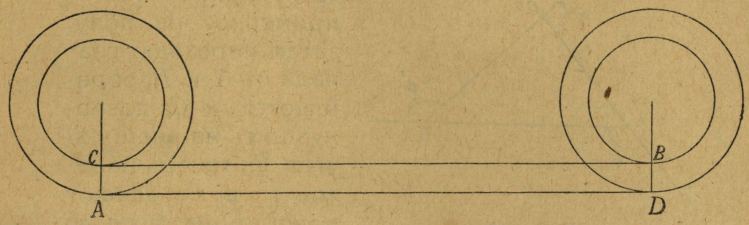


Черт. 11.

ния в L с продолжением BC. Точку L соединяем с D. К стороне LD в ее середине M восставим перпендикуляр, который пересечет в точке O перпендикуляр, восставленный к прямой LD из ее середины N [1]). Эту точку O соединяем с точками C, D, H и L. Теперь OD и OL, а также OL и OH равны, т. е. $OD = OH$. Следовательно, треугольники OCH и OCD равны, так как $CD = CH$. Отсюда следует, что угол DCB, прилежащий к гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника, равен углу равностороннего треугольника.

28

Окружности всех кругов равны. Оба данных круга можно наложить концен-



Черт. 12.

трически один на другой и твердо соединить друг с другом (черт. 12). Пусть больший круг катится по прямой AD, пробегая длину AD, равную его периферии. Тогда точка C на пери-

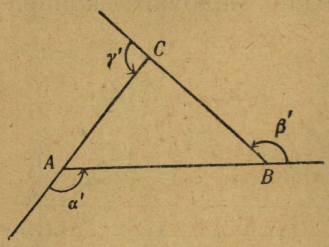
---

[1]) На чертеже точки N и K расположены очень близко одна к другой!

ферии меньшего круга опишет путь CB. Отрезки AD и CB равны, как противоположные стороны прямоугольника. Так как, кроме того, оба круга твердо связаны друг с другом, то при одном обороте большего круга меньший тоже сделает только один оборот. Таким образом, прямая CB есть не что иное, как развернутый меньший круг. Отсюда следует, что окружности обоих кругов равны по длине.

29

Сумма углов сферического треугольника есть 180^0. Вот известное доказательство теоремы о сумме углов плоского треугольника: чертят треугольник ABC, примерно, на полу, затем переходят сначала от A к B, обращаются к C, повернувшись на внешний угол β'; теперь переходят в C, делают поворот на угол γ' в направлении к A. Если, наконец, сделать в точке A поворот в сторону B на угол α', то получим то же направление, которого мы держались при вступлении в круговой обход, с той только разницей, что мы за этот промежуток времени успели обернуться один раз вокруг самих себя, т. е. на угол в 360^0. Сумма внешних углов равна поэтому 360^0. Так как внутренний угол вместе



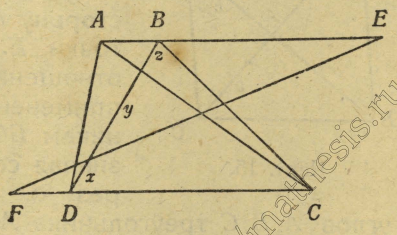
Черт. 13.

с соответствующим ему внешним составляет 180^0, то сумма всех внутренних и внешних углов равна 540^0; для суммы внутренних остаются, следовательно, 180^0.

При этом доказательстве нигде не пользуются тем обстоятельством, что движутся по плоскости. Поэтому можно целиком применить то же доказательство и к треугольнику на какой-угодно кривой поверхности. Если, например, A, B, C будут не три близко лежащие друг к другу точки на полу комнаты, а три далеко отстоящие друг от друга пункта, взятые в Германии или где-либо на земле, то результат будет тот же. Отсюда ясна справедливость нашего утверждения и для треугольников на шаровых поверхностях и даже на любых кривых поверхностях.

30

Сумма двух параллельных друг другу сторон трапеции равна 0. Продолжим параллельные стороны трапеции $ABCD$ (черт. 14) в противоположных направлениях, а именно a за B до E на длину b, b за D до F на длину a. Проведем обе диагонали трапеции, AC и BD, и прямую, соединяющую точки E и F. Три части,



Черт. 14.

на которые делится отрезок BD прямыми AC и EF, пусть будут z, y и x. Из двух пар подобных треугольников получим

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{y+z}=\frac{z}{x+y}.$$

Если к последней части этой пропорции применить теорему об отношении разности предыдущих к разности последующих, то получим

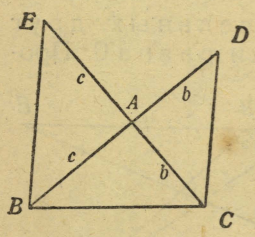
$$\frac{a}{b}=\frac{x-z}{z-x}=-1.$$

Поэтому

$$a=-b, \text{ или } a+b=0.$$

31

Все треугольники суть равносторонние треугольники. Продолжим стороны b и c треугольника ABC (черт. 15), а именно сторону c на величину b до точки D, а сторону b на длину c до точки E. Из теоремы об отношении синусов в применении к треугольникам BCE и BCD (обозначая соответственно через α, β, γ величины углов A, B, C треугольника ABC) вытекает:



Черт. 15.

$$\sin\left(\beta+\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha$$

$$\sin\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

А отсюда получаем

$$\sin\left(\beta+\frac{1}{2}\alpha\right)=\sin\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right),$$

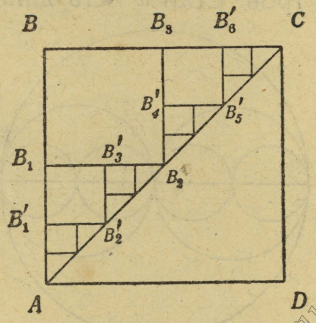
то есть,

$$\beta=\gamma.$$

Таким же образом найдем, что $\gamma=\alpha$, а если все 3 угла треугольника равны между собой, то треугольник равносторонний.

