# С. РОУ

# ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ съ кускомъ бумаги

MATHESIS

Одесса 1910

Владимир

Sundara Row

# ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ

## съ кускомъ бумаги

[illegible] 7.III.1948 г.

СУНДАРА РОУ

# ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ

## съ кускомъ бумаги

Пер. съ англійскаго

Съ 87 рисунками и чертежами

MATHESIS



Одесса 1910

Тип. Ю.-Р. О-ва
Печатнаго Дѣла.
Одесса, Пушкин-
ская 18, 1910

# Содержаніе

| | Стр. |
|---|---|
| Введеніе | I |
| I. Квадратъ | 1 |
| II. Равносторонній треугольникъ | 10 |
| III. Квадраты и прямоугольники | 16 |
| IV. Пятиугольникъ | 34 |
| V. Шестиугольникъ | 40 |
| VI. Восьмиугольникъ | 45 |
| VII. Девятиугольникъ | 51 |
| VIII. 10угольникъ и 12угольникъ | 53 |
| IX. Пятнадцатиугольникъ | 56 |
| X. Ряды | 58 |
| XI. Многоугольники | 75 |
| XII. Общія начала | 93 |
| XIII. Коническія сѣченія | |
| Отдѣленіе I. Кругъ | 117 |
| Отдѣленіе II. Парабола | 133 |
| Отдѣленіе III. Эллипсъ | 139 |
| Отдѣленіе IV. Гипербола | 146 |
| XIV. Различныя кривыя | 152 |

# Введеніе

1. *Идея* этой книги была внушена мнѣ упражненіемъ No. VIII. Фребелевскаго дѣтскаго сада —складываніемъ бумаги. Для этого упражненія дѣтямъ даютъ сотни двѣ различно окрашенныхъ бумажныхъ квадратовъ, ножъ для разглаживанія бумаги и наставленія для складыванія. Бумага съ одной стороны окрашена и глазирована. Но она, конечно, можетъ быть прокрашена насквозь и одинакова съ обѣихъ сторонъ. Да и всякая бумага умѣренной толщины будетъ годиться для нашей цѣли. На цвѣтной бумагѣ, однако, сгибы будутъ виднѣе и она пріятнѣй для глазъ. Упражненія для дѣтскихъ садовъ продаются во всѣхъ складахъ учебныхъ пособій, а цвѣтную бумагу обоихъ указанныхъ сортовъ можно имѣть въ каждомъ писчебумажномъ магазинѣ. Изъ всякаго листа бумаги можно получить квадратъ, какъ указано въ первыхъ параграфахъ этой книги, но полезно и удобно имѣть квадраты уже заготовленными заранѣе, въ нарѣзанномъ видѣ.

*2.* Для этихъ упражненій не требуется чертежныхъ инструментовъ и единственными необходимыми вещами являются перочинный ножъ и полоски бумаги—послѣднія для откладыванія равныхъ длинъ. Сами квадраты замѣняютъ обыкновенную прямую и Т-образную линейку.

*3.* При складываніи бумаги нѣкоторые важные геометрическіе пріемы можно выполнять гораздо легче, чѣмъ при помощи циркуля и линейки, единственныхъ инструментовъ, примѣненіе которыхъ освящено Евклидовой геометріей. Примѣрами могутъ служить дѣленіе отрѣзковъ и угловъ на двѣ или на большее число равныхъ частей, проведеніе перпендикуляровъ къ прямымъ или линій, параллельныхъ даннымъ. Зато при помощи складыванія бумаги нельзя описать окружность, хотя извѣстное число точекъ круга, а также и другихъ кривыхъ, можно получить различными способами. Настоящія упражненія состоятъ не просто въ черченіи геометрическихъ фигуръ, обыкновенно съ прямыми линіями, и въ сгибаніи по нимъ, но требуютъ осмысленнаго приложенія простыхъ пріемовъ, гдѣ складываніе бумаги особенно удобно. Это будетъ ясно съ самаго начала книги.

*4.* Эти упражненія дѣтскихъ садовъ не только даютъ интересное занятіе мальчикамъ и дѣвочкамъ, но подготовляютъ ихъ умъ къ надлежащей оцѣнкѣ науки и искусства. Съ другой стороны, связавъ дальнѣйшее обученіе наукѣ и искусству съ занятіями въ дѣтскомъ саду, можно сдѣлать ихъ болѣе интересными и заложить для нихъ болѣе прочное основаніе. Это особенно примѣнимо къ геометріи, лежащей въ основѣ всякой науки и искусства. Широко пользуясь упражненіями дѣтскихъ садовъ, можно сдѣлать школьное изученіе геометріи на плоскости очень интереснымъ. Было бы совершенно правильно требовать отъ учениковъ складыванія этихъ чертежей на бумагѣ. Это давало бы имъ отчетливыя и точныя фигуры и невольно запечатлѣвало бы въ ихъ умахъ истины предложеній. Ни одного утвержденія не приходилось бы принимать на вѣру. Что теперь должны создавать воображеніе и идеализація плохихъ чертежей, то можно видѣть конкретно. Тогда была бы невозможна ошибка вродѣ нижеслѣдующей.

5. *Доказать, что всякій треугольникъ есть равнобедренный.* Пусть $ABC$, рис. 1, будетъ какой-нибудь треугольникъ. Раздѣлите $AB$ въ $Z$ пополамъ и чрезъ $Z$ проведите $ZO$ перпендикулярно къ $AB$. Раздѣлите уголъ $ACB$ линіей $CO$ пополамъ.

1) Если $CO$ и $ZO$ не встрѣчаются, онѣ параллельны. Значитъ, $CO$ перпендикулярно къ $AB$. Поэтому $AC = BC$.

2) Пусть $CO$ и $ZO$ встрѣчаются въ какой-нибудь точкѣ $O$. Проведите $OX$ перпендикулярно

къ $BC$ и $OY$ перпендикулярно къ $AC$. Соедините $OA$, $OB$. Согласно I, 26 Евклида треугольники $YOC$ и $XOC$ при наложеніи совпадаютъ; согласно I, 47 и I, 8 Евклида треугольники $AOY$ и $BOX$ также при наложеніи совпадаютъ. Слѣдовательно,

$$AY + YC = BX + XC,$$

т. е. $AC = BC$.

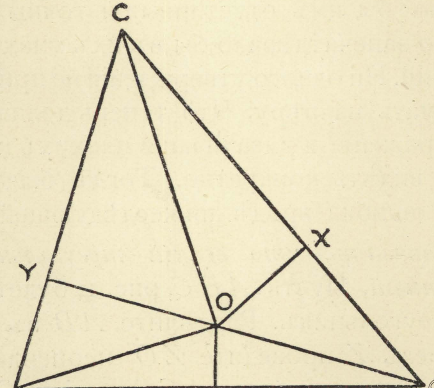


Рис. 1

Рис. 2 при помощи складыванія бумаги показываетъ, что, каковъ бы ни былъ взятый треугольникъ, $CO$ и $ZO$ не могутъ встрѣчаться внутри него.

*O* есть средина дуги *AOB* круга, описаннаго около треугольника *ABC*.

*6*. Складываніе бумаги не совсѣмъ чуждо намъ. Складываніе бумажныхъ квадратовъ въ видѣ различныхъ предметовъ--лодочки, двойной

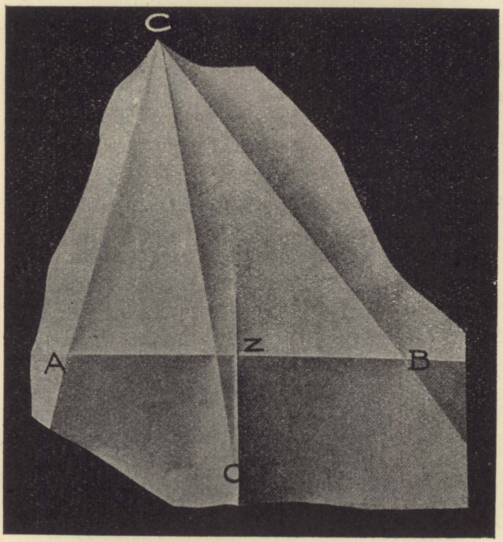


Рис. 2

лодочки, чернильницы, пѣтушка и т. п. хорошо извѣстно, какъ и вырѣзываніе бумаги въ симметричныхъ формахъ для украшеній. При письмѣ на санскритскомъ или маратскомъ языкахъ бумага складывается вертикально или горизонтально, чтобы строки и столбцы выходили прямыми. При перепискѣ бумагъ въ канцеляріяхъ дѣлаютъ правильныя поля, сгибая бумагу по вертикали. Вдвое сложенные прямоугольные куски бумаги всегда были въ употребленіи для письма и до введенія обрѣзанной на машинѣ почтовой бумаги и конвертовъ разныхъ величинъ листы желаемаго размѣра получались при помощи складыванія и разрыванія бо́льшихъ листовъ; одна половина бумаги складывалась въ конвертъ для другой половины. Послѣдній пріемъ сберегалъ бумагу и обладалъ очевиднымъ преимуществомъ прикрѣпленія почтовыхъ знаковъ непосредственно къ самой писанной бумагѣ. Къ складыванію бумаги прибѣгали и при изученіи XI книги Евклида, трактующей о фигурахъ трехъ измѣреній. Но имъ рѣдко пользовались для плоскихъ фигуръ.

7. Я не пытался написать полный трактатъ или руководство геометріи а старался лишь показать, какимъ образомъ можно сложить или опредѣлить точками на бумагѣ правильные многоугольники, круги и другія кривыя. Я пользовался случаемъ представить читателю нѣкоторыя хорошо извѣстныя задачи древней и современной геометріи и показать, какъ къ геометріи можно съ выгодой прилагать алгебру и тригонометрію; а это освѣщаетъ каждый изъ этихъ предметовъ, обыкновенно предлагаемыхъ отдѣльно.

*8.* Первыя девять главъ говорятъ о складываніи правильныхъ многоугольниковъ, разсматриваемыхъ въ первыхъ четырехъ книгахъ Евклида, и девятиугольника. Въ основу былъ положенъ бумажный квадратъ дѣтскаго сада и при его помощи разрабатывались другіе правильные многоугольники. Глава I показываетъ, какъ нужно дѣлить основной квадратъ и какъ можно складывать его въ равные прямоугольные равнобедренные треугольники и въ квадраты. Глава II занимается равносторонними треугольниками, построенными на одной изъ сторонъ квадрата. Глава III посвящена Пиѳагоровой теоремѣ, предложеніямъ второй книги Евклида и нѣкоторымъ интереснымъ задачамъ, связаннымъ съ ними. Здѣсь также показывается, какимъ образомъ на данномъ основаніи можно построить прямоугольный треугольникъ съ заданной высотой. Это сводится къ нахожденію точекъ на нѣкоторомъ кругѣ даннаго діаметра.

*9.* Глава X трактуетъ объ ариѳметической, геометрической и гармонической пропорціи и о суммованіи нѣкоторыхъ ариѳметическихъ прогрессій. Говоря о пропорціяхъ, мы беремъ отрѣзки, длины которыхъ представляютъ возрастающую прогрессію. Прямоугольный кусокъ бумаги, расчерченный на квадратики, даетъ примѣръ ариѳметической прогрессіи. Для геометрической пропорціи мы пользуемся тѣми свойствами прямоугольнаго треугольника, что перпендикуляръ изъ вершины прямого угла на гипотенузу есть среднее геометрическое между отрѣзками гипотенузы и что каждый изъ катетовъ есть среднее геометрическое между проекціей катета на гипотенузу и всей гипотенузой. Въ связи съ этимъ излагается и Делосская задача объ удвоеніи куба. Въ вопросѣ о гармонической пропорціи прилагается свойство биссекторовъ внутренняго и соотвѣтственнаго внѣшняго угловъ треугольника дѣлить противоположную сторону въ отношеніи двухъ другихъ сторонъ треугольника. Это даетъ интересный способъ графическаго поясненія инволюціонныхъ системъ. Суммы натуральныхъ чиселъ и ихъ кубовъ получаются графически и отсюда выводятся суммы нѣкоторыхъ другихъ рядовъ.

*10.* Въ главѣ XI трактуется общая теорія правильныхъ многоугольниковъ и опредѣленіе числовой величины $\pi$. Предложенія этой главы очень интересны.

*11.* Глава XII излагаетъ нѣкоторыя общія начала, прилагавшіяся въ предшествующихъ главахъ,—она касается равенства, симметріи и подобія фигуръ, пересѣченія прямыхъ линій и коллинеарности точекъ.

*12.* Главы XIII и XIV заняты коническими сѣченіями и другими интересными кривыми. Между другими свойствами круга излагаются его гармоническія свойства. Объясняются также теоріи инверсіи и соосныхъ круговъ. Въ отношеніи другихъ кривыхъ показывается, какимъ образомъ при помощи складыванія можно намѣчать на бумагѣ ихъ точки. Дается исторія нѣкоторыхъ изъ кривыхъ и показывается ихъ приложеніе къ рѣшенію классическихъ задачъ нахожденія двухъ геометрическихъ среднихъ для двухъ данныхъ отрѣзковъ и дѣленія даннаго плоскаго угла на три равныя части. Хотя изслѣдованіе свойствъ этихъ кривыхъ требуетъ болѣе глубокаго знанія математики, но ихъ полученіе легко понятно и интересно.

*13.* Я старался не только помочь изученію геометріи въ школахъ, но и доставить математическое развлеченіе старому и малому въ привлекательной и доступной формѣ. „Старые" вродѣ меня найдутъ, можетъ быть, эту книгу полезной для того, чтобы воскресить въ памяти старые уроки и взглянуть на современное развитіе того, и очень интереснаго и поучительнаго, чѣмъ пренебрегли университетскіе преподаватели.

*Т. Сундара Роу.*

Мадрасъ, Индія, 1893.

## I. Квадратъ

**1.** Верхняя сторона куска бумаги, лежащей на ровномъ столѣ, есть плоская поверхность; плоскую поверхность представляетъ и нижняя сторона ея, касающаяся стола.

**2.** Эти двѣ поверхности раздѣлены веществомъ бумаги. Такъ какъ вещество это очень тонко, то другія стороны бумаги не представляютъ замѣтной поверхности и практически являются линіями. Эти двѣ поверхности, хотя и различны, неотдѣлимы другъ отъ друга.

**3.** Взгляните на кусокъ бумаги неправильной формы, показанный на рис. 3, и на эту страницу въ формѣ прямоугольника. Попробуемъ дать первому форму послѣдней.

**4.** Положите кусокъ бумаги неправильной формы на столъ и сложите его вдвое. Пусть полученный такимъ образомъ сгибъ будетъ $X' X$. Это прямая линія. Теперь проведите ножомъ по сгибу и отдѣлите меньшую часть куска. Мы получимъ такимъ образомъ прямолинейный край.

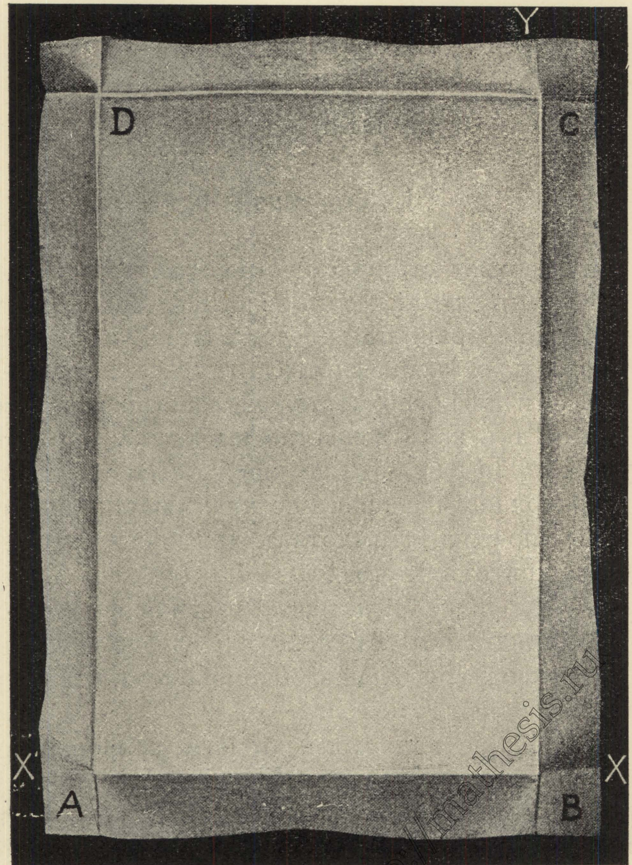


Рис. 3

**5.** Снова, какъ раньше, сложите бумагу по линіи $BY$ такъ, чтобы край $X'X$ накладывался на себя. Развернувъ бумагу, мы видимъ, что сгибъ $BY$ идетъ подъ прямымъ угломъ къ краю $X'X$. Изъ наложенія очевидно, что уголъ $YBX'$ равенъ углу $XBY$ и что каждый изъ этихъ угловъ равенъ углу страницы. Теперь, какъ раньше, проведите ножомъ по второй складкѣ и удалите меньшую часть.

**6.** Повторите указанный пріемъ и образуйте края $CD$ и $DA$. Изъ наложенія очевидно, что углы при $A$, $B$, $C$, $D$ суть прямые, равные другъ другу, и что стороны $BC$, $CD$ соотвѣтственно равны сторонамъ $DA$, $AB$. Этотъ кусокъ бумаги (рис. 3) по формѣ подобенъ этой страницѣ.

**7.** Его можно сдѣлать равнымъ страницѣ по величинѣ, взявъ большій кусокъ бумаги и отмѣривъ $AB$ и $BC$ равными сторонамъ послѣдней.

**8.** Такая фигура называется прямоугольникомъ. Наложеніе показываетъ, что 1) ея четыре угла суть прямые и равные, 2) четыре стороны не всѣ равны, но 3) двѣ длинныя стороны равны между собой, а двѣ короткія между собой.

**9.** Теперь возьмите прямоугольный кусокъ бумаги $A'B'CD$ и сложите его наискось такъ, чтобы одна изъ короткихъ сторонъ, $CD$, легла на одну изъ длинныхъ, $DA'$, какъ на рис. 4. Теперь сложите и удалите часть $A'B'BA$, которая выдается. Развернувъ листъ, вы найдете, что $ABCD$ теперь есть квадратъ, т. е. четыре угла полученной фигуры суть прямые и всѣ ея стороны равны

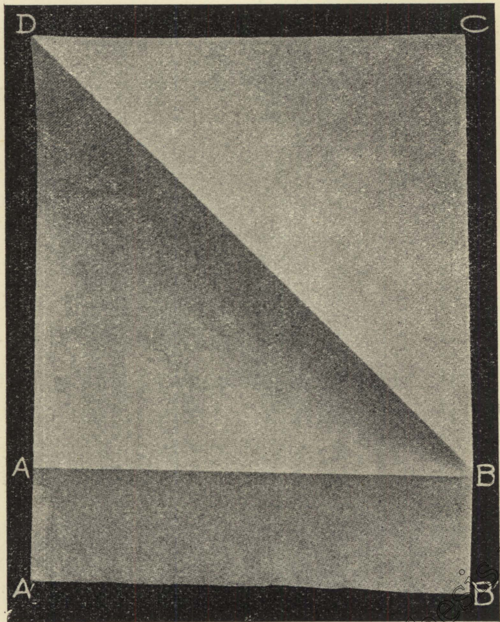


Рис. 4

**10.** Ребро сгиба, проходящее черезъ два противоположныхъ угла $B$, $D$, есть діагональ этого квадрата. Другая діагональ получится, если сложить квадратъ черезъ другую пару угловъ, какъ на рис. 5.

**11.** Мы видимъ, что діагонали пересѣкаются другъ съ другомъ подъ прямыми углами и что онѣ взаимно дѣлятся пополамъ.

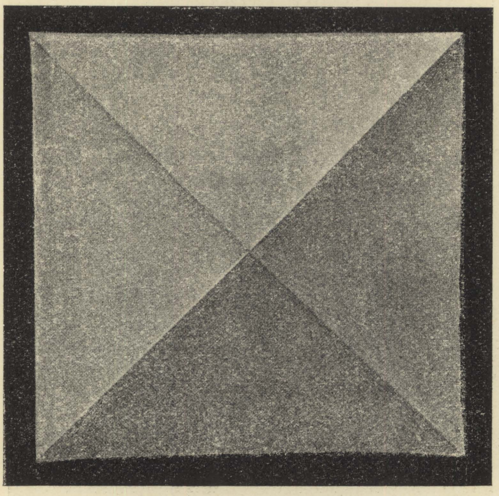

Рис. 5

**12.** Точка пересѣченія діагоналей называется центромъ квадрата.

**13.** Каждая діагональ дѣлитъ квадратъ на два совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ равнобедренныхъ треугольника, вершины которыхъ лежатъ въ противоположныхъ углахъ квадрата.

**14.** Двѣ діагонали вмѣстѣ раздѣляютъ квадратъ на четыре совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ равнобедренныхъ треугольника съ вершинами въ центрѣ квадрата.

**15.** Теперь снова сложите бумагу, какъ на рис. 6, наложивъ одну сторону квадрата на про-

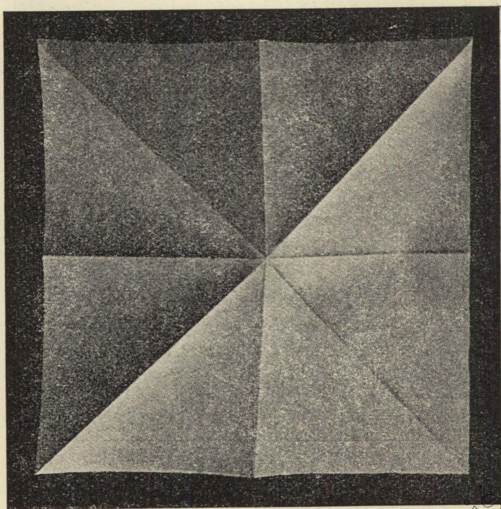

Рис 6

тивоположную ей. Мы получимъ сгибъ, проходящій чрезъ центръ квадрата. Онъ перпендикуляренъ къ другимъ сторонамъ и 1) дѣлитъ ихъ пополамъ, 2) параллеленъ также первымъ двумъ сторонамъ,

3) самъ дѣлится центромъ пополамъ, 4) дѣлитъ квадратъ на два совпадающихъ при наложенiи прямоугольника, изъ которыхъ каждый есть, слѣдовательно, половина перваго; 5) каждый изъ этихъ прямоугольниковъ равновеликъ одному изъ треугольниковъ, на которые квадратъ дѣлится каждой дiагональю.

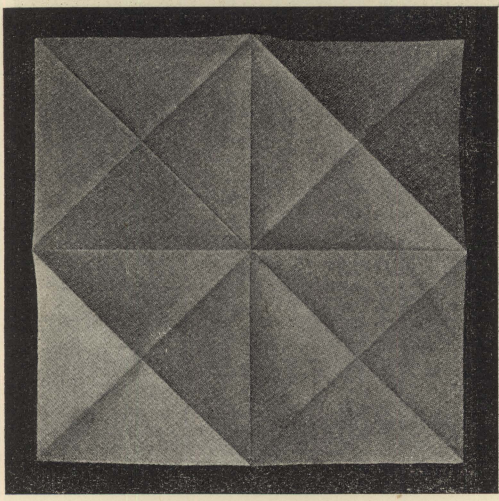

Рис. 7

**16.** Еще разъ сложимъ квадратъ, налагая другъ на друга двѣ другiя стороны. Получающiйся теперь и упомянутый въ § 15 сгибы дѣлятъ квадратъ на четыре совпадающихъ при наложенiи квадрата.

**17.** Снова сложивъ чрезъ тѣ углы меньшихъ квадратовъ, которые лежатъ на срединахъ сторонъ бо́льшаго квадрата, мы получаемъ квадратъ, вписанный въ предыдущій (рис. 7).

**18.** Этотъ квадратъ равенъ половинѣ большого и имѣетъ тотъ же центръ.

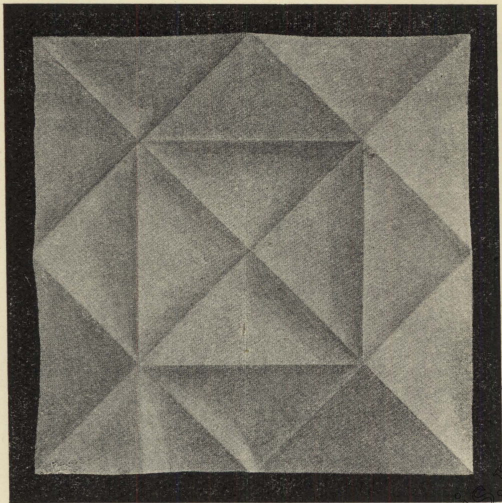

Рис. 8

**19.** Соединивъ средины сторонъ внутренняго квадрата, мы получимъ квадратъ, равный четверти первоначальнаго (рис. 8). Повторяя этотъ пріемъ, мы можемъ получить сколько угодно квадратовъ, относящихся другъ къ другу, какъ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \text{ и т. д., или } \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$$

Каждый такой квадратъ равенъ половинѣ ближайшаго бо́льшаго, т. е. четыре треугольника, остающіеся отъ этого бо́льшаго, вмѣстѣ равны половинѣ его. Сумма всѣхъ этихъ треугольниковъ, какъ бы мы ни увеличивали число ихъ, не можетъ быть больше первоначальнаго квадрата и въ концѣ концовъ составитъ его весь.

Слѣдовательно,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+ \text{ и т. д. до безконечности} = 1.$$

**20.** Центръ квадрата есть центръ его описаннаго и вписаннаго круговъ. Послѣдній кругъ касается сторонъ въ ихъ срединахъ, такъ какъ онѣ ближе къ центру, чѣмъ всякія другія точки на сторонахъ.

**21.** Всякій сгибъ чрезъ центръ квадрата дѣлитъ его на двѣ совпадающія при наложеніи трапеціи. Второй сгибъ чрезъ центръ, подъ прямыми углами къ первому, раздѣляетъ его на четыре совпадающихъ при наложеніи четереугольника, у которыхъ два противоположныхъ угла суть прямые. Эти четыреугольники концикличны, т. е. вершины каждаго лежатъ на одной окружности.

## II. Равносторонній треугольникъ

**22.** Теперь возьмите квадратный кусокъ бумаги (рис. 9) и сложите его вдвое, налагая два проти-

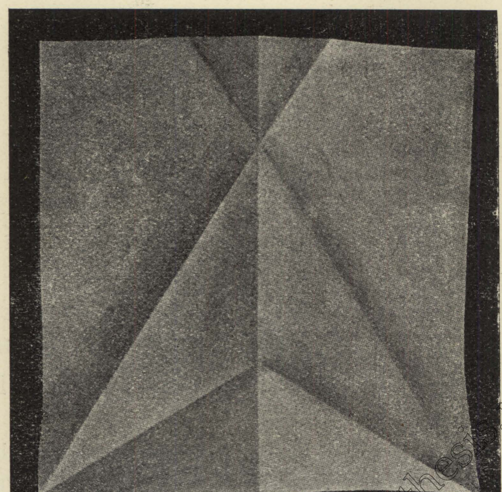

Рис. 9

воположные края одинъ на другой. Мы получаемъ сгибъ, проходящій чрезъ средины двухъ другихъ сторонъ и перпендикулярный къ этимъ сторонамъ. Взявъ какую-нибудь точку на этой линіи, сложите чрезъ нее и два сосѣднихъ, по обѣ стороны отъ нея, угла квадрата. Мы получимъ такимъ образомъ равнобедренный треугольникъ, въ основаніи котораго лежитъ сторона квадрата.

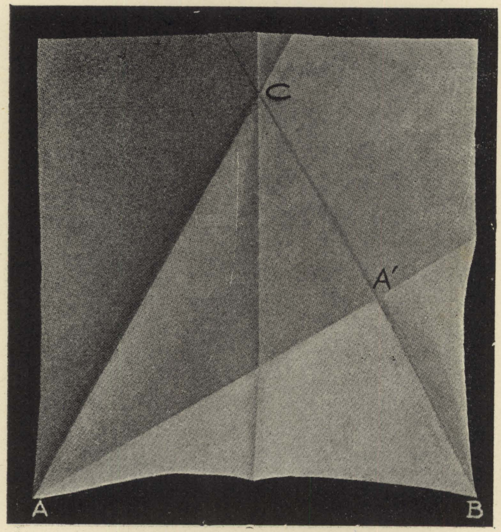


Рис. 10

**23.** Средняя линія раздѣляетъ равнобедренный треугольникъ на два совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ треугольника.

**24.** Уголъ при вершинѣ дѣлится пополамъ.

**25.** Если мы возьмемъ на средней линіи такую точку, разстоянія которой отъ двухъ угловъ квадрата равны его сторонѣ, мы получимъ равносторонній треугольникъ (рис. 10). Эту точку легко опредѣлить, повертывая надъ $AA'$ основаніе $AB$ около одного изъ его концовъ, пока другой конецъ, $B$, не упадетъ на среднюю линію, въ $C$.

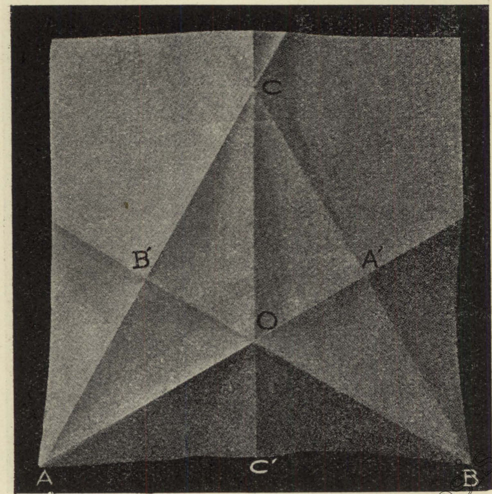


Рис. 11

**26.** Сложите равносторонній треугольникъ, накладывая каждую изъ сторонъ на основаніе. Мы получимъ такимъ образомъ три высоты этого треугольника, именно $AA'$, $BB'$, $CC'$ (рис. 11).

**27.** Каждая изъ высотъ раздѣляетъ треугольникъ на два совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ треугольника.

**28.** Онѣ дѣлятъ стороны пополамъ и перпендикулярны къ нимъ.

**29.** Онѣ проходятъ чрезъ одну общую точку.

**30.** Пусть высоты $AA'$ и $CC'$ встрѣчаются въ $O$. Проведемъ $BO$ и продолжимъ ее до встрѣчи съ $AC$ въ $B'$. Теперь докажемъ, что $BB'$ есть третья высота. Изъ треугольниковъ $C'OA$ и $COA$, $OC' = OA'$. Изъ треугольниковъ $OC'B$ и $A'OB$, $\angle OBC' = \angle A'BO$. Затѣмъ изъ треугольниковъ $ABB'$ и $CB'B$ слѣдуетъ, что $\angle AB'B = \angle BB'C$, т. е. каждый изъ нихъ есть прямой уголъ. Значитъ, $BOB'$ есть высота равносторонняго треугольника $ABC$. Она также дѣлитъ $AC$ пополамъ въ $B'$.

**31.** Можно, сходно съ предыдущимъ, показать, что $OA$, $OB$ и $OC$ равны и что также равны $OA'$, $OB'$ и $OC$.

**32.** Поэтому изъ $O$, какъ центра, можно описать окружности, которыя пройдутъ соотвѣтственно чрезъ $A$, $B$ и $C$ и чрезъ $A'$, $B'$ и $C'$. Послѣдній кругъ касается сторонъ треугольника.

**33.** Равносторонній треугольникъ $ABC$ дѣлится на шесть совпадающихъ при наложеніи прямоугольныхъ треугольниковъ, углы которыхъ при точкѣ $O$ всѣ равны, и на три совпадающихъ при наложеніи, симметричныхъ, конциклическихъ четыреугольника.

**34.** Треугольникъ $AOC$ равенъ удвоенному треугольнику $A'OC$; отсюда $AO = 2\,OA'$. Аналогично, $BO = 2\,OB'$ и $CO = 2\,OC'$. Значитъ, радіусъ круга, описаннаго около треугольника $ABC$, вдвое больше радіуса вписаннаго круга.

**35.** Прямой уголъ $A$ квадрата дѣлится линіями $AO$, $AC$ на три равныя части. Уголъ $BAC = \frac{2}{3}$ прямого угла. Углы $C'AO$ и $OAB'$ равны $\frac{1}{3}$ прямого угла каждый. То же относится къ угламъ при $B$ и $C$.

**36.** Шесть угловъ при $O$ равны $\frac{2}{3}$ прямого каждый.

**37.** Перегните бумагу по линіямъ $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ (рис. 12). Въ такомъ случаѣ $A'B'C'$ есть равносторонній треугольникъ. Онъ равенъ четверти треугольника $ABC$.

**38.** $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ параллельны соотвѣтственно $AB$, $BC$, $CA$ и равны половинамъ ихъ.

**39.** $AC'$, $A'B'$ есть ромбъ. $C'BA'B'$ и $CB'C'A'$ также.

**40.** $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ дѣлятъ соотвѣтственныя высоты пополамъ.

**41.** $CC'^2 + AC'^2 = CC'^2 + \frac{1}{4}AC^2 = AC^2$, слѣдовательно, $CC'^2 = \frac{3}{4}AC^2$ и потому $CC' = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot AC = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot AB =$
$= 0{\cdot}866\ldots \times AB.$

**42.** $\triangle ABC =$ прямоугольнику со сторонами, равными $AC'$ и $CC'$, т. е. $\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}\sqrt{3}.AB =$
$= \frac{1}{4}\sqrt{3}.AB^2 = 0{\cdot}433\ldots \times AB^2$.

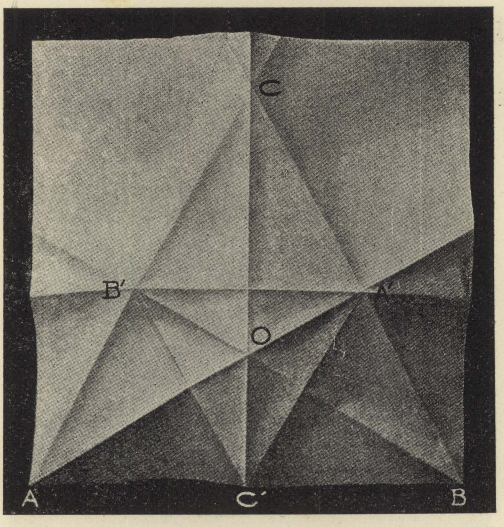


Рис 12

**43.** Углы треугольника $AC'C$ относятся между собою, какъ $1:2:3$, а ихъ стороны, какъ $\sqrt{1}:\sqrt{3}:\sqrt{4}$.

## III. Квадраты и прямоугольники

**44.** Сложите данный квадратъ, какъ указано на рис. 13. Это дастъ хорошо извѣстное доказа-

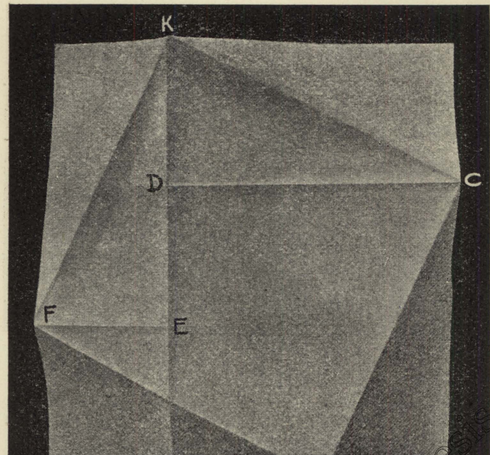


Рис. 13

тельство Пиѳагоровой теоремы. Такъ какъ $FGH$ есть прямоугольный треугольникъ, то квадратъ, построенный на $FH$, равенъ суммѣ квадратовъ на $FG$ и $GH$.

$$\square FA + \square DB = \square FC.$$

Легко видѣть, что $FC$ есть квадратъ и что треугольники $FGH$, $HBC$, $KDC$ и $FEK$ при наложеніи совпадаютъ.