32

Диагональ квадрата равна сумме двух его сторон. Пройдем путь от A к C в нарисованном здесь квадрате (стороны которого для простоты положим равными 1) таким образом, что пойдем сначала в B, а затем в C; пройденный путь равен тогда 2. Длина пути остается неизменной, если мы вместо этого пути пойдем по ступенькам $AB_1B_2B_3C$. Если теперь удвоить число ступенек, уменьшив вдвое высоту каждой из них, то общая длина пути все же останется равной 2. Мы можем так продолжать; на чертеже указано такое последовательное удвоение еще дважды. Пусть число ступенек, благо-



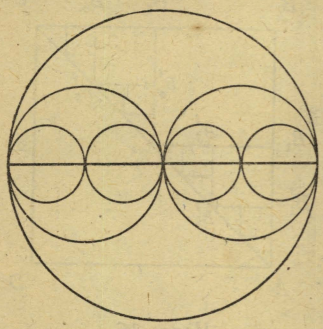
Черт. 16.

даря дальнейшему удвоению, возрастает до бесконечности; общая длина пути постоянно остается равной двум, самый же путь все больше приближается к диагонали AC и в пределе сливается с нею.

Длина диагонали оказывается, таким образом, равной 2. Доказательство не связано непременно с квадратом; можно с одинаковым успехом исходить из параллелограмма и доказать, что его диагональ равна сумме двух смежных сторон.

33

$\pi = 2$. Начертим круг и один из его диаметров. Если d есть длина диаметра, то длина окружности равна πd. Начертим внутри нашего круга два других круга, центры которых лежат на диаметре, и диаметры которых равны радиусу первого круга. Пусть они расположены так, как указано на черт. 17. Сумма окружностей этих 2-х кругов также равна πd.



Черт. 17.

Если в каждый из двух внутренних кругов вписать подобным же образом по два круга, то сумма окружностей всех четырех кругов все еще равна будет πd. Это остается справедливым, сколько бы мы ни продолжали

указанный процесс. Что же мы получим в пределе для бесчисленного множества кругов? Полученная фигура будет незначительно отличаться от самого диаметра, который, разумеется надо вообразить себе двойным: с одной стороны, как предел к которому стремятся верхние части кругов, с другой стороны, как предел нижних частей. Таким образом, мы найдем

$$\pi d = 2d.$$

Итак,

$$\pi = 2.$$

34

$\pi = 2\frac{2}{3}$. Площадь половины эллипса, ограниченная малой осью, есть $\frac{1}{2}\pi ab$, где a и b половины главных осей эллипса. Площадь плоской фигуры, ограниченной дугой параболы и хордой длиною $2b$, проведенной параллельно касательной в вершине на расстоянии a от касательной, равна $\frac{2}{3}a.2b$. Если полуось эллипса a станем увеличивать неопределенно, то эллипс превратится в параболу. В пределе получим равенство

$$\frac{1}{2}\pi ab = \frac{2}{3}a.2b.$$

Следовательно,

$$\pi = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

35

Принципы построения машины времени. Из землеведения известен тот факт, что судна, совершающие кругосветные путешествия, в известном месте меняют дату (место это находится приблизительно за 180-ым меридианом), т. е. от натуральной последовательности дат отбрасывают один лишний день при движении с запада на восток и, наоборот, прибавляют один день при обратном переходе. Представим себе такой случай, что удалось бы построить столь быстро летящий аппарат, который мог бы облететь один раз вокруг земли в 23 часа. В таком случае летчик, действуя согласно указанному выше правилу, при полете с запада на восток вернулся бы к исходному пункту на один час раньше, чем вылетел. Жаль, что при теперешнем состоянии авиации такой способ не может еще применяться в действительности. К счастью, задачу проникнуть в давно минувшие или будущие времена можно разрешить еще иначе. Отправляются на северный полюс. Если обойти его по направлению с запада на восток, то с каждым оборотом мы будем терять один день, так как при каждом переходе через соответствующее место изменения даты мы один день должны отбросить. Так же, как мы переходим к временам прошедшим, мы можем шагнуть и вперед в будущее: стоит только обходить полюс в противоположном направлении с востока на запад. Если построить аппарат, который создал бы возможность бы-

строго обращения вокруг полюса, то с помощью такого аппарата можно было бы в короткое время вернуть молодость самым старым людям, открылись-бы неожиданные перспективы для истории, и каждый получил-бы возможность бросить взгляд в будущее.

36

Аэроплан имеет собственную скорость в c километров в час. Он летит по ветру, собственная скорость которого v килом. в час, направляясь к городу, отстоящему на l километров. По прибытии туда, он немедленно поворачивает обратно и летит против ветра. Так как замедляющее действие противного ветра на обратном пути равно ускоряющему действию попутного ветра на прямом пути, и так как равны расстояния, на протяжении которых имели влияние ускорение и замедление, то ускоряющее и замедляющее действия ветра взаимно уничтожаются, и поездка туда и обратно потребует $\frac{2l}{c}$ часов. Если, например, $c = 80$ *км*, $l = 600$ *км*, то на поездку будет затрачено 15 часов. Как мы видим, сила ветра v здесь не при чем. Скорость ветра безразлична: воздушный корабль возвратится к месту отхода в 15 часов, ибо опоздание при движении в прямом направлении от противного ветра будет компенсироваться ускорением при обратном движении. Разумеется, мы должны допустить, что во время поездки скорость ветра остается неизменной.

Этот результат показывает, что аэроплан мог-бы вернуться обратно даже в том случае, если бы скорость ветра при поездке туда и обратно равнялась бы собственной скорости аппарата, или, пожалуй, даже превосходила бы ее!

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Ученические ошибки в математике

I. ВВЕДЕНИЕ

Приводимые ниже 50 задач, за немногими исключениями, „действительные“, т. е. они в такой именно форме, как мы их приводим, сдавались мне или моим коллегам учениками в процессе ежедневных занятий или на экзаменах; многие из этих задач предлагались так называемой „общей подготовительной испытательной комиссией“ в Дании, в состав которой я входил, как экзаменатор, в течение многих лет. Грубые ошибки в счете встречаются в этих примерах только в виде исключения. Неправильное понимание и непонимание пройденных теорем наряду с логическими ошибками—таковы недочеты, которые встречаются чаще всего. Нередко все написанное вполне правильно, но не хватает чего-то более или менее существенного, и это делает решение неудовлетворительным; иногда заблуждение вызвано неправильным чертежом. Особого внимания заслуживают отдельные любопытные случаи, где вывод правилен, несмотря на то, что были допущены

серьезные ошибки, друг друга компенсировавшие.

Что касается порядка расположения задач, то первоначально я имел в виду группировать их по родам ошибок; но проведение этого принципа оказалось затруднительным и даже невозможным. Тогда я решил разбить все задачи на 4 группы соответственно их математическому содержанию и внутри каждой группы строго придерживаться такого принципа расположения: на первом плане отсутствие знания, затем отсутствие умения и, наконец, недостаточное мышление. Эта классификация отнюдь не является идеальной; граница между уменьем и правильным рассуждением не всегда может быть строго проведена: в одной и той же задаче могут встретиться ошибки различного рода; в двух из сообщенных стереометрических задач ошибки алгебраического характера. Несмотря на это, принятый порядок расположения материала наиболее удобен, как для автора, так, быть может, и для читателя.

Я убежден, что чрезвычайно полезно ознакомиться с наиболее часто встречающимися при решении задач ошибками. Даже тот, кто в состоянии правильно решить задачу, часто не сразу найдет ошибки в неправильном решении; иногда он сочтет нечто правильное за ошибку, или же ошибочное примет за правильное, или же, умея, быть может, указать ошибки, затрудняется уловить ход мыслей, приведший к этим ошибкам.

Таким образом, я надеюсь дать не только учащим, но и учащимся желательный им материал, ибо очень часто ошибочно решенная задача дает гораздо больше для математического разумения, чем задача, которую сразу удалось решить гладко и правильно.

Затем еще одно замечание: решения задач, как сказано, повторяют с буквальной точностью решения, данные самими учениками. Большинству этих ученических изложений свойственна одна ошибка. Ученики избегают текста и ограничиваются скелетом формул даже в тех случаях, где пояснения неизбежны. Какие из-за этого возникают трудности для понимания, показывают многие из следующих примеров.

II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1

Требуется решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{6}+1}=\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{6}+1}.$$

Решение

$$\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{6x}+\sqrt{x}+4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}+4=$$
$$=\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{6x}+\sqrt{x}-4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}-4;$$
$$8\sqrt{x+1}+8=4\sqrt{6x};\quad 2\sqrt{x+1}=\sqrt{6x}-2;$$
$$4x+4=6x+4-4\sqrt{6x};$$
$$2\sqrt{6x}=x;$$
$$24x=x^2;$$
$$x=24.$$

2

Написать уравнение, оба корня которого на $\frac{1}{2}$ меньше, чем корни уравнения $7x^2-6x+1=0$.

Решение

Пусть α и β будут корнями данного уравнения; тогда корнями нового уравнения будут $\alpha+\frac{1}{2}$ и $\beta+\frac{1}{2}$, и уравнение

$$y^2-\left(\alpha+\frac{1}{2}+\beta+\frac{1}{2}\right)y+\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)=0$$

будет искомым. Но

$$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=1$$

(теоремы о сумме и произведении корней квадратного уравнения); поэтому получим

$$y^2-7y+4\tfrac{1}{4}=0,$$

или

$$4y^2-28y+17=0.$$

3

Дано $x+x\sqrt{2}=1$; требуется найти x.

Решение

$$x\sqrt{2}=1-x;$$
$$2x^2=1+x^2-2x;$$
$$x^2+2x-1=0;$$
$$x=-1\pm\sqrt{2}.$$

4

$x+2\sqrt{x}=3$; требуется найти x.

Решение

$$x+2\sqrt{x}=3,$$

$$\sqrt{x}=-1\pm\sqrt{4}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}1\\9\end{cases}.$$

В силу того, что данное уравнение содержит квадратные корни, необходимо подставить найденные значения. Тогда мы видим, что 1 удовлетворяет уравнению, а 9 есть „посторонний корень“.

5

Из уравнений

$$(a-2)x+(3a-1)y=2a;$$
$$4x-2(a-1)y=-a$$

надо найти x и y. Специально требуется исследовать случаи $a=0$ и $a=-3$.

Решение

Умножим верхнее уравнение на 4, а нижнее на $a-2$. Затем путем вычитания получим:

$$y(2a^2+18a)=a^2+6a,$$

поэтому

$$y=\frac{a(a+6)}{2a(a+3)}=\frac{a+6}{2(a+3)}.$$

Вставляя это выражение в верхнее уравнение имеем:

$$x = \frac{a-3}{2(a+3)}.$$

Если $a = 0$, то $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$.

Если $a = -3$, то $x = -\infty$, $y = \infty$.

6

Из уравнений

(1) $$a^2 x^2 = b^2 y^2$$

(2) $$2 a x^2 = b^2 c y$$

надо отыскать x и y.

Решение

Путем деления получим

$$\frac{a}{2} = \frac{y}{c},$$

или

$$y = \frac{ac}{2}.$$

Вставляя в (2),

$$2 a x^2 = b^2 c \cdot \frac{ac}{2},$$

$$x^2 = \frac{b^2 c^2}{4},$$

$$x = \pm \frac{bc}{2}.$$

Вставляя в (1),

$$a^2 \cdot \frac{b^2 c^2}{4} = b^2 y^2, \quad y^2 = \frac{a^2 c^2}{4}, \quad y = \pm \frac{ac}{2}.$$

7

Решить уравнения

(1) $$x^2 - y^2 = 9,$$
(2) $$2x + 3y = 22.$$

Решение

Из (2)

$$x = \frac{22 - 3y}{2},$$

и, вставляя в (1), имеем:

$$5y^2 - 132y + 448 = 0,$$
$$y = 4 \text{ и } \frac{112}{5}.$$

Вставка в (1):

$$x = \pm 5 \text{ и } x = \pm \frac{113}{5}.$$

8

Ищутся два числа, которых сумма, произведение и сумма квадратов равны между собою.

Решение

Из

$$x + y = xy = x^2 + y^2$$

получим, так как

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$
$$3(x + y) = (x + y)^2,$$
$$x + y = 3,$$

и тогда x и y оказываются корнями уравнения

$$u^2 - 3u + 3 = 0,$$

откуда

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Задача имеет, следовательно, только мнимые решения.

9

Из Скандерборга в Силкеборг [1]) идут 3 поезда: A, B и C. На весь путь поезд A тратит на 10 минут больше, чем B, но 40 минутами меньше, чем C; скорость хода поезда A (путь, пройденный в 1 час) на $6\frac{1}{5}$ километра меньше, чем скорость поезда B, но на $12\frac{2}{5}$ километра больше, чем скорость C. Сколько часов тратит поезд A на всю поездку, и какова его скорость?