Если треугольники $FGH$ и $HBC$ отрѣзать отъ квадратовъ $FA$ и $DB$ и помѣстить на другіе два треугольника, то составится квадратъ $FHCK$.

Если $AB = a$, $GA = b$ и $FH = c$, то $a^2 + b^2 = c^2$.

**45.** Сложите данный квадратъ согласно рис. 14. Здѣсь прямоугольники $AF$, $BG$, $CH$ и $DE$ при наложеніи совпадаютъ, какъ и треугольники, изъ которыхъ они составлены. $EFGH$ есть квадратъ, какъ и $KLMN$.

Пусть $AK = a$, $KB = b$ и $NK = c$, въ такомъ случаѣ $a^2 + b^2 = c^2$, т. е. $\square KLMN$.

$$\square ABCD = (a + b)^2.$$

Но квадратъ $ABCD$ превышаетъ квадратъ $KLMN$ четырьмя треугольниками $AKN$, $BLK$, $CML$ и $DNM$.

А эти четыре треугольника вмѣстѣ равны двумъ прямоугольникамъ, т. е. $2ab$.

Значитъ, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

**46.** $EF = a - b$ и $\square EFGH = (a-b)^2$.

Квадратъ $EFGH$ меньше квадрата $KLMN$ четырьмя треугольниками $FNK$, $GKL$, $HLM$ и $EMN$.

Но эти четыре треугольника составляютъ два прямоугольника, т. е. $2ab$.

Слѣдовательно, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

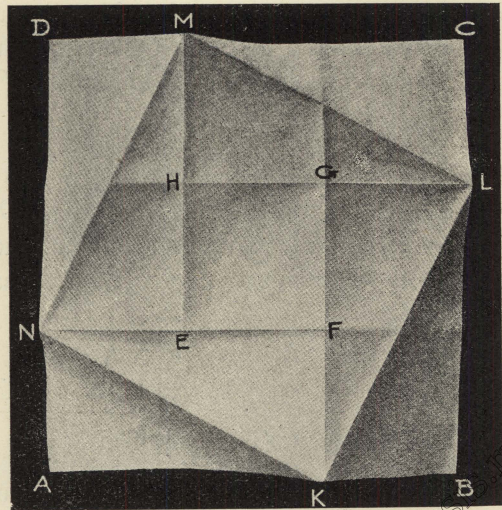


Рис. 14

**47.** Квадратъ $ABCD$ превышаетъ квадратъ $EFGH$ четырьмя прямоугольниками $AF$, $BG$, $CH$ и $DE$.

Слѣдовательно, $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

**48.** На рис. 15 квадратъ $ABCD=(a+b)^2$ и квадратъ $EFGH=(a-b)^2$. Также квадратъ $AKGN$=квадрату $ELCM=a^2$. Квадратъ $KBLF$= квадрату $NHMD=b^2$.

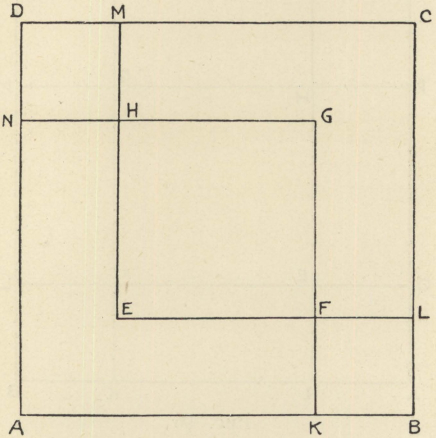


Рис. 15

Квадраты $ABCD$ и $EFGH$ вмѣстѣ равны четыремъ послѣднимъ квадратамъ, сложеннымъ вмѣстѣ, или дважды взятому квадрату $AKGN$ и дважды взятому квадрату $KBLF$, т. е. $(a+b)^2+$ $+(a-b)^2=2a^2+2b^2$.

**49.** На рис. 16 прямоугольникъ $PL$ равенъ $(a+b)(a-b)$.

Такъ какъ прямоугольникъ $EK=FM$, то прямоугольникъ $PL$ = квадрату $PK$ — квадратъ $AE$, т. е. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

**50.** Если внутри даннаго квадрата построить квадраты, у которыхъ былъ бы общимъ одинъ изъ прямыхъ угловъ даннаго квадрата, то линіи, со-

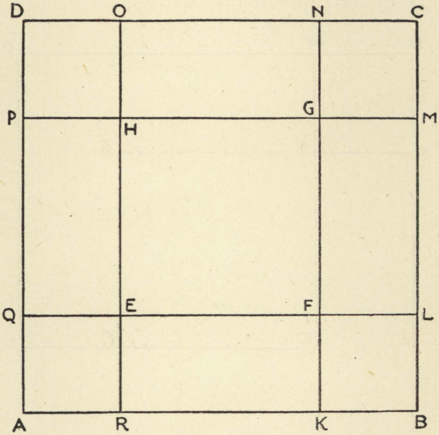


Рис. 16

единяющія вершину этого прямого угла со срединами противолежащихъ сторонъ даннаго квадрата, раздѣлятъ соотвѣтственныя стороны всѣхъ внутреннихъ квадратовъ пополамъ (рис 17). Въ самомъ дѣлѣ, углы, которые эти линіи образуютъ съ діагональю, равны и ихъ величина одна и та же для всѣхъ квадратовъ, въ чемъ можно убѣдиться наложеніемъ. Слѣдовательно, средины сторонъ внутреннихъ квадратовъ должны лежать на этихъ линіяхъ.

**51.** Данъ квадратный кусокъ бумаги $ABCD$ (рис. 18); путемъ складыванія найти на $AB$ такую точку $X$, чтобы прямоугольникъ $AB \cdot XB$ былъ равновеликъ квадрату, построенному на $AX$.

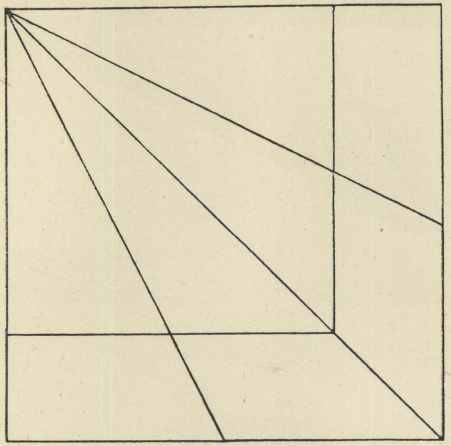

Рис. 17

Сложите $BC$ пополамъ и возьмите средину $E$.

Наложите $EB$ на $ED$ и найдите $EF$ и $G$ такія, чтобы $EG = EB$.

Возьмите $AX = AG$.

Въ такомъ случаѣ $AB \cdot XB = AX^2$.

Дополните прямоугольникъ $BCHX$ и квадратъ $AXKL$.

Пусть $XH$ пересѣкаетъ $EA$ въ $M$. Возьмите $FY = FB$.

Въ такомъ случаѣ $FB = FG = FY = XM$ и $XM = \frac{1}{2} AX$.

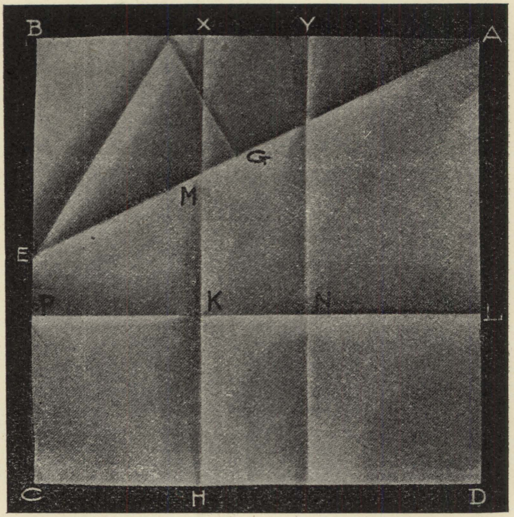


Рис. 18

Но такъ какъ $BY$ дѣлится точкой $F$ пополамъ и точка $A$ лежитъ на продолженіи $BY$, то

$$AB \cdot AY + FY^2 = AF^2 \text{ по § 49,}$$

$$= AG^2 + FG^2, \text{ по § 44.}$$

Слѣдовательно

$$AB \cdot AY = AG^2$$

$$= AX^2.$$

Но $AX^2 = 4\,XM^2 = BY^2$.

Слѣдовательно $AX = BY$ и $AY = XB$.

Отсюда $AB \cdot XB = AX^2$.

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что точка $X$ дѣлитъ отрѣзокъ $AB$ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи *).

Такимъ же образомъ

$$AB \cdot AY = BY^2,$$

т. е. точка $Y$ также дѣлитъ отрѣзокъ $AB$ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

**52.** Изъ $F$, какъ центра, можно описать окружность, которая пройдетъ чрезъ $B$, $G$ и $Y$. Она коснется $EA$ въ $G$, такъ какъ $FG$ есть кратчайшее разстояніе $F$ отъ линіи $EGA$.

**53.** Такъ какъ

$$BH = BN,$$

то, отнимая $BK$, мы получаемъ:

прямоугольникъ $XKNY =$ квадрату $CHKP$

или $$AX \cdot YX = AY^2,$$

т. е. $AX$ дѣлится точкой $Y$ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Подобнымъ же образомъ $BY$ дѣлится въ среднемъ и крайнемъ отношеніи въ точкѣ $X$.

**54.** Такъ какъ $AB \cdot XB = AX^2$,

то $$3\,AB \cdot XB = AX^2 + BX \cdot BC + CD \cdot CP$$
$$= AB^2 + BX^2.$$

*) Это дѣленіе называютъ также „золотымъ дѣленіемъ“, *aurea sectio.*

**55.** Такъ какъ каждый изъ прямоугольниковъ $BH$ и $YD$ равенъ $AB \cdot XB$, то прямоугольникъ $HY +$ квадратъ $CK = AX^2 = AB \cdot XB$.

**56.** Отсюда прямоугольникъ $HY =$ прямоугольнику $BK$, т. е. $AX \cdot XB = AB \cdot XY$.

**57.** Отсюда прямоугольникъ $HN = AX \cdot XB - BX^2$.

**58.** Пусть $AB = a$, $XB = x$.

Въ такомъ случаѣ $(a - x)^2 = ax$, по § 51.

$a^2 + x^2 = 3ax$, по § 54;

отсюда $x^2 - 3ax + a^2 = 0$

и $$x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Значитъ, $$x^2 = \frac{a^2}{2}(7 - 3\sqrt{5})$$

и $$a - x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = a \times 0{\cdot}6180\ldots$$

и $$(a - x)^2 = \frac{a^2}{2}(3 - \sqrt{5}) = a^2 \times 0{\cdot}3819\ldots$$

Прямоуг. $BPKX = (a - x)x$

$$= a^2(\sqrt{5} - 2) = a^2 \times 0{\cdot}2360\ldots$$

$$EA^2 = 5EB^2 = \frac{5}{4}AB^2.$$

$$EA = \frac{\sqrt{5}}{2}AB = 1{\cdot}1180\ldots \times a$$

**59.** На языкѣ пропорцій

$$AB:AX=AX:XB.$$

**60.** Пусть $X$ дѣлитъ $AB$ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Постройте прямоугольникъ $CBXH$ (рис. 19). Раздѣлите прямоугольникъ пополамъ

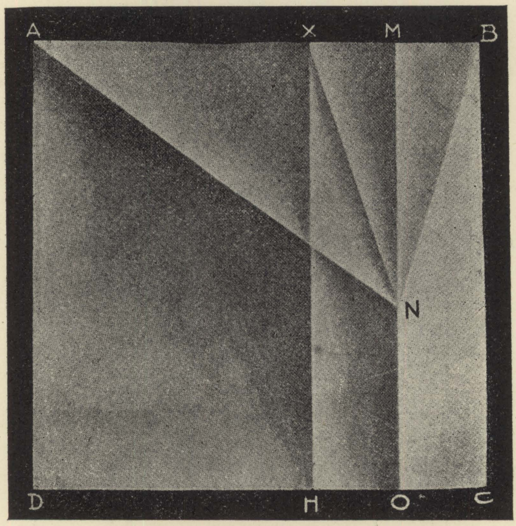


Рис. 19

линіей $MNO$. Найдите точку $N$, повернувъ $XA$ около $X$ такъ, чтобы $A$ упала на $MO$, и сдѣлайте сгибы $XN$, $NB$ и $NA$. Тогда $BAN$ есть равнобедренный треугольникъ, у котораго углы $ABN$ и $BNA$ вдвое больше угла $NAB$.

$$AX = XN = NB$$
$$\angle ABN = \angle NXB$$
$$\angle NAX = \angle XNA$$
$$\angle NXB = 2\angle NAX$$
$$\angle ABN = 2\angle NAB.$$
$$\begin{aligned} AN^2 &= MN^2 + AM^2 \\ &= BN^2 - BM^2 + AM^2 \\ &= AX^2 + AB.AX \\ &= AB \cdot XB + AB \cdot AX \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

Отсюда $AN = AB$

и $\angle NAB = \frac{2}{5}$ прямого угла.

**61.** Прямой уголъ въ $A$ можно раздѣлить на

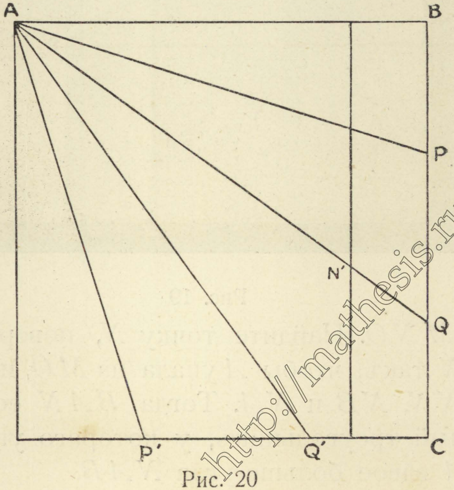


Рис. 20

пять равныхъ частей, какъ на рис. 20. Здѣсь $N'$ находится согласно § 60. Затѣмъ сдѣлайте сгибъ $AN'Q$, раздѣлите перегибомъ $\angle QAB$ пополамъ, сложите по діагонали $AC$ и такимъ образомъ получите точки $Q'$, $P'$.

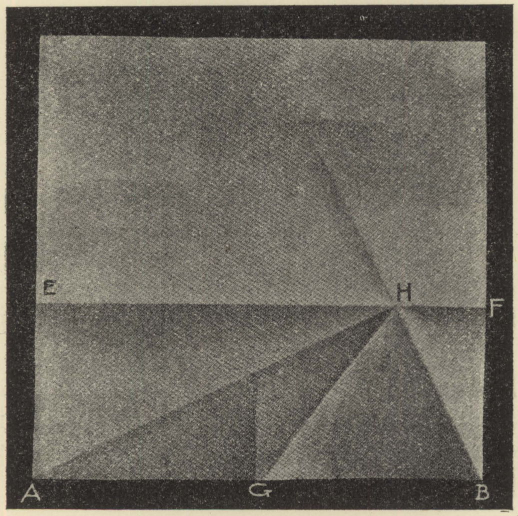


Рис. 21

**62.** Построить прямоугольный треугольникъ по данной гипотенузѣ $AB$ и высотѣ.

Сдѣлайте сгибъ $EF$ (рис. 21) параллельно $AB$ на разстояніи заданной высоты.

Возьмите $G$, средину $AB$. Найдите $H$, перегнувъ $GB$ около $G$ такъ, чтобы $B$ упало на $EF$.

Сдѣлайте сгибы чрезъ $H$ и $A$, $G$ и $B$.

$AHB$ есть искомый треугольникъ.

**63.** $ABCD$ (рис. 22) есть прямоугольникъ. Требуется найти равновеликій ему квадратъ.

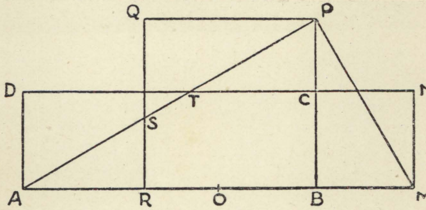


Рис. 22

Отмѣрьте $BM = BC$.

Посредствомъ перегиба найдите $O$, средину $AM$.

Перегните $OM$ около точки $O$ такъ, чтобы $M$ упала на линію $BC$; это дастъ вершину $P$ прямоугольнаго треугольника $AMP$.

На $PB$ постройте квадратъ $BPQR$.

Этотъ квадратъ равенъ данному прямоугольнику.

Такъ какъ $BP = PQ$ и углы равны, то треугольникъ $BMP$ при наложеніи, очевидно, совпадаетъ съ треугольникомъ $QSP$.

Слѣдовательно, $QS = BM = AD$.

Значитъ, треугольники $DAT$ и $QSP$ при

наложенiи совпадаютъ. Поэтому $PC=SR$ и треугольники $RSA$ и $CPT$ при наложенiи совпадаютъ.

Такимъ образомъ, $\square$ $ABCD$ можно раздѣлить на три части, которыя можно сложить вмѣстѣ въ квадратъ $RBPQ$.

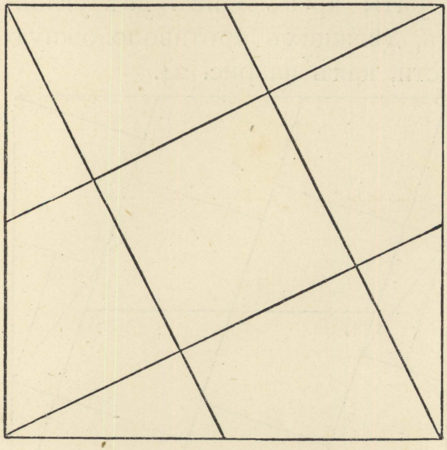

Рис. 23

**64.** Возьмите четыре равныхъ квадрата и разрѣжьте каждый изъ нихъ на двѣ части линiей отъ средины одной изъ сторонъ къ вершинѣ одного изъ противолежащихъ угловъ. Возьмите еще одинъ такой же квадратъ. Полученныя восемь частей квадратовъ можно расположить около цѣлаго такъ, чтобы все вмѣстѣ составило полный квадратъ, какъ на рис. 23. Это складыванiе представляетъ интересную задачу.

Пятый квадратъ также можно, конечно, разрѣзать на двѣ части, что еще усложнитъ складыванiе.

**65.** Можно предложить сходныя задачи, разрѣзая квадраты чрезъ одинъ изъ угловъ и одну изъ точекъ, дѣлящихъ противоположную сторону на три части, какъ на рис. 24.

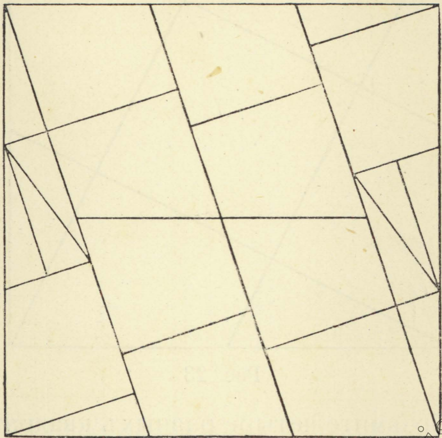

Рис. 24

**66.** Если брать болѣе близкiя между собою точки, то нужно взять 10 квадратовъ, какъ на рис. 24; если болѣе дальнiя, то 13, какъ на рис. 25.

**67.** Задачи, предложенныя въ §§ 65, 66, основаны на формулахъ

$$1^2 + 2^2 = 5$$
$$1^2 + 3^2 = 10$$
$$2^2 + 3^2 = 13.$$

Этотъ пріемъ можно продолжить дальше, но число квадратовъ становится слишкомъ неудобнымъ по своей значительности.

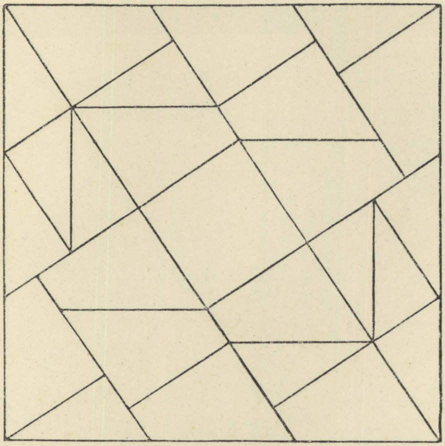

Рис. 25

**68.** Снова разсмотрите рис. 13 въ § 44. Если удалить четыре треугольника по угламъ даннаго тамъ квадрата, то останется квадратъ. Если удалить два прямоугольника $FK$ и $KC$, то останется два соприкасающихся квадрата.

**69.** Данный квадратъ можно разрѣзать на части, которыя можно сложить въ два квадрата. Есть нѣсколько способовъ для этого. Рис. 23, въ

§ 65, наводитъ на слѣдующій изящный методъ: требуемые куски суть (1) квадратъ въ центрѣ и (2) четыре симметричныхъ, при наложеніи совпадающихъ четыреугольника по угламъ, вмѣстѣ съ четырьмя треугольниками. На этомъ рисункѣ линіи

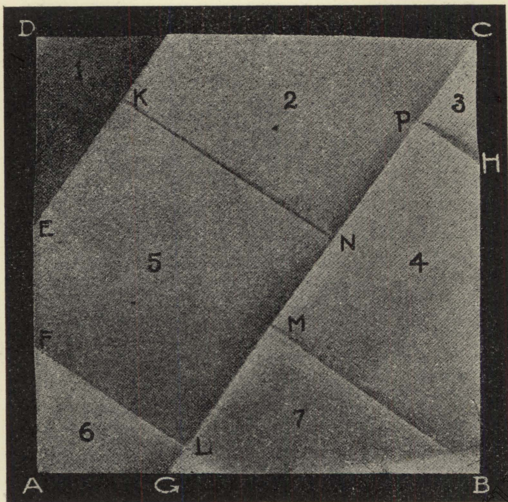


Рис. 26

проходятъ отъ срединъ сторонъ къ вершинамъ угловъ даннаго квадрата и средній квадратъ равенъ одной пятой его. Величину средняго квадрата можно измѣнять, если вмѣсто угловъ на сторонахъ даннаго квадрата брать другія точки.

**70.** Данный квадратъ можно раздѣлить на три равные квадрата слѣдующимъ образомъ (рис. 26):

Возьмите $BG$ = половинѣ діагонали квадрата.

Сдѣлайте сгибъ чрезъ $C$ и $G$.

Сдѣлайте сгибъ $BM$ перпендикулярно къ $CG$.

Возьмите $MP$, $CN$ и $NL$ каждый $= BM$.

Сдѣлайте сгибы $PH$, $NK$, $LF$ подъ прямыми углами къ $CG$, какъ на рис. 26.

Возьмите $NK = BM$ и перегните по $KE$ подъ прямымъ угломъ къ $NK$.

Въ такомъ случаѣ куски 1, 4 и 6, 3 съ 5, и 2 съ 7 образуютъ три равныхъ квадрата.

Теперь $CG^2 = 3BG^2$,

а изъ треугольниковъ $GBC$ и $CMB$

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{CG};$$

Полагая $BC = a$, мы имѣемъ

$$BM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

## IV. Пятиугольникъ

**71.** Изъ квадрата $ABCD$ вырѣзать правильный пятиугольникъ.

Раздѣлите $BA$ въ крайнемъ и среднемъ отношенiи точкой $X$ и возьмите $M$ по срединѣ $AX$.

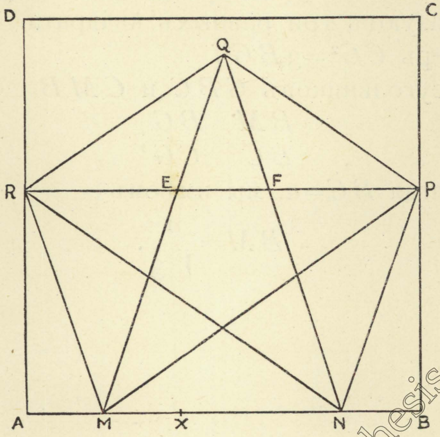


Рис. 27

Тогда $AB \cdot AX = XB^2$ и $AM = MX$.
Возьмите $BN = AM$ или $MX$.
Тогда $MN = XB$.

Отложите $NP$ и $MR$ равными $MN$ такъ, чтобы $P$ и $R$ лежали соотвѣтственно на $BC$ и $AD$.

Отложите $RQ$ и $PQ = MR$ и $NP$.

$MNPQR$ есть искомый пятиугольникъ.

На рис. 19, стр. 25, отрѣзокъ $AN$, равный $AB$, имѣетъ точку $N$ на перпендикулярѣ $MO$. Если передвинуть $A$ по $AB$ на разстояніе $MB$, то, очевидно, $N$ передвинется на $BC$ и $X$ въ $M$.

Поэтому, на рис. 27, $NR = AB$. Аналогично $MP = AB$. Слѣдовательно, $RP$ равно $AB$ и параллельно ему.

$\angle RMA = \frac{4}{5}$ прямого $\angle$<br>
и потому $\angle NMR = \frac{6}{5}$ прямого $\angle$.<br>
Аналогично $\angle PNM = \frac{6}{5}$ прямого $\angle$.

Изъ треугольниковъ $MNR$ и $QPR$ получается, что $\angle NMR = \angle RQP = \frac{6}{5}$ прямого $\angle$.

Такъ какъ каждый изъ трехъ угловъ $M$, $N$ и $Q$ пятиугольника равенъ $\frac{6}{5}$ прямого угла, то остальные два угла вмѣстѣ равны $^{12}/_{5}$ прямого угла, и кромѣ того они равны. Слѣдовательно, каждый изъ нихъ равенъ $\frac{6}{5}$ прямого угла.

Значитъ, всѣ углы этого пятиугольника равны.

Стороны этого пятиугольника также равны, по построенію.

**72.** Основаніе $MN$ пятиугольника равно $XB$, т. е. равно $\dfrac{AB}{2}(\sqrt{5} - 1) = AB \times 0{\cdot}6180\ldots$, § 58.

Наибольшая ширина пятиугольника есть $AB$.

**73.** Если $p$ будетъ высота, то

$$AB^2 = p^2 + \left[\frac{AB}{4}(\sqrt{5}-1)\right]^2$$

$$= p^2 + AB^2 . \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

Отсюда $p^2 = AB^2\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)$

$$= AB^2 . \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

И $p = AB . \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$$= AB \times 0{\cdot}9510 \ldots = AB \cos 18^0.$$

**74.** Если $R$ будетъ радіусъ описаннаго круга,

то $R = \frac{AB}{2\cos 18^0} = \frac{2AB}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$$= AB\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$= AB \times 0{\cdot}5257 \ldots$$

**75.** Если чрезъ $r$ означимъ радіусъ вписаннаго круга, то изъ рис. 28 очевидно, что

$$r = p - R = AB\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} - AB\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$= AB . \sqrt{5+\sqrt{5}}\left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{20}}\right)$$

$$=AB.\sqrt{5+\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{40}}\right]$$

$$=AB.\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}}$$

$$=AB\times 0{\cdot}4253\ldots.$$

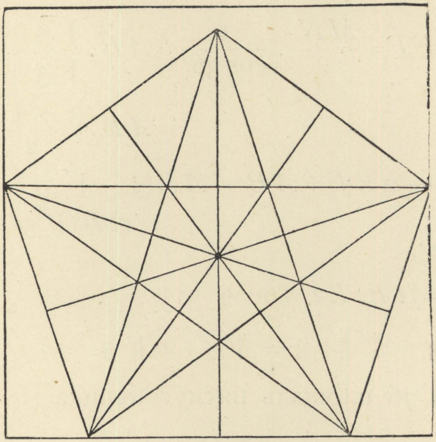

Рис. 28

**76.** Площадь пятиугольника есть $5r\times\frac{1}{2}$ основанія пятиугольника, т. е.

$$5AB.\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}}.\frac{AB}{4}.(\sqrt{5}-1)$$

$$=AB^2.\frac{5}{4}.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}=AB^2\times 0{\cdot}6571\ldots.$$

**77.** Пусть точки пересѣченія $PR$ съ $MQ$ и $NQ$ будутъ, на рис. 27, $E$ и $F$.

Тогда, такъ какъ $MN = \frac{AB}{2}.(\sqrt{5}-1)\ldots$, § 72,

и $\cos 36^0 = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AB.(\sqrt{5}-1)}$,

то $RE = FP = \frac{MN}{2} . \frac{1}{\cos 36^0} = AB . \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

$$= AB . \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \ldots (1)$$

$EF = AB - 2RE = AB - AB(3-\sqrt{5})$

$$= AB(\sqrt{5}-2) \ldots (2)$$

$RF = MN.$

$RF : RE = RE : EF$ (по § 51) . . . . . . . . (3)

$\sqrt{5}-1 : 3-\sqrt{5} = 3-\sqrt{5} : 2(\sqrt{5}-2)$ . . . . (4)

По § 76 площадь пятиугольника

$$= AB^2 . \frac{5}{4} . \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$= MN^2 . \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 . \frac{5}{4} . \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$= MN^2 . \frac{1}{4} . \sqrt{25+10\sqrt{5}},$$

такъ какъ $AB = MN . \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Значитъ, площадь внутренняго пятиугольника

$$=EF^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

$$=AB^2 \cdot (\sqrt{5}-2)^2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Большій пятиугольникъ относится къ меньшему, какъ

$$MN^2 : EF^2$$
$$=2:(7-3\sqrt{5})$$
$$=1:0{\cdot}145898\ldots$$

**78.** Если на рис. 27 взять углы $QEK$ и $LFQ$ равными угламъ $ERQ$ или $FQP$, причемъ точки $K$, $L$ лежатъ на сторонахъ $QR$ и $QP$ соотвѣтственно, то $EFLQK$ будетъ правильный пятиугольникъ, при наложеніи совпадающій съ внутреннимъ пятиугольникомъ. Такимъ же образомъ можно построить пятиугольники и на остальныхъ сторонахъ внутренняго пятиугольника. Получающаяся фигура изъ шести пятиугольниковъ очень интересна.

## V. Шестиугольникъ

**79.** Вырѣзать изъ даннаго квадрата правильный шестиугольникъ.

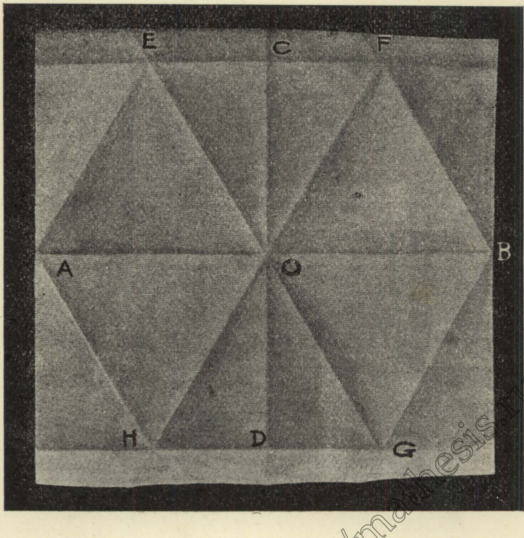


Рис. 29

Сложите квадратъ чрезъ средины противоположныхъ сторонъ и получите линіи $AOB$ и $COD$.

На двухъ отрѣзкахъ $AO$ и $OB$ постройте равносторонніе треугольники (§ 25) $AOE$, $AHO$; $BFO$ и $BOG$.

Проведите $EF$ и $HG$.

$AHGBFE$ будетъ правильный шестиугольникъ.

Нѣтъ необходимости приводить доказательство этого.

Наибольшая ширина шестиугольника будетъ $AB$.

**80.** Высота шестиугольника будетъ

$$\frac{\sqrt{3}}{2} . AB = 0{\cdot}866 \ldots \times AB.$$

**81.** Если $R$ есть радіусъ описаннаго круга, то

$$R = \frac{1}{2} AB.$$

**82.** Если $r$ есть радіусъ вписаннаго круга, то

$$r = \frac{\sqrt{3}}{4} . AB = 0{\cdot}433 \ldots \times AB.$$

**83.** Площадь шестиугольника равна 6 площадямъ треугольника $HGO$,

$$= 6 . \frac{AB}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} AB$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} . AB^2 = 0{\cdot}6495 \ldots \times AB^2.$$

Слѣдовательно, шестиугольникъ $= \frac{3}{4} . AB . CD$ или въ $1\frac{1}{2}$ раза больше равносторонняго треугольника, построеннаго на $AB$.

**84.** Рис. 30 представляетъ примѣръ орнамента изъ равностороннихъ треугольниковъ и шестиугольниковъ.

**85.** Образуйте шестиугольникъ изъ равносторонняго треугольника, перегнувъ его такъ, чтобы вершины сошлись въ центрѣ.

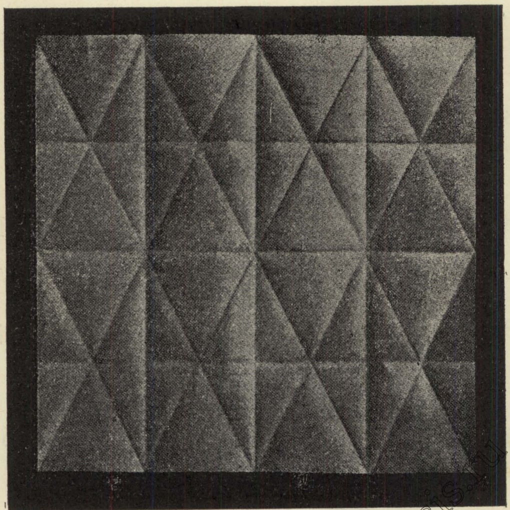

Рис. 30

Сторона этого шестиугольника равна $\frac{1}{3}$ стороны взятаго равносторонняго треугольника.

Площадь этого шестиугольника $= \frac{2}{3}$ площади взятаго треугольника.