Решение

A в пути	$60x$ *мин*,	скорость его	y *клм*,
B „ „	$50x$ „	„	$y + 6\frac{1}{5}$ „
C „ „	$100x$ „	„	$y - 12\frac{2}{5}$ „

В таком случае можно написать уравнения

$$60xy = 50xy + 310x$$

$$y = 31$$

$$xy = (x - \tfrac{1}{6})(y + 6\tfrac{1}{5}),$$

откуда в силу получ. ранее результата

$$x = 1.$$

Искомая скорость равна 31 километру, а продолжительность всей поездки для поезда A равна 1 часу.

---

[1]) Два ютландских городка.

10

Дано

$$\sqrt{x-a^2}+\sqrt{x-b^2}=a-b;$$

требуется найти x. Рассмотреть частный случай $a=b$.

Решение

$$\sqrt{x-a^2}=a-b-\sqrt{x-b^2};$$

$$x-a^2=a^2-2ab+b^2+x-b^2-2(a-b)\sqrt{x-b^2};$$

$$a(b-a)=(b-a)\sqrt{x-b^2};$$

$$a^2=x-b^2;$$

$$x=a^2+b^2.$$

Испытание показывает, что первый квадратный корень надлежит взять отрицательным. В частном случае

$$x=2a^2.$$

11

Из равнений

$$x^2+xy=a^2+ab$$

$$y^2+xy=a^2-ab$$

требуется найти x и y.

Решение

Из данных уравнений получаем путем сложения

$$(x+y)^2=2a^2,$$

$$x+y=a\sqrt{2}.$$

Путем умножения уравнений получаем

$$xy(x+y)^2=a^4-a^2b^2,$$

откуда, с помощью полученного ранее результата, найдем

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Составим тогда квадратное уравнение:

$$z^2 - a\sqrt{2}.z + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0,$$

из которого находим

$$z = \frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{a^2 - b^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Стало быть,

$$x = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \quad \Big| \quad \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} \quad \Big| \quad \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}.$$

12

Составить уравнение, корни которого должны быть квадратами корней уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Какие значения надо приписать коэффициентам a, b, c и d, чтобы оба уравнения совпали?

Решение.

Назовем неизвестную нового уравнения через y, в таком случае

$$x = \pm\sqrt{y}.$$

Вставляя это выражение в данное уравнение, получим уравнение

$$y^2 \pm ay\sqrt{y} + by \pm c\sqrt{y} + d = 0,$$

перенеся $\sqrt{y}$ в отдельную часть уравнения и возведя последнее в квадрат, получим искомое уравнение

$$y^4 + y^3(2b - a^2) + y^2(b^2 + 2d - 2ac) + \\ + y(2bd - c^2) + d^2 = 0.$$

Если оба уравнения совпадают, то

$$x^2 = x,$$

или

$$x = 0 \text{ или } 1.$$

Данное уравнение имеет тогда одну из следующих систем корней

0000; 0001; 0011; 0111; 1111,

и, пользуясь соотношением между корнями и коэффициентами, получим для 5 случаев:

$a = 0$	-1	-2	-3	-4
$b = 0$	0	1	3	6
$c = 0$	0	0	-1	-4
$d = 0$	0	0	0	1.

III. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА ЗА ИСКЛЮЧЕНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

13

а) Упростить выражение

$$\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{\frac{1}{27}}.$$

Решение

$$\sqrt{12}+\sqrt[4]{9}-\sqrt[6]{\frac{1}{27}}=$$

$$=\sqrt[12]{(2^2:3)^6}+\sqrt[12]{(3\cdot 3)^3}-\sqrt[12]{\left(\frac{1}{3^3}\right)^2}$$

$$=2\sqrt[12]{3^6+3^6-\frac{1}{3^6}}=2\sqrt[12]{6^6-\frac{1}{3^6}}$$

$$=2\sqrt[12]{18^6-1}=6\sqrt[12]{2^6-1}$$

$$=6\sqrt[12]{63}.$$

b) Упростить выражение

$$\frac{\sqrt[3]{a^5}+\sqrt[4]{a^7}-\sqrt[5]{a^9}-\sqrt[6]{a^{11}}}{\sqrt[6]{\frac{1}{a}}+\sqrt[5]{\frac{1}{a}}-\sqrt[4]{\frac{1}{a}}-\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}.$$

Решение

$$\frac{\sqrt[3]{a^5}+\sqrt[4]{a^7}-\sqrt[5]{a^9}-\sqrt[6]{a^{11}}}{\sqrt[6]{\frac{1}{a}}+\sqrt[5]{\frac{1}{a}}-\sqrt[4]{\frac{1}{a}}-\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}=\frac{a^2+a^3-a^4-a^5}{\sqrt[11]{\frac{1}{a}}-\sqrt[7]{\frac{1}{a}}}$$

$$=\frac{-a^4}{\sqrt[4]{\frac{1}{a}}}=\frac{-a}{\frac{1}{a}}=-a^2.$$

14

Найти x из уравнения

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}=\frac{13}{6}.$$

Решение

$$\log x \log \frac{2}{3} + \log x \log \frac{3}{2} = \log \frac{13}{6};$$

$$\log x \left(\log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{2}\right) = \log \frac{13}{6};$$

$$\log x \,.\, \log \frac{13}{6} = \log \frac{13}{6};$$

$$\log x = 1;$$

$$x = 10.$$

15

Найти x из уравнения

$$9 \,.\, 12^{\sqrt{x}} = 6^x.$$

Решение

Если положить $\sqrt{x} = y$, то уравнение превратится в

$$9 \,.\, 12^y = 6^{y^2}$$

или

$$9 \,.\, (2 \,.\, 6)^y = [6^y]^2;$$

это уравнение распадается на 2 уравнения:

$$6^y = 0 \text{ и } 9.2^y = 6^y,$$

из которых первое не дает для y никакого конечного значения. Второе преобразовывается следующим образом:

$$9 \,.\, 2^y = 2^y \,.\, 3^y$$

и затем снова распадается на

$$2^y = 0 \text{ и } 9 = 3^y.$$

Первым из этих уравнений, как и раньше, пренебрегаем; из последнего получаем:

$$y = 2, \text{ следовательно } x = 4.$$

16

Из сосуда, содержавшего вначале 2000 литров воды, вытекает через трубу 50 литров в минуту. Сколько воды содержится в сосуде по истечении 1, 2, 3, . . . , x минут? Является ли количество воды в сосуде прямо или обратно пропорциональным времени? Является ли вытекающее количество воды прямо или обратно пропорциональным времени?

Решение

По истечении 1 минуты в сосуде находится $2000 - 50 = 1950$ литров

по истечении 2 минут в сосуде находится $2000 - 2.50 = 1900$ литров

по истечении 3 минут в сосуде находится $2000 - 3.50 = 1850$ литров

по истечении x минут в сосуде находится $2000 - x.50$ литров.

Чем больше прошло времени, тем меньше количество воды в сосуде, т. е. количество воды в сосуде обратно пропорционально времени.

Чем больше времени прошло, тем больше успело вытечь воды из сосуда, т. е. количество воды, вытекающее из сосуда, прямо пропорционально времени.

17

Вычислить с помощью логарифмов величину $x = \sqrt[3]{\log 0{\cdot}3}$.

Решение

$$x = \sqrt[3]{0{\cdot}4771 - 1} = \sqrt[3]{-0{\cdot}5228};$$

$$\log(-x) = \frac{0{\cdot}7184}{3} = 0{\cdot}2395;$$

$$\log x = -0{\cdot}2395 = 0{\cdot}7605 - 1;$$

$$x = 0{\cdot}5761.$$

18

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{13}{6};$$

найти x.

Решение

$$\frac{4^{\log x}}{6^{\log x}} + \frac{9^{\log x}}{6^{\log x}} = \frac{13}{6};$$

чтобы это имело место, должно быть

$$\log x = 1,$$

поэтому

$$x = 10.$$

19

Найти x из уравнения

$$9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^{x}.$$

Решение

Если положить

$$\sqrt{x}=y,$$

то предложенное уравнение изменится в следующее:

$$9 . 12^{y}=6^{y^2}.$$

Если разложить числа 9, 12 и 6 на первоначальных делителей, то после простейших преобразований получим:

$$3^{2+y} . 2^{2y}=2^{y^2} . 3^{y^2}.$$

Так как число только одним способом разлагается на первоначальных множителей, то

$$2+y=y^2; \quad 2y=y^2,$$

или соответственно

$$y=\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}; \; y=\begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}.$$

Так как уравнения должны быть совместны, то пригоден только корень $y=2$. Стало быть,

$$\sqrt{x}=2, \quad x=4.$$

20

Для каких значений a и b выполняется неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2?$$

Решение

$$a^2 + b^2 > 2ab$$
$$a^2 - ab > ab - b^2$$
$$a(a - b) > b(a - b)$$
$$a > b.$$

Неравенство, таким образом, всегда имеет место, если

$$a > b.$$

21

Даны 3 числа

$$t_1 = 2^n . 5^p . 7,$$
$$t_2 = 10^n . 24,$$
$$t_3 = 6^n . 15^p . 20.$$

Требуется найти общий наибольший делитель и общее наименьшее кратное этих чисел; n и p суть целые положительные числа и $n < p$.

Решение

Мы имеем

$$t_1 = 2^n . 5^p . 7,$$
$$t_2 = 2^n . 5^n . 2^3 . 3,$$
$$t_3 = 2^n . 3^n . 5^p . 3^p . 2^2 . 5.$$

Поэтому общ. наиб. дел. $= 5^n . 2^n$, если $n < 3$, и $= 5^n . 2^3$, если $n > 3$.

Затем отыскиваем общ. наиб. дел. для t_3 и уже найденного числа.

Общее наим. кратное найдется путем деле-

ния произведения этих чисел на их общ. наиб. делителя.

22

Доказать, что $n^4 - 1$ делится на 240, где n простое число, большее 5.

Решение

$$240 = 3 . 5 . 2^4;$$

$$n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n + 1)(n - 1).$$

3 будет делителем, потому что $n - 1$, n и $n + 1$ три последовательных числа натурального ряда. Одно из этих чисел должно делиться на 3, но простое число n не может быть кратным числа 3. Число $n^4 - 1$ делится на 5 по теореме Ферма [1]). Число $n^4 - 1$ делится на 2^4 в силу следующих соображений: n дает при делении на 2 остаток 1, поэтому n^4 при делении на 2^4 дает остаток $1^4 = 1$. Если же при делении на 2^4 получаем в остатке 1, то $n^4 - 1$ делится на 2^4.

23

Какие остатки могут получаться при делении $a^3 - a$ на 12 (a положительное целое число)?

---

[1]) Теорема Ферма гласит: при p простом и a целом, не делящемся на p без остатка, число $a^{p-1} - 1$ делится без остатка на p. Эту теорему называют иногда также „малой“ теоремой Ферма в отличие от столь знаменитой в новейшее время „большой теоремы Ферма“ (ср. Матем. библиот. 3 томик).

Решение

Выражение

$$a^3 - a = a(a+1)(a-1)$$

делится на 3, потому что три множителя представляют три последовательных числа в ряду чисел. При делении на 4 число a дает один из остатков 0, 1, 2 или 3; число a^3 дает соответственно остатки 0, 1, 8 или 27, число $a^3 - a$ дает поэтому 0, 0, 6, 24; если же остаток есть 24, то деление возможно; итак, ответ 0 или 6.

24

Если два числа a и b взаимно-простые, то $a+b$ и $a.b$ также взаимно-простые. Это требуется доказать.

Решение

Если число делит произведение ab, то это число необходимо должно делить только одного из множителей, например, множителя a. В таком случае $a+b$ не может делиться на это число, иначе и b делилось бы на a (сумма только в том случае делится на некоторое число, если каждое слагаемое делится на это число), но b не может делиться на a, потому что a и b числа взаимно-простые. Итак $a+b$ не делится ни на какого множителя произведения ab, т. е. $a+b$ и ab числа взаимно-простые.

25

Требуется доказать, что если a и b положительные числа, то по абсолютной величине $a+b$ больше, чем $a-b$.

Решение

Обозначим числовое значение числа t через $|t|$ и будем рассуждать так:

$$|a+b|=|a|+|b|;$$
$$|a|+|b|>|a|-|b|;$$
$$|a|-|b|=|a-b|.$$

Следовательно,

$$|a+b|>|a-b|,$$

что и требовалось доказать.

26

Требуется исследовать, можно ли из неравенств

$$ab>cd \text{ и } ae>cf$$

вывести неравенство

$$bf>ed$$

(все буквы обозначают положительные числа).

Решение

Путем деления

$$\frac{b}{e}>\frac{d}{f},$$

откуда

$$bf>ed.$$

Итак, на поставленный вопрос следует ответить утвердительно.

27

Требуется найти последний член a_n и число членов n геометрической прогрессии, в которой первый член равен a, знаменатель k, а сумма членов b.