**86.** Шестиугольникъ можно раздѣлить на равные правильные шестиугольники и равносторонніе треугольники, какъ показываетъ рис. 31, дѣлая

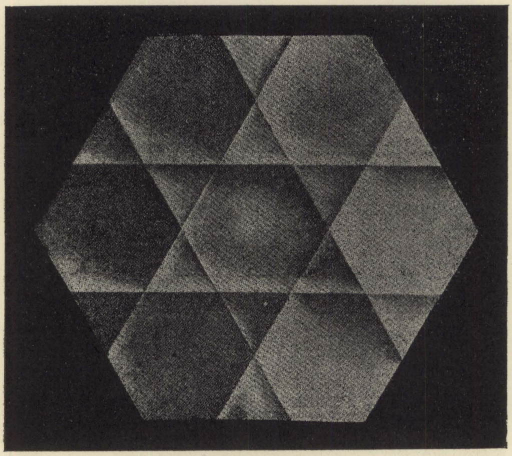

Рис. 31

перегибы чрезъ точки, дѣлящія стороны на три равныя части.

## VI. Восьмиугольникъ

**87.** Въ данномъ квадратѣ построить правильный восьмиугольникъ.

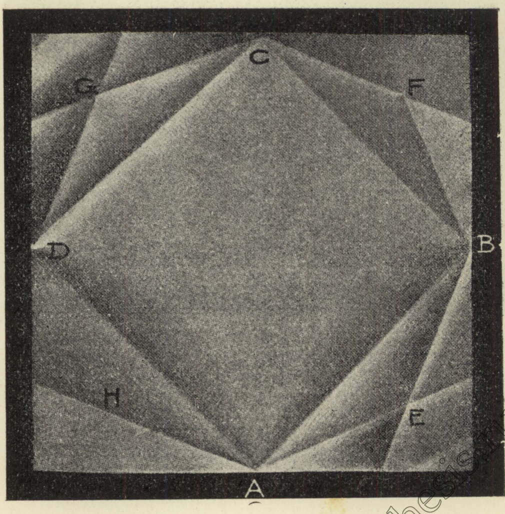


Рис. 32

Въ данный квадратъ впишите другой квадратъ, соединивъ средины $A$, $B$, $C$, $D$ сторонъ даннаго.

Раздѣлите пополамъ углы между сторонами даннаго и вписаннаго квадратовъ. Пусть эти биссектрисы пересѣкаются въ $E$, $F$, $G$ и $H$.

$AEBFCGDH$ будетъ правильный восьмиугольникъ.

Треугольники $AEB$, $BFC$, $CGD$ и $DHA$ равнобедренные и при наложенiи совпадаютъ. Слѣдовательно, стороны полученнаго восьмиугольника равны.

Каждый изъ угловъ при вершинахъ $E$, $F$, $G$, $H$ тѣхъ же треугольниковъ равенъ полутора прямому углу, такъ какъ ихъ углы при основанiи равны четверти прямого угла каждый.

Слѣдовательно, каждый изъ угловъ восьмиугольника при точкахъ $A$, $B$, $C$, $D$ равенъ полутора прямому углу.

Значитъ, всѣ углы нашего восьмиугольника равны между собою.

Наибольшую ширину восьмиугольника представляетъ сторона даннаго квадрата $a$.

**88.** Если $R$ есть радiусъ описаннаго круга, а $a$ сторона взятаго квадрата, то

$$R=\frac{a}{2}\ .$$

**89.** Каждая сторона стягиваетъ уголъ при центрѣ, равный половинѣ прямого.

**90.** Проведите радіусъ $OE$; пусть онъ пересѣкаетъ $AB$ въ точкѣ $K$ (рис. 33). Тогда

$$AK = OK = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

$$KE = OA - OK = \frac{a}{2} - \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{4} \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

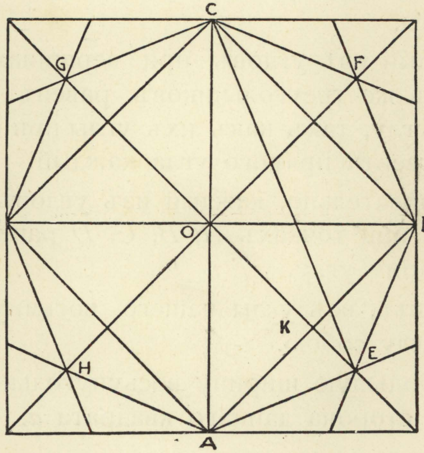

Рис. 33

Но изъ треугольника $AEK$ имѣемъ:

$$AE^2 = AK^2 + KE^2$$

$$= \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} \cdot (3 - 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{a^2}{8} \cdot (4 - 2\sqrt{2})$$

$$=\frac{a^2}{4}\cdot(2-\sqrt{2}).$$

Слѣдовательно, $AE=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

**91.** Высота восьмиугольника есть $CE$ (рис. 33). Но $CE^2=AC^2-AE^2$

$$=a^2-\frac{a^2}{4}\cdot(2-\sqrt{2})=\frac{a^2}{4}\cdot(2+\sqrt{2}).$$

Слѣдовательно, $CE=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$

**92.** Площадь восьмиугольника равна восьми площадямъ треугольника $AOE$ и

$$=4\,OE\,.\,AK=4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2\sqrt{2}}=\frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

**93.** Можно также получить правильный восьмиугольникъ, дѣля углы даннаго квадрата на четыре равныя части.

Легко видѣть, что $EZ=WZ=a$, сторонѣ даннаго квадрата.

$$XZ=a\sqrt{2};$$
$$XE=a(\sqrt{2}-1);$$
$$XE=WH=WK;$$
$$KX=a-a(\sqrt{2}-1)$$
$$=a(2-\sqrt{2}).$$

Но $KZ^2 = a^2 + a^2(\sqrt{2} - 1)^2 = a^2(4 - 2\sqrt{2})$

Слѣдовательно, $KZ = a\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Такимъ образомъ $GE = XZ - 2XE$

$$= a\sqrt{2} - 2a(\sqrt{2} - 1)$$

$$= a(2 - \sqrt{2}).$$

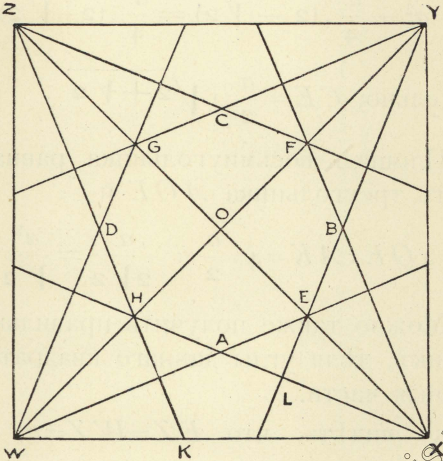


Рис. 34

Слѣдовательно, $HO = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$.

Затѣмъ $OZ = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

и $$HZ^2 = HO^2 + OZ^2$$

$$= \frac{a^2}{4}(6 - 4\sqrt{2} + 2)$$

$$= a^2(2 - \sqrt{2}).$$

Слѣдовательно, $$HZ = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$HK = KZ - HZ$$

$$= a\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - a\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$= a \,.\, (\sqrt{2 - \sqrt{2}}) \,.\, (\sqrt{2} - 1)$$

$$= a\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}.$$

$$AL = \frac{1}{2} HK = \frac{a}{2}\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}.$$

и $$HA = \frac{a}{2}\sqrt{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Дѣля стороны восьмиугольника пополамъ и соединяя полученныя такимъ образомъ точки съ центромъ, мы раздѣлимъ перигонъ (=4 прямымъ) на шестнадцать равныхъ частей. Такимъ образомъ можно легко построить 16-угольникъ, затѣмъ 32-угольникъ и вообще правильный $2^n$-угольникъ.

**94.** Площадь восьмиугольника равна восьми площадямъ треугольника $HOA$ и

$$= 8 \,.\, \tfrac{1}{2} HO \,.\, \frac{HO}{\sqrt{2}}$$

$$=HO^2 . 2\sqrt{2}$$
$$=\left[\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})\right]^2 . 2\sqrt{2}$$
$$=\frac{a^2}{4} . 2\sqrt{2} . (6-4\sqrt{2})$$
$$=a^2 . (3\sqrt{2}-4)$$
$$=a^2 . \sqrt{2} . (\sqrt{2}-1)^2.$$

**95.** Отношеніе этого восьмиугольника къ восьмиугольнику § 92

$$=(2-\sqrt{2})^2 : 1 \text{ или } 2:(\sqrt{2}+1)^2;$$

ихъ основанія относятся между собою, какъ

$$\sqrt{2} : (\sqrt{2}+1.)$$

## VII. Девятиугольникъ

**96.** При помощи складыванія бумаги можно довольно точно раздѣлить уголъ на три равныя

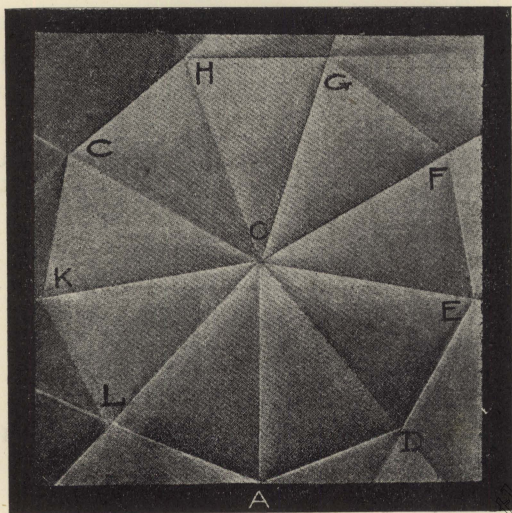


Рис. 35

части и такимъ путемъ построить приблизительно правильный девятиугольникъ.

Получите три равныхъ угла при центрѣ равносторонняго треугольника (§ 25).

Для удобства складыванія вырѣжьте эти три угла $AOF$, $FOC$ и $COA$.

Раздѣлите каждый изъ нихъ на три части, какъ на рис. 35, и отложите на ихъ сторонахъ отрѣзки $= OA$.

**97.** Каждый изъ угловъ девятиугольника равенъ $^{14}/_9$ прямого угла или $140^0$.

Каждая сторона девятиугольника стягиваетъ уголъ при центрѣ въ $\frac{4}{9}$ прямого угла или $40^0$.

Половина этого угла есть $\frac{1}{7}$ угла девятиугольника.

**98.** $OA = a/2$, гдѣ $a$ есть сторона квадрата; она есть также радіусъ описаннаго круга $R$.

Радіусъ вписаннаго круга

$$= R \,.\, \cos 20^0$$
$$= \tfrac{1}{2} a \cos 20^0$$
$$= \frac{a}{2} \times 0{\cdot}9396926$$
$$= a \times 0{\cdot}4698463.$$

Площадь девятиугольника равна девяти площадямъ треугольника $AOL$ и

$$= 9 \,.\, R \,.\, \tfrac{1}{2} R \sin 40^0$$
$$= \tfrac{9}{2} R^2 \,.\, \sin 40^0$$
$$= \frac{9a^2}{8} \times 0{\cdot}6427876$$
$$= a^2 \times 0{\cdot}723136.$$

## VIII. Десятиугольникъ и двѣнадцатиугольникъ

**99.** Рис. 36, 37 показываютъ, какъ можно получить правильные десятиугольникъ и двѣнадцатиугольникъ изъ пятиугольника и шестиугольника соотвѣтственно.

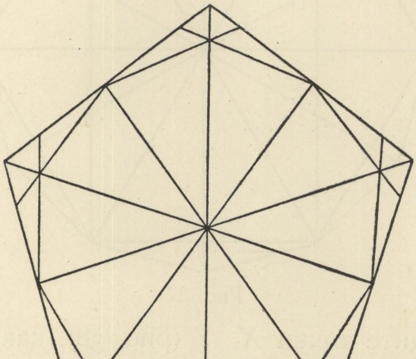

Рис. 36

Главную часть работы составитъ полученіе угловъ при центрѣ.

На рис. 36 радіусъ вписаннаго въ пятиугольникъ круга принятъ за радіусъ круга, описаннаго около десятиугольника, чтобы послѣдній не вышелъ за предѣлы взятаго квадрата.

**100.** Правильный десятиугольникъ можно получить также слѣдующимъ образомъ:

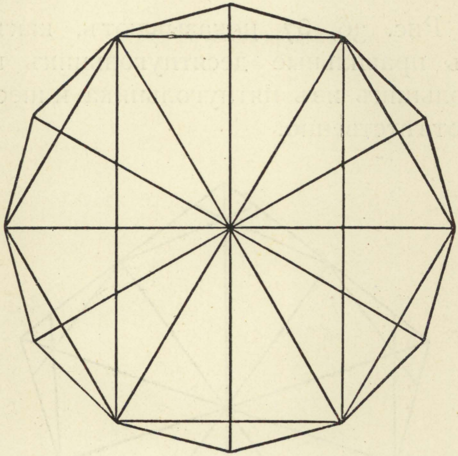

Рис. 37

Найдите точки $X$, $Y$ (рис. 38), какъ въ § 51, раздѣливъ $AB$ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Возьмите $M$ посрединѣ $AB$.

Сдѣлайте перегибы $XC$, $MO$, $YD$ подъ прямыми углами къ $AB$.

Возьмите точку $O$ на $MO$ такъ, чтобы $YO = AY$ или $YO = XB$.

Продолжите $YO$ и $XO$ до пересѣченія съ $XC$ и $YD$ въ точкахъ $C$ и $D$.

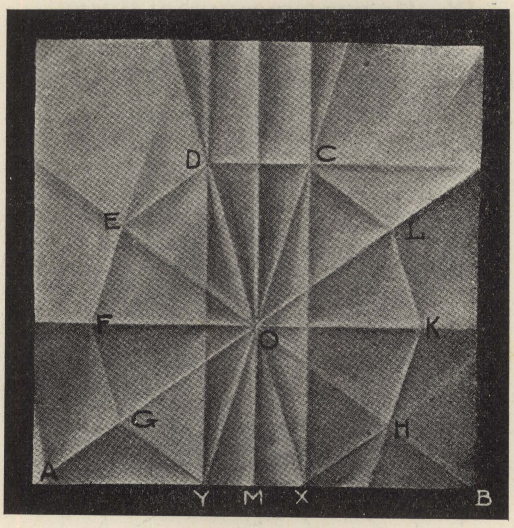


Рис. 38

Раздѣлите углы $XOC$ и $DOY$ на четыре равныя части линіями $HOE$, $KOF$ и $LOG$.

Отложите $OH$, $OK$, $OL$, $OE$, $OF$ и $OG$ равными $OY$ или $OX$.

Соедините послѣдовательно точки $X$, $H$, $K$, $L$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ и $Y$. Какъ въ § 60,

$$\angle YOX = \tfrac{2}{5} \text{ прямого угла} = 36^{\circ}.$$

## IX. Пятнадцатиугольникъ

**101.** Рис. 39 показываетъ полученіе пятнадцатиугольника изъ пятиугольника.

Пусть $ABCDE$ будетъ пятиугольникъ и $O$ его центръ.

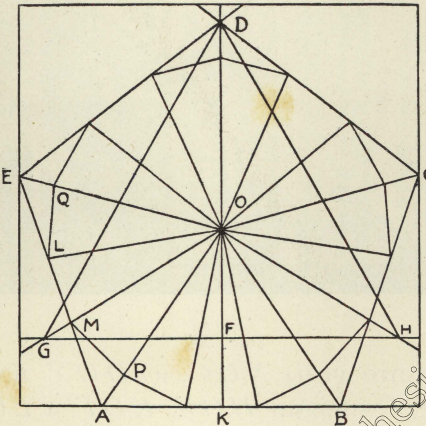


Рис. 39

Проведите $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ и $OE$. Продолжите $DO$ до пересѣченія съ $AB$ въ точкѣ $K$. Возьмите $OF = OD/2$.

Сдѣлайте перегибъ $GFH$ подъ прямымъ угломъ къ $OF$. Отложите $OG=OH=OD$.

Въ такомъ случаѣ $GDH$ есть равносторонній треугольникъ и углы $DOG$ и $HOD$ равны $120^0$ каждый.

Но уголъ $DOA$ равенъ $144^0$; слѣдовательно, уголъ $GOA$ равенъ $24^0$.

Значитъ, отъ угла $EOA$, равнаго $72^0$, линія $OG$ отдѣляетъ третью часть.

Раздѣлите уголъ $EOG$ пополамъ линіей $OL$, пересѣкающей $EA$ въ точкѣ $L$, и пусть $OG$ пересѣкаетъ $EA$ въ точкѣ $M$; тогда

$$OL=OM.$$

На $OA$ и $OE$ отложите $OP$ и $OQ$ равными $OL$ или $OM$.

Въ такомъ случаѣ $PM$, $ML$ и $LQ$ будутъ сторонами пятнадцатиугольника.

Поступая подобнымъ же образомъ съ углами $AOB$, $BOC$, $COD$ и $DOE$, мы получимъ и всѣ остальныя стороны пятнадцатиугольника.

## X. Ряды

*Ариѳметическая прогрессія*

**102.** Рис. 40 иллюстрируетъ ариѳметическую прогрессію. Горизонтальныя линіи влѣво отъ діагонали, включая верхній и нижній края, образу-

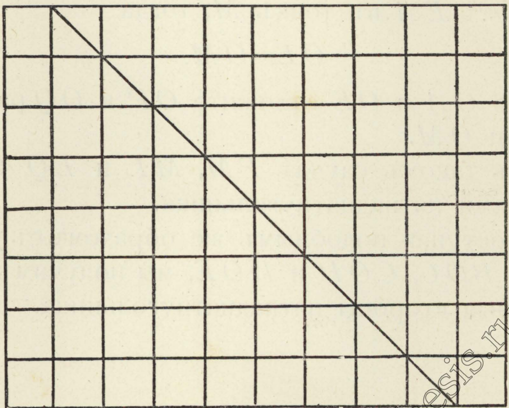

Рис. 40

ютъ ариѳметическую прогрессію. Если первый отрѣзокъ будетъ $a$, а разность между двумя сосѣдними $d$, то рядъ будетъ $a$, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ и т. д.

**103.** Части горизонтальныхъ линій вправо отъ діагонали также образуютъ ариѳметическую прогрессію, но онѣ идутъ въ обратномъ порядкѣ, постепенно уменьшаясь отъ одного члена къ другому на ту же самую величину.

**104.** Вообще, если $l$ есть послѣдній членъ прогрессіи, $s$ ея сумма, то предыдущій чертежъ графически доказываетъ формулу

$$s=\frac{n}{2}(a+l).$$

**105.** Если между $a$ и $c$ въ прогрессіи есть еще одинъ членъ, то этотъ средній членъ равенъ

$$\frac{a+c}{2}.$$

**106.** Для того чтобы между $a$ и $l$ вставить $n$ среднихъ членовъ, вертикальную линію нужно перегибами раздѣлить на $n+1$ равныхъ частей. Разность между двумя сосѣдними членами будетъ

$$\frac{l-a}{n+1}.$$

**107.** Обращаясь къ обратному ряду и переставляя $a$ и $l$ одно на мѣсто другого, мы получимъ прогрессію

$$a,\ a-d,\ a-2d, \ldots, l.$$

Ея члены положительны, пока $a>(n-1)d$, послѣ чего они будутъ нулемъ или отрицательнымъ числомъ.

## *Геометрическая прогрессія*

**108.** Въ прямоугольномъ треугольникѣ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое между отрѣзками гипотенузы. Отсюда, если длины двухъ отрѣзковъ представляютъ собою два сосѣднихъ или сосѣднихъ черезъ одинъ члена геометрической прогрессіи, то эту прогрессію можно

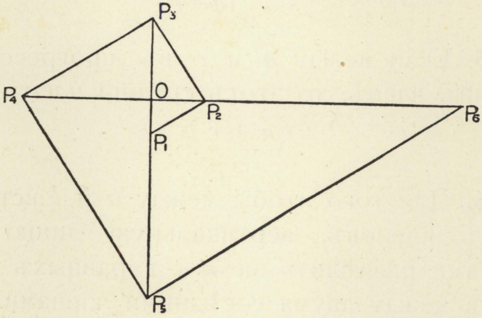


Рис. 41

опредѣлить согласно рис. 41. Здѣсь $OP_1$, $OP_2$, $OP_3$, $OP_4$ и $OP_5$ составляютъ геометрическую прогрессію, знаменатель отношенія которой равенъ $OP_1 : OP_2$.

Если $OP_1$ есть единица длины, то данная прогрессія состоитъ изъ степеней отношенія, показатели которыхъ представляютъ рядъ натуральныхъ чиселъ.

**109.** Если представить данную прогрессію въ видѣ $a$, $ar$, $ar^2$, ..., то

$$P_1 P_2 = a\sqrt{1+r^2}.$$

$$P_2 P_3 = ar\sqrt{1+r^2}.$$

$$P_3 P_4 = ar^2\sqrt{1+r^2}.$$

. . . . . . . . .

Значитъ, эти отрѣзки также образуютъ геометрическую прогрессію съ знаменателемъ отношенія $r$.

**110.** Члены указанной прогрессіи можно взять въ обратномъ порядкѣ, причемъ отношеніе будетъ правильной дробью. Сумма такой прогрессіи, продолженной до безконечности, будетъ

$$\frac{OP_5}{OP_5 - OP_4}.$$

**111.** Поступая согласно указанію § 108, можно найти геометрическое среднее между двумя данными отрѣзками; продолжая этотъ пріемъ, можно найти 3, 7, 15 и т. д. среднихъ членовъ. Вообще можно найти $2^n - 1$ среднихъ, гдѣ $n$ есть цѣлое положительное число.

**112.** Простымъ перегибаніемъ бумаги чрезъ извѣстныя точки нельзя найти два геометрическихъ среднихъ между двумя данными отрѣзками. Это можно выполнить, однако, слѣдующимъ образомъ: на рис. 41 даны $OP_1$ и $OP_4$, требуется найти $P_2$ и $P_3$. Возьмите два прямыхъ угла изъ бумаги и положите ихъ такъ, чтобы одинъ изъ нихъ вершиной лежалъ на прямой $OP_2$ и одна сторона его проходила чрезъ $P_1$, а другой лежалъ вершиной на прямой $OP_3$ и одна сторона его проходила чрезъ $P_4$; затѣмъ перемѣщайте ихъ, сохраняя указанное условіе, такъ, чтобы направленія двухъ другихъ сторонъ ихъ совпали. Вершины угловъ тогда опредѣлятъ положеніе $P_2$ и $P_3$.

**113.** Этотъ пріемъ дастъ кубическій корень изъ даннаго числа, такъ какъ, если $OP_1$ есть единица, то нашъ рядъ есть 1, $r$, $r^2$, $r^3$.

**114.** Съ этой задачей связана любопытная легенда. „Аѳиняне, страдая въ 430 г. до Р. Х. отъ сильной эпидеміи сыпного тифа, обратились къ Делосскому оракулу съ просьбой указать, какъ имъ избавиться отъ бѣды. Аполлонъ отвѣтилъ, что они должны *удвоить величину* его алтаря, имѣвшаго форму *куба*. Ничего не могло быть легче, казалось, и былъ сооруженъ новый алтарь, каждая *сторона* котораго была вдвое больше, чѣмъ у стараго. Справедливо разгнѣванный богъ усилилъ эпидемію еще больше. На Делосъ отправили новую депутацію, которой онъ отвѣтилъ, что съ нимъ шутить нельзя и что его алтарь долженъ быть ровно вдвое больше. Подозрѣвая тайну, аѳиняне обратились къ геометрамъ. Самый знаменитый изъ нихъ, Платонъ, уклонился отъ этой задачи и послалъ ихъ къ Евклиду, который и изучилъ спеціально весь этотъ вопросъ". (Имя Евклида было поставлено вмѣсто имени Гиппократа). Гиппократъ свелъ вопросъ къ нахожденію двухъ геометрическихъ среднихъ между двумя данными отрѣзками, изъ которыхъ одинъ вдвое длиннѣе другого. Если члены этого ряда обозначимъ чрезъ $a$, $x$, $y$ и $2a$, то $x^3 = 2a^3$. Ему однако не удалось найти этихъ среднихъ. Ученикъ Платона Менэхмъ, жившій между 375 и 325 г. до Р. Х., далъ три слѣдующихъ уравненія:

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Это соотношеніе даетъ три слѣдующихъ уравненія:

$$x^2 = ay \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y^2 = 2ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$xy = 2a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(1) и (2) представляютъ уравненія параболъ, а (3) уравненіе равносторонней гиперболы. Уравненія (1) и (2) или уравненія (1) и (3) даютъ $x^3 = 2a^3$. Для рѣшенія задачи надо было взять пересѣченіе ($\alpha$) двухъ параболъ (1) и (2) и пересѣченіе ($\beta$) параболы (1) съ равносторонней гиперболой (3).

### *Гармоническій рядъ*

**115.** Перегните бумагу по какимъ-нибудь линіямъ $AR$, $PB$, какъ на рис. 42, гдѣ $P$ есть точка на $AR$, а $B$ на краю бумаги. Перегните еще разъ такъ, чтобы $AP$ и $PR$ обѣ совпали съ линіей $PB$. Пусть полученные сгибы будутъ $PX$, $PY$, а точки $X$, $Y$ лежатъ на $AB$.

Въ такомъ случаѣ точки $A$, $X$, $B$, $Y$ составятъ гармоническій рядъ. Это означаетъ, что отрѣзокъ $AB$ дѣлится внутренне въ точкѣ $X$ и внѣшне въ точкѣ $Y$ такъ, что

$$AX:XB=AY:BY.$$

Очевидно, что всякая линія, пересѣкающая $PA$, $PX$, $PB$ и $PY$, дѣлится ими гармонически.

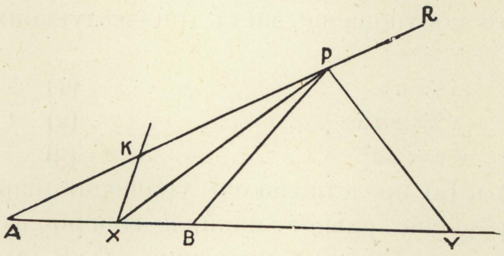


Рис. 42

**116.** Найдите $Y$ по даннымъ $A$, $B$ и $X$. Для этого перегните бумагу по произвольной линіи $XP$ и отмѣтьте на ней точку $K$, соотвѣтствующую точкѣ $B$. Сложите по линіямъ $AKPR$ и $BP$. Раздѣлите уголъ $BPR$ пополамъ линіей $PY$, сдѣлавъ сгибъ чрезъ точку $P$ такъ, чтобы $PB$ и $PR$ совпали.

Такъ какъ $XP$ дѣлитъ уголъ $APB$ пополамъ, то

$$AX:XB = AP:BP$$
$$= AY:BY.$$

**117.** $$AX:XB = AY:BY$$

или $$AY - XY : XY - BY = AY:BY.$$

Такимъ образомъ, $AY$, $XY$ и $BY$ образуютъ гармоническій рядъ, а $XY$ есть гармоническое среднее между $AY$ и $BY$.

Подобнымъ же образомъ $AB$ есть гармоническое среднее между $AX$ и $AY$.

**118.** Если даны $BY$ и $XY$, то для того, чтобы найти третій членъ $AY$, намъ нужно только построить какой-нибудь прямоугольный треугольникъ на $XY$, какъ гипотенузѣ, и взять уголъ $APX=$ углу $XPB$.

**119.** Пусть $AX=a$, $AB=b$ и $AY=c$.

Тогда $$b = \frac{2ac}{a+c};$$

или $$ab + bc = 2ac$$

или $$c = \frac{ab}{2a-b} = \frac{b}{2-\frac{b}{a}}.$$

Когда $$a=b,\ c=b.$$

Когда $$b=2a,\ c=\infty.$$

Поэтому, когда $X$ есть средина $AB$, $Y$ лежитъ на безконечномъ разстоянiи справа отъ $B$. $Y$ приближается къ $B$ по мѣрѣ приближенiя $X$ къ этой точкѣ и наконецъ всѣ эти точки совпадаютъ

При перемѣщенiи $X$ отъ средины $AB$ влѣво, $Y$ перемѣщается съ безконечнаго разстоянiя слѣва къ точкѣ $A$ и наконецъ $X$, $A$ и $Y$ совпадаютъ.

**120.** Если $E$ есть средина $AB$, то

$$EX \cdot EY = EA^2 = EB^2$$

для всѣхъ положенiй $X$ и $Y$ относительно $A$ и $B$.

Каждая изъ двухъ системъ паръ точекъ $X$ и $Y$ называется системой въ инволюцiи; точка $E$носитъ названiе центра, а $A$ или $B$ фокуса системы. Эти двѣ системы вмѣстѣ можно разсматривать, какъ одну.

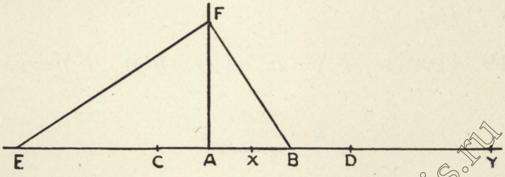


Рис. 43

**121.** По даннымъ $AX$ и $AY$ можно найти $B$ слѣдующимъ образомъ:

Продолжите $XA$ и возьмите $AC = XA$.

Найдите средину $D$ отрѣзка $AY$.

Возьмите $CE = DA$ или $AE = DC$.

Перегните бумагу чрезъ $A$ такъ, чтобы прямая $AF$ была перпендикулярна къ $CAY$.

Найдите $F$ такъ, чтобы $DF = DC$.

Сложите по $EF$ и проведите $FB$ такъ, чтобы $FB$ была перпендикулярна къ $EF$.

$CD$ есть среднее ариѳметическое между $AX$ и $AY$.

$AF$ есть среднее геометрическое между $AX$ и $AY$.

$AF$ есть также среднее геометрическое между $CD$ или $AE$ и $AB$.

Значитъ, $AB$ есть среднее гармоническое между $AX$ и $AY$.

**122.** Вотъ очень простой способъ найти среднее гармоническое между двумя данными отрѣзками.

Возьмите на сторонахъ квадрата отрѣзки $AB$, $CD$, равные даннымъ. Получите діагонали $AD$, $BC$ и стороны $AC$, $BD$ трапеціи $ACBD$. Проведите сгибъ чрезъ $E$, точку пересѣченія діагоналей, такъ, чтобы прямая $FEG$ была перпендикулярна къ другимъ сторонамъ квадрата или параллельна $AB$ и $CD$. Пусть $FEG$ пересѣкаетъ $AC$ и $BD$ въ $F$ и $G$. Въ такомъ случаѣ $FG$ есть среднее гармоническое между $AB$ и $CD$.

Такъ какъ
$$\frac{FE}{AB}=\frac{CE}{CB}$$
и
$$\frac{EG}{CD}=\frac{FE}{CD}=\frac{EB}{CB},$$
то
$$\frac{FE}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{CE}{CB}+\frac{EB}{CB}=1.$$
Слѣдовательно,
$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{FE}=\frac{2}{FG}.$$

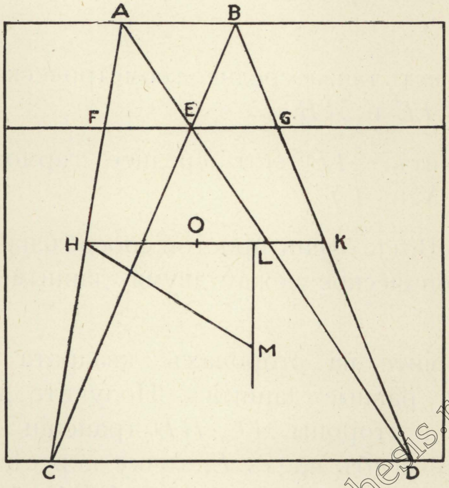


Рис. 44

**123.** Отрѣзокъ $HK$, соединяющій средины $AC$ и $BD$, есть ариѳметическое среднее между $AB$ и $CD$.

**124.** Для того чтобы найти геометрическое среднее, возьмите на $HK$ отрѣзокъ $HL = FG$. Проведите сгибъ $LM$ подъ прямымъ угломъ къ $HK$. Возьмите $O$, средину $HK$, и найдите на $LM$ такую точку $M$, чтобы $OM = OH$. Отрѣзокъ $HM$ есть геометрическое среднее между $AB$ и $CD$, а равно и между $FG$ и $HK$. Такимъ образомъ, мы видимъ, что геометрическое среднее двухъ количествъ есть геометрическое среднее ихъ ариѳметическаго и гармоническаго среднихъ.

| O | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | | | | | | |
| b | | | | | | |
| c | | | | | | |
| d | | | | | | |
| e | | | | | | |
| f | | | | | | |

Рис. 45

*Суммованіе нѣкоторыхъ рядовъ.*

**125.** Найти сумму ряда

$$1 + 3 + 5 \dots + (2n - 1).$$

Раздѣлите данный квадратъ на нѣкоторое число равныхъ квадратовъ, какъ на рис. 45. На немъ взято 49 квадратовъ, но ихъ число можно увеличить по произволу.

Число квадратовъ будетъ очевидно квадратомъ нѣкотораго числа, а именно, квадратомъ числа дѣленій стараго даннаго квадрата.

| O 1 | A 2 | B 3 | C 4 | D 5 | E 6 | F 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| b 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| c 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |
| d 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| e 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 |
| f 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 |

Рис. 46

Каждый изъ малыхъ квадратовъ будемъ считать единицей; фигуру, образованную единицами $A+O+a$, будемъ называть гномономъ.

Числа квадратовъ единицъ въ каждомъ изъ гномоновъ $AOa$, $BOb$ и т. д. будутъ соотвѣтственно 3, 5, 7, 9, 11, 13.

Слѣдовательно, сумма ряда 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 есть $7^2$.

Вообще $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

**126.** Найти сумму кубовъ $n$ первыхъ натуральныхъ чиселъ.

Разбейте квадратъ перегибами на 49 равныхъ квадратовъ, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, и отмѣтьте буквами гномоны. Заполните эти квадраты числами таблицы умноженія.

Число въ начальномъ квадратѣ есть $1 = 1^3$.

Суммы чиселъ въ гномонахъ $Aa$, $Bb$ и т. д. суть $2 + 4 + 2 = 2^3$, $3^3$, $4^3$, $5^3$, $6^3$ и $7^3$.

Сумма чиселъ въ первомъ горизонтальномъ ряду есть сумма семи первыхъ чиселъ натуральнаго ряда. Назовемъ ее $s$.

Тогда суммы чиселъ въ рядахъ $a$, $b$, $c$, $d$ и т. д. суть

$$2s,\ 3s,\ 4s,\ 5s,\ 6s \text{ и } 7s.$$

Поэтому сумма всѣхъ этихъ чиселъ есть

$$s(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = s^2.$$

Значитъ, сумма кубовъ первыхъ семи чиселъ натуральнаго ряда равна квадрату суммы этихъ чиселъ.