Пример 1. $a = k = 3,\ b = 1\,092.$

Пример 2. $a = k = 3,\ b = 10\,000.$

Решение

Пример 1. $$1\,092 = \frac{3 - a_n \cdot 3}{1 - 3};$$

$$a_n = 729;$$

$$729 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n;$$

$$n = 6.$$

Пример 2. $$10\,000 = \frac{3 - a_n \cdot 3}{1 - 3};$$

$$a_n = 6\,667\tfrac{2}{3};$$

$$6\,667\tfrac{2}{3} = 3^n;$$

$$n = \frac{\log 6\,667{\cdot}67}{\log 3} = \frac{3{\cdot}824\,0}{0{\cdot}477\,1} = 8{\cdot}01.$$

28

Первый и четвертый члены геометрической прогрессии соответственно равны 2·1 и —0·016 8; сколько членов ряда надо взять, чтобы составить сумму 1·750 56?

Решение

$$2{\cdot}1 \,.\, q^3 = -0{\cdot}016\,8;$$

дает

$$q = -0{\cdot}2;$$

$$1{\cdot}750\,56 = 2{\cdot}1 \cdot \frac{(-0{\cdot}2)^n - 1}{-0{\cdot}2 - 1},$$

или же

$$(-0{\cdot}2)^n = -0{,}000\,32,$$

откуда

$$n = \frac{\log 0{\cdot}000\,32}{\log 0{\cdot}2} = \frac{0{\cdot}505\,2 - 4}{0{\cdot}301\,0 - 1} = 5 \text{ (приблиз.)}.$$

29

Найти x из уравнения

$$\log (5 + 3x)^2 + \log (5 - 2x)^2 = 4.$$

Решение

$$2 \log (5 + 3x) + 2 \log (5 - 2x) = 4$$

$$\log [(5 + 3x)(5 - 2x)] = 2$$

$$25 + 15x - 10x - 6x^2 = 100$$

$$6x^2 - 5x + 75 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24 \,.\, 75}}{12} = \frac{5 \pm 5\sqrt{71}\sqrt{-1}}{12}.$$

IV. ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

30

Построить выражение

$$x = \sqrt{\frac{(2a^2 - b^2)\sqrt{2}}{3}},$$

где a и b данные отрезки.

Решение

Положим

$$2a^2 - b^2 = y^2$$

и построим y^2, как катет прямоугольного треугольника, в котором $2a$ гипотенуза, а b второй катет. Тогда

$$x = \sqrt{y \cdot \frac{y\sqrt{2}}{3}}.$$

Положим

$$\frac{y\sqrt{2}}{3} = z,$$

так что z будет четвертой пропорциональной величин 3, y и $\sqrt{2}$. Наконец, строим

$$x = \sqrt{yz},$$

как среднюю пропорциональную между y и z.

31

Даны 2 концентрических круга; их радиусы a и b, причем $a > b$. Найти радиус третьего круга, концентрического двум данным, который делит кольцо между двумя данными кругами на два других кольца таким образом, что площадь внешнего кольца вдвое больше площади внутреннего.

Решение

Назовем искомый радиус через x; применяя теорему о площадях подобных фигур, найдем

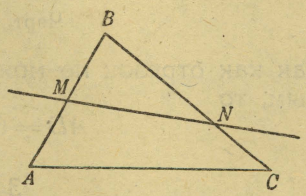
$$\frac{(x-b)^2}{(a-x)^2} = \frac{2}{1},$$

откуда после преобразований имеем:

$$x^2 - 2x(2a - b) + 2a^2 - b^2 = 0,$$
$$x = 2a - b \pm \sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab - 2a^2 + b^2},$$
$$x = 2a - b \pm (a - b)\sqrt{2}.$$

32

Дан треугольник ABC. Провести прямую, пересекающую стороны AB и BC и равноотстоящую от A и B, причем расстояние ее от B вдвое больше ее расстояния от C (черт. 18).



Черт. 18.

Решение

Разделим AB пополам в точке M; BC разделим на 3 равные части, и пусть N ближайшая к C точка деления. Прямая, проходящая через точки M и N, и будет искомая.

33

В треугольнике ABC даны стороны

$$a = 1{\cdot}3 \text{ см}, \; b = 0{\cdot}5 \text{ см}, \; c = 1{\cdot}2 \text{ см}.$$

Биссектриса внешнего угла при B пересекает продолжение AC в D. Найти AD (черт. 19).

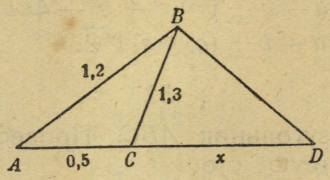
Решение

На основании известной теоремы можно написать

$$\frac{x}{1{\cdot}3} = \frac{x + 0{\cdot}5}{1{\cdot}2} = \frac{0{\cdot}5}{-0{\cdot}1},$$

откуда следует

$$x + 0{\cdot}5 = -6.$$



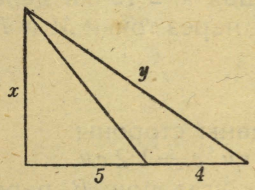
Черт. 19.

Так как отрезок не может быть отрицательным, то

$$AD = 6\ см.$$

34

Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противоположный катет на 2 отрезка длиной в 4 и 5 *см*. Как велики стороны треугольника? (черт. 20)



Черт. 20.

Решение

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4};$$

$$y^2 = x^2 + 81;$$

$$y = \frac{5x}{4}; \quad \frac{25}{16}x^2 = x^2 + 81; \quad \frac{9}{16}x^2 = 81;$$

$$x^2 = \frac{16 \cdot 81}{9} = 144;$$

$$x = 12\ (см); \ y = 15\ (см).$$

35

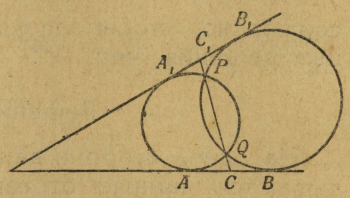
Через середину хорды, соответствующей центральному углу в 120^0, проведена другая хорда; один из ее отрезков втрое больше другого. Что это за хорда?

Решение

Это должен быть диаметр, потому что расстояние хорды от центра равно половине радиуса, так что двумя отрезками проведенной хорды будут $\frac{1}{2}r$ и $\frac{3}{2}r$ (r = радиус круга). Второй отрезок, таким образом, втрое больше первого.