Вообще, $$1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3$$
$$= (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2.$$

Слѣдовательно, $\Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

А также $[n\,.\,(n+1)^2] - [(n-1)\,.\,n]^2 = (n^2+n)^2 -$
$- (n^2-n)^2 = 4\,n^3.$

Полагая $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$ по порядку, имѣемъ

$$4.1^3 = (1.2)^2 - (0.1)^2$$
$$4.2^3 = (2.3)^2 - (1.2)^2$$
$$4.3^3 = (3.4)^2 - (2.3)^2$$
$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$
$$4.n^3 = [n.(n+1)]^2 - [(n-1).n]^2.$$

Складывая, мы получаемъ

$$4\Sigma n^3 = [n(n+1)]^2,$$

откуда
$$\Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

**127.** Если $s_n$ есть сумма первыхъ $n$ натуральныхъ чиселъ, то

$$s_n^2 - s_{n-1}^2 = n^3.$$

**128.** Найти сумму ряда

$$1.2+2.3+3.4+\ldots+(n-1).n.$$

На рис. 46 числа, расположенныя по діагонали, начиная съ 1, представляютъ квадраты натуральныхъ чиселъ по порядку.

Числа одного гномона можно вычесть изъ соотвѣтственныхъ чиселъ слѣдующаго гномона. Этотъ пріемъ даетъ

$$
\begin{aligned}
n^3-(n-1)^3 &= n^2-(n-1)^2 \\
&\quad +2\,[n(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots+1] \\
&= n^2+(n-1)^2+2\,[1+2\ldots+(n-1)] \\
&= n^2+(n-1)^2+n(n-1) \\
&= [n-(n-1)]^2+3(n-1)\,n \\
&= 1+3(n-1)n.
\end{aligned}
$$

Но
$$n^3-(n-1)^3=1+3(n-1)\,n$$
и
$$(n-1)^3-(n-2)^3=1+3(n-2)(n-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2^3-1^3=1+3.2.1$$
$$1^3-0^3=1+0.$$

Сложеніе этихъ равенствъ даетъ

$$n^3=n+3\,[1.2+2.3+\ldots+(n-1).n].$$

Значитъ,

$$1.2+2.3\ldots+(n-1).n=\frac{n^3-n}{3}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

**129.** Найти сумму квадратовъ первыхъ $n$ натуральныхъ чиселъ

$$
\begin{aligned}
&1.2+2.3\ldots+(n-1).n \\
&= 2^2-2+3^2-3\ldots+n^2-n \\
&= 1^2+2^2+3^2\ldots+n^2-(1+2+3\ldots+n) \\
&= 1^2+2^2+3^2\ldots+n^2-\frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2=\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}+\frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)\left[\frac{n-1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**130.** Найти сумму ряда

$$1^2 + 3^2 + 5^2 \ldots + (2n-1)^2.$$

Такъ какъ $n^3 - (n-1)^3 = n^2 + (n-1)^2 + n(n-1)$,
по § 128, $\qquad = (2n-1)^2 - (n-1) \, . \, n,$
то, полагая $\qquad n = 1, 2, 3 \ldots,$
мы найдемъ $\qquad 1^3 - 0^3 = 1^2 - 0 \, . \, 1$

$$2^3 - 1^3 = 3^2 - 1 \, . \, 2$$

$$3^3 - 2^3 = 5^2 - 2 \cdot 3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n^3 - (n-1)^3 = (2n-1)^2 - (n-1) \, . \, n.$$

Складывая, мы имѣемъ

$$n^3 = 1^2 + 3^2 + 5^2 \ldots + (2n-1)^2$$
$$- [1 \, . \, 2 + 2 \, . \, 3 + 3 \, . \, 4 \ldots + (n-1) \, . \, n].$$

Отсюда $\qquad 1^2 + 3^2 + 5^2 \ldots + (2n-1)^2$

$$= n^3 + \frac{n^3 - n}{3}$$

$$= \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

## XI. Многоугольники

**131.** Найдите центръ $O$ квадрата, перегибая его по діагоналямъ. Раздѣлите пополамъ прямые углы при центрѣ, затѣмъ эти половины прямыхъ угловъ и т. д. Такимъ образомъ вы получите при центрѣ $2^n$ равныхъ угловъ; каждый изъ нихъ будетъ равенъ $\frac{4}{2^n}$ прямого угла ($n$ — цѣлое положительное число). На каждой изъ линій, идущихъ изъ центра, отложите по равному отрѣзку. Соединяя затѣмъ концы этихъ радіусовъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, вы получите правильный многоугольникъ о $2^n$ сторонахъ.

**132.** Найдемъ величины периметровъ и площадей такихъ многоугольниковъ. На рис. 47 пусть $OA$ и $OA_1$ будутъ два взаимно перпендикулярныхъ радіуса. Пусть радіусы $OA_2$, $OA_3$, $OA_4$ и т. д. дѣлятъ прямой уголъ $A_1OA$ на 2, 4, 8 .... частей. Проведите прямыя $AA_1$, $AA_2$, $AA_3$ ...., встрѣчающія радіусы $OA_2$, $OA_3$, $OA_4$ .... подъ прямыми углами въ точкахъ $B_1$, $B_2$, $B_3$ .... Въ такомъ случаѣ $B_1$, $B_2$, $B_3$ .... суть средины соотвѣтствующихъ хордъ; $AA_1$, $AA_2$, $AA_3$, $AA_4$ .... будутъ стороны вписанныхъ многоугольниковъ о $2^2$, $2^3$, $2^4$.... сторонахъ, а $OB_1$, $OB_2$.... будутъ соотвѣтствующія апоѳемы.

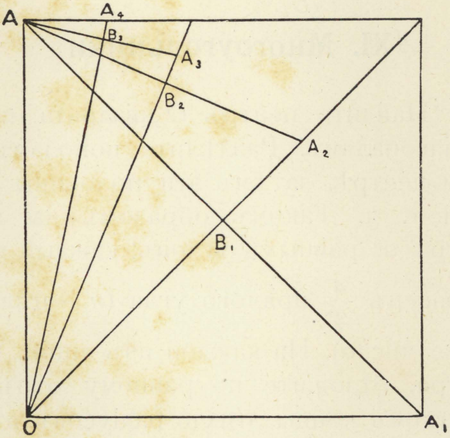


Рис. 47

Пусть $OA = R$.

Пусть $a(2^n)$ обозначаетъ *сторону* вписаннаго многоугольника о $2^n$ сторонахъ, $b(2^n)$ соотвѣтственную *апоѳему*, $p(2^n)$ его *периметръ* и $A(2^n)$ его *площадь*.

Для *квадрата*

$$a(2^2) = R\sqrt{2};$$

$$p(2^2) = R \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2};$$

$$b(2^2) = \frac{R}{2}\sqrt{2};$$

$$A(2^2) = R^2 \cdot 2.$$

Для *восьмиугольника:*

въ треугольникахъ $AB_2O$ и $AB_1A_2$

$$\frac{AB_2}{B_1A_2} = \frac{OA}{AA_2}.$$

Поэтому $\frac{1}{2}AA_2{}^2 = R\,.\,B_1A_2 = R\,[R - b\,(2^2)]$

$$= R\left(R - \frac{R}{2}\sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{2}R^2\,.\,(2 - \sqrt{2}),$$

или $$AA_2 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} = a\,(2^3)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

$$p\,(2^3) = R\,.\,2^3\sqrt{2 - \sqrt{2}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$$b(2^3) = OB_2 = \sqrt{OA^2 - AB_2{}^2} = \sqrt{R^2\left(1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2(2 + \sqrt{2})}{4}} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{2}}\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

$A\,(2^3) = \frac{1}{2}$ периметра $\times$ апоөему

$$= R\,.\,2^2\,.\sqrt{2 - \sqrt{2}}\,.\,\tfrac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$= R^2\,.\,2\sqrt{2}.$$

Подобнымъ образомъ для многоугольника о 16 сторонахъ мы имѣемъ:

$$a\,(2^4) = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$p\,(2^4) = R\,.\,2^4.\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$b\,(2^4) = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$A(2^4) = R^2\,.\,2^2\,.\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

а для многоугольника о 32 сторонахъ:

$$a(2^5)=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

$$p(2^5)=R\,.\,2^5\,.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

$$b(2^5)=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

$$A(2^5)=R^2\,.\,2^3\,.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Такимъ образомъ общій законъ здѣсь ясенъ.

Итакъ, $$A(2^n)=\frac{R}{2}\cdot p(2^{n-1}).$$

При неопредѣленномъ возрастаніи числа сторонъ апоѳема, очевидно, приближается къ своему предѣлу, радіусу. Такимъ образомъ предѣлъ выраженія

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ldots$$

есть 2; въ самомъ дѣлѣ, если обозначить этотъ предѣлъ чрезъ $x$, то $x=\sqrt{2+x}$; это квадратное уравненіе даетъ: $x=2$ или $-1$; но второе значеніе, конечно, недопустимо.

**133.** Если чрезъ концы радіусовъ провести перпендикулярныя къ нимъ прямыя, то мы получимъ правильные многоугольники, описанные около круга, а также около полученныхъ въ предыдущемъ параграфѣ многоугольниковъ, съ тѣмъ же числомъ сторонъ.

На рис. 48 пусть $AE$ будетъ сторона вписаннаго, а $FG$ сторона описаннаго многоугольника.

Тогда, изъ треугольниковъ $FIE$ и $EIO$

$$\frac{OE}{OI}=\frac{FE}{EI}=\frac{FG}{AE};$$

слѣдовательно, $FG=R\frac{AE}{OI}$.

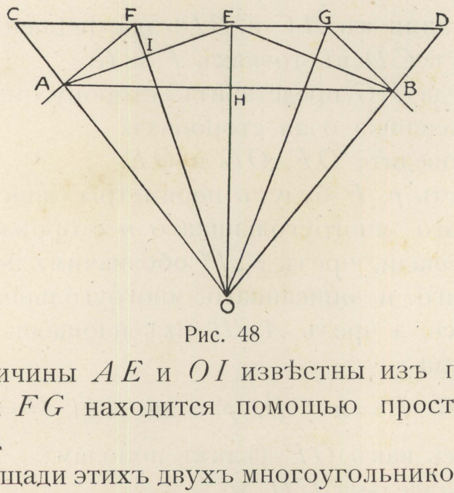

Рис. 48

Величины $AE$ и $OI$ извѣстны изъ предыдущаго § и $FG$ находится помощью простой подстановки.

Площади этихъ двухъ многоугольниковъ относятся другъ къ другу, какъ $FG^2:AE^2$, т. е. какъ $R^2:OI^2$.

**134.** Въ предыдущихъ параграфахъ было показано, какъ можно получить правильные многоугольники о $2^2$, $2^3 \dots 2^n$ сторонахъ. Если же данъ многоугольникъ о $m$ сторонахъ, то легко получить многоугольникъ о $2^n \cdot m$ сторонахъ.

**135.** На рис. 48 отрѣзки $AB$ и $CD$ суть стороны вписаннаго и описаннаго многоугольника о $n$ сторонахъ. Чрезъ середину $E$ стороны $CD$ проведите прямыя $AE$ и $BE$. Отрѣзки $AE$ и $BE$ представляютъ стороны вписаннаго многоугольника о $2n$ сторонахъ.

Перегните бумагу по $AF$ и $BG$, подъ прямыми углами къ $AC$ и $BD$; эти перпендикуляры встрѣтятъ $CD$ въ точкахъ $F$ и $G$.

Тогда $FG$ представитъ сторону описаннаго многоугольника о $2n$ сторонахъ.

Проведите $OF$, $OG$ и $OE$.

Пусть $p$, $P$ будутъ периметры вписаннаго и описаннаго многоугольника о $n$ сторонахъ, $A$, $B$ ихъ площади; чрезъ $p'$, $P'$ обозначимъ периметры вписаннаго и описаннаго многоугольника о $2n$ сторонахъ, а чрезъ $A'$, $B'$ ихъ площади.

Тогда

$$p = n \cdot AB,\quad P = n \cdot CD,\quad p' = 2n \cdot AE,\quad P' = 2n \cdot FG.$$

Такъ какъ $OF$ дѣлитъ пополамъ $\angle COE$, а $AB$ параллельна $CD$, то

$$\frac{CF}{FE} = \frac{CO}{OE} = \frac{CO}{AO} = \frac{CD}{AB};$$

значитъ,
$$\frac{CE}{FE} = \frac{CD + AB}{AB}$$

или $$\frac{4n \,.\, CE}{4n \,.\, FE} = \frac{n \,.\, CD + n \,.\, AB}{n \,.\, AB},$$

откуда $$\frac{2P}{P'} = \frac{P+p}{p}$$

и $$P' = \frac{2Pp}{P+p}.$$

Далѣе, изъ подобія треугольниковъ $EIF$ и $AHE$

$$\frac{EI}{AH} = \frac{EF}{AE}$$

или $$AE^2 = 2AH \,.\, EF;$$

значитъ, $$4n^2 \,.\, AE^2 = 4n^2 \,.\, AB \,.\, EF$$

или $$p' = \sqrt{P'p}.$$

Съ другой стороны,

$$A = 2n \triangle AOH, \quad B = 2n \triangle COE,$$
$$A' = 2n \triangle AOE, \quad B' = 2n \triangle FOE.$$

Такъ какъ треугольники $AOH$ и $AOE$ имѣютъ одну и ту же высоту $AH$, то

$$\frac{\triangle AOH}{\triangle AOE} = \frac{OH}{OE}.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\frac{\triangle AOE}{\triangle COE} = \frac{OA}{OC}.$$

Затѣмъ, такъ какъ $AB \parallel CD$,

то
$$\frac{\triangle AOH}{\triangle AOE} = \frac{\triangle AOE}{\triangle COE}.$$

Поэтому
$$\frac{A}{A'} = \frac{A'}{B} \quad \text{или} \quad A' = \sqrt{AB}.$$

Теперь найдемъ $B'$. Такъ какъ у треугольниковъ $COE$ и $FOE$ высота общая, а $OF$ дѣлитъ уголъ $EOC$ пополамъ, то

$$\frac{\triangle COE}{\triangle FOE} = \frac{CE}{FE} = \frac{OC + OE}{OE};$$

затѣмъ
$$OE = OA$$

и
$$\frac{OC}{OA} = \frac{OE}{OH} = \frac{\triangle AOE}{\triangle AOH};$$

поэтому
$$\frac{\triangle COE}{\triangle FOE} = \frac{\triangle AOE + AOH}{\triangle AOH}.$$

Изъ этого уравненія легко получаемъ, что

$$\frac{2B}{B'} = \frac{A' + A}{A};$$

слѣдовательно,
$$B' = \frac{2AB}{A + A'}.$$

**136.** По даннымъ радіусу $R$ и апоѳемѣ $r$ правильнаго многоугольника найти радіусъ $R'$ и апоѳему $r'$ правильнаго многоугольника *того же периметра*, но съ *двойнымъ числомъ сторонъ*.

Пусть $AB$ будетъ сторона перваго многоугольника, $O$ его центръ, $OA$ радіусъ описаннаго круга, $OD$ его апоѳема. На продолженіи апоѳемы $OD$ отложите $OC = OA$ или $OB$. Проведите $AC$, $BC$. Перегните по $OA'$ и $OB'$ перпендикулярно къ $AC$ и $BC$, опредѣляя такимъ образомъ точки $A'$, $B'$.

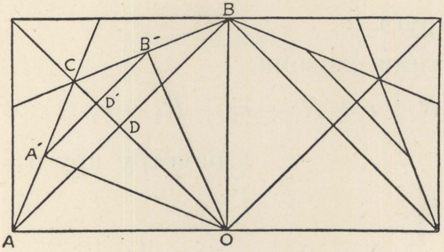


Рис. 49

Проведите прямую $A'B'$, пересѣкающую $OC$ въ $D'$. Хорда $A'B'$ будетъ равна половинѣ $AB$, а уголъ $B'OA'$ равенъ половинѣ угла $BOA$. $OA'$ и $OD'$ представляютъ радіусъ $R'$ и апоѳему $r'$ второго многоугольника.

Но $OD'$ есть среднее ариѳметическое между $OC$ и $OD$, а $OA'$ есть среднее геометрическое между $OC$ и $OD'$. Поэтому

$$r' = \tfrac{1}{2}(R + r),\ R' = \sqrt{Rr'}.$$

**137.** Теперь на $OC$ отложите $OE = OA'$ и проведите $A'E$.

Тогда, такъ какъ $A'D'$ меньше $A'C$, а $\angle D'A'C$ дѣлится пополамъ прямою $A'E$, то

$ED'$ меньше, чѣмъ $\frac{1}{2}CD'$, т. е. меньше $\frac{1}{4}CD$; слѣдовательно,

$$R_1 - r_1 \text{ меньше, чѣмъ } \tfrac{1}{4}(R - r).$$

Съ увеличеніемъ числа сторонъ многоугольникъ будетъ приближаться къ кругу того же периметра, а $R$ и $r$ будутъ приближаться къ радіусу круга.

Другими словами,

$$R + r + R_1 - r_1 + R_2 - r_2 + \ldots$$
$$= \text{діаметру круга} = \frac{p}{\pi}.$$

Далѣе,

$$R_1^2 = R r_1 \text{ или } R \cdot \frac{r_1}{R_1} = R_1$$

и

$$\frac{r_2}{R_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{и т. д.}$$

Перемножая эти два ряда равенствъ, находимъ:

$$R \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_3}{R_3} \ldots = \text{радіусу круга} = \frac{p}{2\pi}.$$

**138.** Радіусъ круга заключается между $R_n$ и $r_n$, а число сторонъ многоугольника равно $4 \cdot 2^n$; величина $\pi$ заключается между $\frac{2}{r_n}$ и $\frac{2}{R_n}$. Поэтому, беря достаточно большое число сторонъ, можно вычислить $\pi$ съ любой степенью точности.