36

Два круга, пересекающие друг друга в P и Q, касаются сторон угла; точки касания одного A и A_1, другого B и B_1, так что A и B лежат на одной и той же стороне угла. Требуется доказать, во 1-х, что продолжения прямой PQ проходят через середины отрезков AB и A_1B_1 и, во 2-х, что AA_1, BB_1 и PQ друг другу параллельны (черт. 21).



Черт. 21.

Решение

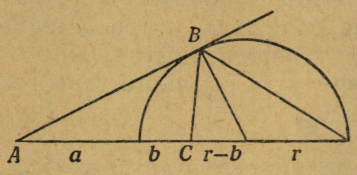
Положим, что PQ пересекает отрезок AB в точке C, а отрезок A_1B_1 — в точке C_1. Теорема о секущей и касательной дает:

$$CA^2 = CP \,.\, CQ = CB^2 \,.$$

Таким образом, C есть середина AB. Таким же приемом найдем, что C_1—середина A_1B_1. AA_1, PQ и BB_1 параллельны друг другу, потому что отсекают равные части на прямых AB и A_1B_1.

37

Построить треугольник по двум отрезкам, на которые биссектриса угла делит противолежащую сторону, и одному из углов, прилежащих к этой стороне. Указать, какое условие должно быть соблюдено, чтобы задача имела два различных решения (черт. 22).



Черт. 22.

Решение

На одной стороне данного угла (A) откладываются данные отрезки a и b. Вершина третьего угла треугольника будет пересечением другой стороны угла с окружностью „круга отношений“ [1]). Если должны существовать два решения, то сторона угла должна пересечь окружность. В том случае, когда они касаются друг друга, мы получим для опреде-

---

[1]) Этот круг есть геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что расстояния каждой из них от точек A и B относятся друг к другу, как $a:b$.

ления радиуса r круга отношения:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+2r}{2r-b},$$

откуда

$$r=\frac{ab}{a-b};$$

таким образом,

$$\sin A=\frac{r}{a+r}=\frac{\frac{ab}{a-b}}{a+\frac{ab}{a-b}}=\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}.$$

Два решения требуют, стало быть, чтобы было

$$\sin A<\frac{b}{a}.$$

Как известно,

$$\sin A<1.$$

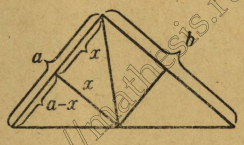
Из этих двух неравенств имеем

$$\frac{b}{a}<1 \text{ или } b<a.$$

Искомое условие сводится, таким образом, к тому, чтобы больший из данных отрезков прилегал к вершине данного угла.

38

В прямоугольном треугольнике даны катеты a и b. В треугольник вписан квадрат, одна из вершин которого совпадает с вершиной прямого угла. Как велика сторона квадрата? (черт. 23)



Черт. 23.

Решение

Диагонали квадрата делят пополам его углы. По известной теореме о биссектрисе угла в треугольнике (см. обозначения на чертеже) имеем:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{p}=\frac{a+b}{m+p}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

отсюда

$$m=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Затем из малого прямоугольного треугольника слева:

$$x^2+(a-x)^2=m^2=\frac{a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2};$$

Если решать это уравнение обычным образом, то найдем для искомой стороны квадрата 2 значения, а именно,

$$x=\frac{ab}{a+b} \text{ и } x=\frac{a^2}{a+b}.$$

39

У двух треугольников стороны соответственно равны a, b, c и a_1, b_1, c_1, их периметры p и p_1. Дано, что

$$\frac{a}{a_1}=\frac{p}{p_1}.$$

Подобны ли эти треугольники?

Решение

Если треугольники подобны, то, как известно,

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1};$$

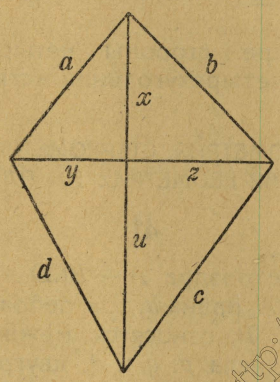
из того, что дано, и на основании известного предложения из учения о пропорциях, получаем

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=\frac{p}{p_1};$$

если же стороны двух треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.

40

В каких описанных четырехугольниках диагонали взаимно перпендикулярны? (черт. 24)



Черт. 24.

Решение

Так как четырехугольник описанный, то (см. обозначения на чертеже),

$$a + c = b + d.$$

Согласно теореме Пифагора

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2 + d^2.$$

Из этих равенств можно получить

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2$$

и

$$a - b = d - c$$

Путем деления

$$a + b = d + c$$

Стало быть $a = d$

и $b = c$

$$a^2 - d^2 = b^2 - c^2$$

и

$$a - d = b - c.$$

Путем деления

$$a + d = b + c$$

Стало быть $a = b$

и $d = c$.

Все четыре стороны четырехугольника равны, т. е. четырехугольник есть ромб.

V. ТРИГОНОМЕТРИЯ, СТЕРЕОМЕТРИЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

41

Высота тетраэдра $A - BCD$, проведенная из вершины A, равна h, три ребра, выходящих из вершины B, относятся между собой, как три данных числа p, q и r, двугранный угол между ABC и DBC есть α; $\sphericalangle ABC = u$ и $\sphericalangle DBC = v$. Требуется найти объем тетраэдра.

Решение

$$AB : BC : BD = p : q : r;$$

$$\frac{AB}{BC \cdot BD} = \frac{p}{qr};$$

$$BC \cdot BD = \frac{AB \cdot qr}{p};$$

$$V = \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} BC \cdot BD \sin v = \frac{1}{6} h \cdot \frac{AB \cdot qr}{p} \sin v;$$

$$AB = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \sin u}; \quad V = \frac{h^3 qr \sin v}{6p \sin\alpha \sin u}.$$

42

Круговой сегмент вращается около оси, которая проходит через центр круга, не пересекая сегмента. Отношение между объемом тела вращения, полученного при полном обороте сегмента, и всей поверхностью названного тела есть $\frac{1}{n}$ радиуса круга. Какое выражение можно получить для определения числа градусов соответствующей дуги? Какие значения можно приписать числу n?

Решение

Пусть r будет радиус, искомое число градусов $2x$, хорда сегмента k, ее расстояние от центра шара ϱ, ее проекция на ось вращения h. Тогда, согласно известным формулам:

$$\frac{\frac{1}{6} \pi h k^2}{2\pi r h + 2\pi \varrho h} = \frac{1}{n} r,$$

или

$$nk^2 = 12r(r + \varrho).$$

Если внести сюда

$$k = 2r \sin x$$

и

$$\varrho = r \cos x,$$

то получим

$$n \,.\, 4r^2 \sin^2 x = 12r^2 (1 + \cos x),$$

или

$$n \sin^2 x = 3 (1 + \cos x),$$

равенство, которое можно переписать так:

$$n \,.\, 4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 3 \,.\, 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

откуда

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2n-3}{2n}},$$

и, наконец,

$$\sin x = \sqrt{\frac{6n-9}{n^2}},$$

Так как $\sin x$ должен быть вещественным, то

$$6n - 9 \geqq 0,$$

стало быть

$$n \geqq \frac{3}{2}.$$

В виду того, что

$$\sin x \leqq 1.$$

должно быть

$$6n - 9 \leqq n^2,$$

или

$$n^2 - 6n + 9 \geqq 0,$$
$$(n-3)^2 \geqq 0,$$
$$n \geqq 3.$$

Ответом на последний вопрос задачи является поэтому

$$n \geqq 3.$$

43

Если развернуть на плоскости кривую поверхность конуса вращения, то мы получим круговой сектор, дуга которого $237{\cdot}77^0$. Требуется вычислить осевой угол.

Решение

Образующая конуса пусть будет s, радиус основания r и половина осевого угла v; в таком случае

$$2\pi r = 237{\cdot}77^0,$$

откуда

$$r = 37{\cdot}85;$$

далее,

$$\frac{237{\cdot}77}{360} . \pi s^2 = \pi . 37{\cdot}85\, r,$$

откуда

$$s = 57{\cdot}31;$$

наконец,

$$\sin v = \frac{37{\cdot}85}{57{\cdot}31},$$

откуда

$$v = 41{\cdot}35^0.$$

44

На прямой расположены три точки A, B, C в определенном порядке; требуется найти аналитическим путем геометрическое место точек, из которых AB и BC видны под одинаковыми углами.

Решение

Оси координат располагаются таким образом, чтобы точки A, B, C и переменная точка P имели соответственно координаты $(0,0)$; $(a, 0)$; $(b, 0)$ и (x, y). Согласно данным требованиям получаем

$$\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x(x-a)}}=\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x-b}}{1+\frac{y^2}{(x-a)(x-b)}}.$$

Если привести дроби к обычному виду и упростить равенство, то получим после сокращения на y:

$$x^2+y^2-2ax+a^2=0;$$

уравнение представляет собою круг.

45

Составить уравнения касательных к кругу

$$(x+1)^2+(y-3)^2=29.$$

в точках, которых абсцисса равна 4. Составить затем уравнение второй степени, представляющее пару этих касательных.

Решение

Если вставить $x = 4$ в уравнение круга, то получим $y = 5$ и $y = 1$; касательная в точке (4,5) имеет в таком случае уравнением

$$5(x+1)+2(y-3)=29^2,$$

или

$$5x+2y=842.$$

Касательная в точке (4,1) выражается уравнением

$$5(x+1)-2(y-3)=29^2,$$

или

$$5x-2y=830.$$

Уравнение пары касательных получится перемножением уравнений отдельных касательных; оно будет, следовательно,

$$(5x+2y)(5x-2y)=842 \cdot 830,$$

или

$$25x^2-4y^2=698\,950.$$

46

Найти x из уравнения

$$\operatorname{tang} 2x = \operatorname{cotg}[\operatorname{tang}(\log 7)].$$

Решение

$$2x = \operatorname{cotg}(\log 7) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tang}(\log 7)} = \frac{1}{\operatorname{tang} 48{\cdot}42^0} = \frac{1}{0{\cdot}052} = 19{\cdot}23.$$

$$x = 9{\cdot}615.$$

47

Даны стороны треугольника a, b, c. Выразить с помощью этих величин $\sin A$.

Решение

Как известно, имеем соотношение

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

В пропорции мы имеем право перемещать средние члены; тогда получим:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

стало быть

$$\sin A = \frac{ac}{b}.$$

48

Надо доказать формулы

$$r = s \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2}$$

и

$$R = \frac{s}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

где буквенные выражения имеют обычное значение (в Дании).[1])

---

[1]) A, B, C—углы треугольника, s—полупериметр, r и R радиусы вписанного и описанного кругов.

Решение

Деля первое равенство на второе, получим

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Это же соотношение получается путем деления известных формул

$$R = \frac{a}{2 \sin A}$$

и

$$r = a \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Значит обе формулы справедливы.

49

Какому условию должны удовлетворять α, β и γ, если

$$\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha . \operatorname{tang} \beta . \operatorname{tang} \gamma?$$

Решение.

Данное равенство может быть преобразовано в такое

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} \gamma}{1 - \operatorname{tang} \beta . \operatorname{tang} \gamma} = - \operatorname{tang} (\beta + \gamma);$$

таким же путем получаем

$$\operatorname{tang} \beta = - \operatorname{tang} (\alpha + \gamma)$$

и

$$\operatorname{tang} \gamma = - \operatorname{tang} (\alpha + \beta).$$

Вставляя значения для $\operatorname{tang}\beta$ и $\operatorname{tang}\gamma$ в выражение для $\operatorname{tang}\alpha$, получим

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang}(\alpha+\gamma)+\operatorname{tang}(\alpha+\beta)}{1-\operatorname{tang}(\alpha+\gamma)\operatorname{tang}(\alpha+\beta)} =$$
$$= \operatorname{tang}(2\alpha+\beta+\gamma) = -\operatorname{tang}(\beta+\gamma)$$

(согласно с вышеприведенным равенством). Таким образом,

$$2\alpha+\beta+\gamma = p\pi+\pi-\beta-\gamma,$$

то есть,

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}(p+1).$$

50

Найти [1])

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}3x+\operatorname{tang}5x}{\operatorname{tang}x}.$$

Решение

Если $x=\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tang}3x = \operatorname{tang}5x = \operatorname{tang}x,$$

и, стало быть, искомый предел

$$\frac{2\operatorname{tang}x}{\operatorname{tang}x} = 2.$$

---

[1]) Задача была предложена ученикам, которые прошли уже дифференциальное исчисление.

75 =

СКЛАД ИЗДАНИЯ
Одесское Отд.
Госизд. Украины
Пушкинская, № 1