Радіусы и апоѳемы правильныхъ многоугольниковъ о 4, 8, 16 .... 2048 сторонахъ имѣютъ слѣдующія величины:

4-угольникъ: $r = 0{\cdot}500000$, $R = r\sqrt{2} = 0{\cdot}707107$

8-угольникъ: $r_1 = 0{\cdot}603553$, $R_1 = 0{\cdot}653281$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2048-угольникъ: $r_9 = 0{\cdot}636620$, $R_9 = 0{\cdot}636620$.

Отсюда $$\pi = \frac{2}{0{\cdot}636620} = 3{\cdot}14159\ldots$$

**139.** Если $R''$ есть радіусъ правильнаго многоугольника того же периметра о $4n$ сторонахъ, то

$$R''^2 = \frac{R'^2(R+R')}{2R}$$

или вообще

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \sqrt{\frac{1 + \frac{R_k}{R_{k-1}}}{2}}.$$

**140.** Радіусы $R_1$, $R_2$, .... послѣдовательно уменьшаются; поэтому отношеніе $\frac{R_2}{R_1}$ меньше единицы и можетъ быть приравнено косинусу нѣкотораго угла $\alpha$.

$$\frac{R_3}{R_2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Вообще $$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \cos \frac{a}{2^{k-1}}.$$

Перемножая почленно такія равенства, получаемъ:

$$R_{k+1} = R_1 . \cos a . \cos \frac{a}{2} . \cos \frac{a}{2^2} \ldots \cos \frac{a}{2^{k-1}}$$

Предѣлъ произведенія $\cos a . \cos \frac{a}{2} \ldots \cos \frac{a}{2^{k-1}}$

при $k = \infty$ равенъ $\frac{\sin 2a}{2a}$; этотъ результатъ извѣстенъ подъ именемъ *формулы Эйлера*.

**141.** Карлъ Фридрихъ *Гауссъ* (Gauss, 1777—1855) доказалъ, что кромѣ правильныхъ многоугольниковъ о $2^n$, $3.2^n$, $5.2^n$, $15.2^n$ сторонахъ съ помощью элементарной геометріи могутъ быть построены только такіе правильные многоугольники, у которыхъ число сторонъ представляетъ произведеніе $2^n$ и одного или нѣсколькихъ различныхъ чиселъ вида $2^m + 1$. Мы здѣсь укажемъ, какъ могутъ быть построены многоугольники о 5 и 17 сторонахъ.

Намъ понадобятся слѣдующія теоремы *):

(1) Если $C$ и $D$ суть двѣ точки полуокружности $ACDB$, если $C'$ симметрично съ $C$ по

---

*) Доказательство этихъ теоремъ можно найти у *Catalan*, Théorèmes et Problèmes de Géométrie Elémentaire.

отношенію къ діаметру $AB$, а $R$ обозначаетъ радіусъ круга, то

$$AC.BD = R.(C'D - CD) \ldots\ldots\ldots \text{I}.$$

$$AD.BC = R.(C'D + CD) \ldots\ldots \text{II}.$$

$$AC.BC = R.CC' \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III}.$$

(2) Пусть окружность нѣкотораго круга раздѣлена на нечетное число равныхъ частей, пусть $AO$ будетъ діаметръ, проходящій чрезъ одну изъ точекъ дѣленія $A$ и чрезъ средину $O$ противоположной дуги. Обозначимъ буквами $A_1, A_2 \ldots A_n$ и $A_1', A_2' \ldots A_n'$ точки дѣленія по обѣ стороны этого діаметра, начиная съ ближайшихъ къ $A$.

Въ такомъ случаѣ

$$OA_1 . OA_2 . OA_3 \ldots OA_n = R^n \ldots\ldots \text{IV}.$$

и $$OA_1 . OA_2 . OA_4 \ldots OA_n = R^{\frac{n}{2}}.$$

**142.** Очевидно, что если хорда $OA_n$ опредѣлена, то уголъ $A_n OA$ найденъ и остается раздѣлить его на $n$ равныхъ частей, чтобы получить прочія хорды.

**143.** Возьмемъ сначала пятиугольникъ.

По IV теоремѣ

$$OA_1 . OA_2 = R^2.$$

По I теоремѣ

$$R(OA_1 - OA_2) = OA_1 . OA_2 = R^2.$$

Слѣдовательно, $OA_1 - OA_2 = R$;

отсюда $$OA_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

и $$OA_2 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

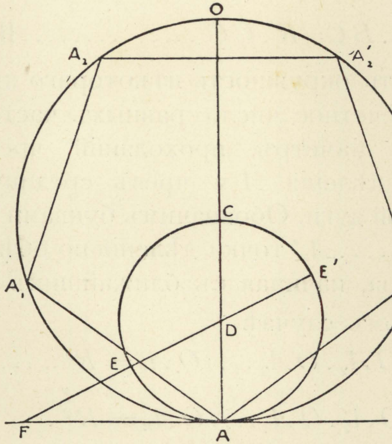


Рис. 50

Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе.

Проведите діаметръ $ACO$ и касательную $AF$. Найдите средину $D$ радіуса $AC$ и отложите $AF = AC$.

На $AC$, какъ на діаметрѣ, опишите кругъ $AE'CE$.

Проведите $FD$, встрѣчающую внутренній кругъ въ $E$ и $E'$.

Тогда $FE' = OA_1$ и $FE = OA_2$.

**144.** Разсмотримъ теперь 17угольникъ.

Въ данномъ случаѣ *)

$$OA_1 . OA_2 . OA_3 . OA_4 . OA_5 . OA_6 . OA_7 . OA_8 = R^8.$$

$$OA_1 . OA_2 . OA_4 . OA_8 = R^4.$$

$$OA_3 . OA_5 . OA_6 . OA_1 = R^4.$$

По I и II теоремамъ

$$OA_1 . OA_4 = R(OA_3 + OA_5)$$

$$OA_2 . OA_8 = R(OA_6 - OA_7)$$

$$OA_3 . OA_5 = R(OA_2 + OA_8)$$

$$OA_6 . OA_7 = R(OA_1 - OA_4).$$

Пусть

$$OA_3 + OA_5 = M, \quad OA_6 - OA_7 = N,$$

$$OA_2 + OA_8 = P, \quad OA_1 - OA_4 = Q.$$

Тогда $MN = R^2$ и $PQ = R^2$.

Подставляя значенія $M$, $N$, $P$ и $Q$ въ формулы

$$MN = R^2, \; PQ = R^2$$

и пользуясь теоремами I и II, находимъ:

$$(M - N) - (P - Q) = R.$$

---

*) Здѣсь указаны лишь главные шаги. Полнѣе вопросъ изложенъ у *Catalan, Théorèmes et Problèmes de Géometrie Elémentaire,* и у *Klein, Знаменитыя задачи элементарной геометріи.*

Подобнымъ же образомъ, подставляя значенія $M$, $N$, $P$ и $Q$ въ написанную выше формулу и принимая во вниманіе I и II теоремы, мы найдемъ, что

$$(M-N)(P-Q)=4R^2.$$

Отсюда опредѣляются $M-N$, $P-Q$, $M$, $N$, $P$ и $Q$.

Съ другой стороны,

$$OA_2+OA_8=P,$$

$$OA_2 \cdot OA_8=RN.$$

Отсюда опредѣляется $OA_8$.

**145.** Разрѣшая эти уравненія, найдемъ

$$M-N=\tfrac{1}{2}R(1+\sqrt{17}).$$

$$P-Q=\tfrac{1}{2}R(-1+\sqrt{17}).$$

$$P=\tfrac{1}{4}R(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}).$$

$$N=\tfrac{1}{4}R(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+\sqrt{2 17}}).$$

$$OA_8=\tfrac{1}{8}R[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}] -$$

$$-2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,]$$

$$=\tfrac{1}{8}R[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

$$-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\,].$$

**146.** Геометрическое построеніе будетъ слѣдующее:

Пусть $BA$ будетъ діаметръ даннаго круга; $O$ его центръ; $C$ средина $OA$. Проведите $AD$ перпендикулярно къ $OA$ и отложите $AD=AB$. Проведите $CD$. По обѣ стороны отъ $C$ найдите на $CD$ такія точки $E$ и $E'$, чтобы $CE=CE'=CA$.

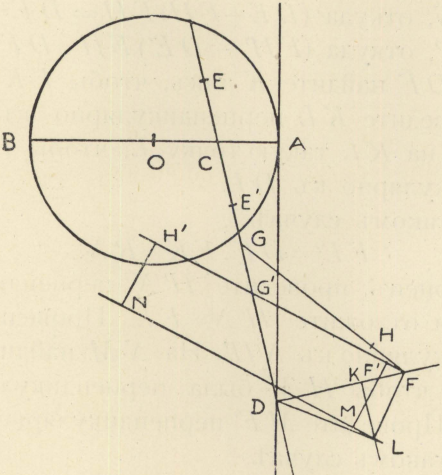


Рис. 51

Раздѣлите $ED$ пополамъ въ точкѣ $G$ и $E'D$ въ $G'$. Проведите $DF$ перпендикулярно къ $CD$ и отложите $DF=OA$.

Проведите $FG$ и $FG'$.

Найдите на $FG$ такую точку $H$ и на продолженіи $FG'$ такую точку $H'$, чтобы $GH=EG$ и $G'H'=G'D$.

Очевидно, что

$$DE=M-N,$$
$$DE'=P-Q,$$

а также, что

$$FH=N, \text{ откуда } (DE+FH)FH=DF^2=R^2;$$
$$FH'=P, \text{ откуда } (FH'-DE')FH=DF^2=R^2.$$

На $DF$ найдите $K$ такъ, чтобы $FK=FH$.

Проведите $KL$ перпендикулярно къ $DF$ и отмѣтьте на $KL$ такую точку $L$, чтобы $FL$ было перпендикулярно къ $DL$.

Въ такомъ случаѣ

$$FL^2=DF.FK=RN.$$

Наконецъ, проведите $H'N$ перпендикулярно къ $FH'$ и отложите $H'N=FL$. Проведите $NM$ перпендикулярно къ $NH'$. На $NM$ найдите такую точку $M$, чтобы $H'M$ была перпендикулярна къ къ $FM$. Проведите $MF'$ перпендикулярно къ $FH'$.

Въ такомъ случаѣ

$$F'H'.FF'=F'M^2=FL^2$$
$$=RN.$$

Но $FF'+F'H'=P$.

Слѣдовательно, $FF'=OA_8$.

## XII. Общія начала

**147.** На предыдущихъ страницахъ мы примѣняли разнообразные пріемы, каковы, напр., дѣленіе конечныхъ линій на двѣ и на три равныя части, дѣленіе прямыхъ угловъ на двѣ или на другое число равныхъ частей, проведеніе перпендикуляровъ къ данной линіи и т. д. Займемся теперь теоріей этихъ пріемовъ.

**148.** Всеобщимъ началомъ является принципъ конгруэнтности или совмѣщенія при наложеніи. Фигуры и отрѣзки прямыхъ линій называются конгруэнтными, если они тождественно равны или равны во всѣхъ отношеніяхъ.

Складывая вдвое листъ бумаги, мы получаемъ прямолинейные края двухъ плоскостей, совпадающіе другъ съ другомъ. Эта линія можетъ быть также разсматриваема, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, если обращать вниманіе на ихъ расположеніе во время процесса перегибанія.

Раздѣляя отрѣзокъ или уголъ на нѣкоторое число равныхъ частей, мы получаемъ нѣкоторое число конгруэнтныхъ частей. Равные отрѣзки или равные углы конгруэнтны.

**149.** Данъ отрѣзокъ $X'X$, раздѣляемый точкой $A'$ на двѣ части. Найдемъ средину $O$ этого отрѣзка, перегнувъ его вдвое. Въ такомъ случаѣ

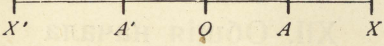


Рис. 52

$OA'$ равно половинѣ разности между $A'X$ и $X'A''$. Перегните $XX'$ въ точкѣ $O$ и возьмите на $OX$ точку $A$, соотвѣтствующую точкѣ $A'$. Тогда отрѣзокъ $AA'$ равенъ разности между $A'X$ и $X'A'$ и дѣлится точкой $O$ пополамъ. Если брать $A'$ ближе къ $O$, то $A'O$ уменьшается, а въ то же время $A'A$ уменьшается вдвое скорѣе. Этимъ свойствомъ пользуются при нахожденіи средины какого-нибудь отрѣзка при помощи циркуля.

**150.** Предыдущія разсужденія можно приложить и къ углу. Биссектрису легко найти помощью циркуля, находя точку пересѣченія двухъ круговъ.

**151.** На линіи $X'X$ отрѣзки вправо отъ $O$ можно разсматривать, какъ положительные, а отрѣзки влѣво отъ $O$, какъ отрицательные. Другими словами, точка, перемѣщающаяся отъ $O$ къ $A$, движется въ положительную сторону, а точка, движущаяся въ противоположномъ направленіи $OA'$, въ отрицательную.

$$AX = OX - OA.$$

$$OA' = OX' - A'X',$$

гдѣ обѣ части уравненія отрицательны.

**152.** Если $OA$, одна сторона угла $AOP$, неподвижна и если линія $OP$ вращается вокругъ $O$, то углы, образуемые ею съ $OA$, имѣютъ различную величину. Всѣ такіе углы, образуемые $OP$ при ея вращеніи въ сторону, противоположную направленію вращенія стрѣлки часовъ, считаются положительными. Углы же, образуемые $OP$ при ея вращеніи въ противоположную сторону, считаются отрицательными.

**153.** Послѣ полнаго оборота $OP$ совпадаетъ съ $OA$. Описанный при этомъ уголъ называется угломъ при точкѣ (перигономъ); онъ равенъ, очевидно, четыремъ прямымъ угламъ. Если $OP$ совершитъ половину оборота, она окажется на одной прямой съ $OA$. Описанный уголъ называется угломъ при прямой; онъ равенъ двумъ прямымъ угламъ. Когда $OP$ совершитъ четверть оборота, она будетъ перпендикулярна къ $OA$. Всѣ прямые углы равны. Равны между собой также всѣ углы при прямой и всѣ углы при точкѣ.

**154.** Двѣ прямыя, пересѣкающія другъ друга подъ прямымъ угломъ, образуютъ четыре конгруэнтныхъ квадранта. Двѣ прямыя съ инымъ взаимнымъ наклономъ другъ къ другу образуютъ четыре угла, изъ которыхъ вертикально-противоположные попарно конгруэнтны.

**155.** Положеніе точки на плоскости опредѣляется ея разстояніями отъ двухъ такихъ прямыхъ. При этомъ разстояніе отъ каждой изъ прямыхъ берется по линіи, параллельной другой изъ нихъ. Аналитическая геометрія изслѣдуетъ свойства плоскихъ фигуръ при помощи такого именно метода. Эти двѣ прямыя называются осями координатъ; разстоянія точки отъ осей называютъ координатами, а пересѣченіе осей началомъ координатъ. Этотъ методъ былъ найденъ Декартомъ въ 1637 году. Онъ оказалъ громадную услугу современнымъ изслѣдованіямъ.

**156.** Если двѣ оси $X'X$, $YY'$ пересѣкаются въ $O$, то разстоянія, измѣряемыя въ направленіи $OX$, т. е. вправо отъ $O$, положительны, а разстоянія, измѣряемыя влѣво отъ $O$, отрицательны. Подобнымъ же образомъ отсчитываемыя въ направленіи $OY$ разстоянія положительны, а взятыя въ направленіи $OY'$ отрицательны.

**157.** Осевая симметрія опредѣляется слѣдующимъ образомъ: если двѣ фигуры, лежащія въ одной и той же плоскости, могутъ быть приведены въ совпаденіе вращеніемъ одной изъ нихъ около нѣкоторой опредѣленной прямой въ той же плоскости на величину угла при прямой, то эти двѣ фигуры называются симметричными по отношенію къ этой прямой, какъ оси симметріи.

**158.** Центральная симметрія опредѣляется слѣдующимъ образомъ: если двѣ фигуры, лежащія въ одной и той же плоскости, могутъ быть приведены въ совпаденіе вращеніемъ, на величину угла при прямой, одной изъ нихъ около нѣкоторой неподвижной точки той же плоскости, то эти двѣ фигуры называются симметричными по отношенію къ этой точкѣ, какъ центру симметріи.

Въ первомъ случаѣ вращеніе происходитъ внѣ данной плоскости, а во второмъ въ ней.

Если въ двухъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ каждая изъ двухъ фигуръ представляетъ половину нѣкоторой фигуры, то эта цѣлая фигура называется симметричной по отношенію къ этой оси или къ этому центру,—послѣдніе носятъ названіе оси и центра симметріи или просто оси и центра.

**159.** Возьмемъ въ квадрантѣ $XOY$ какой-нибудь треугольникъ $PQR$. Найдемъ его изображеніе въ квадрантѣ $YOX'$, складывая бумагу по оси $YY'$ и прокалывая ее въ вершинахъ треугольника.

Найдемъ такимъ образомъ изображенія этихъ двухъ треугольниковъ въ четвертомъ и третьемъ квадрантахъ. Нетрудно видѣть, что треугольники въ сосѣднихъ квадрантахъ обладаютъ осевой симметріей, а треугольники въ противоположныхъ квадрантахъ обладаютъ центральной симметріей.

**160.** Правильные многоугольники съ нечетнымъ числомъ сторонъ обладаютъ осевой симметріей, а правильные многоугольники съ четнымъ числомъ сторонъ обладаютъ центральной симметріей.

**161.** Если фигура имѣетъ двѣ взаимно-перпендикулярныя оси симметріи, то точка ихъ пересѣченія является центромъ симметріи. Это имѣетъ мѣсто для правильныхъ многоугольниковъ съ четнымъ числомъ сторонъ, а также для нѣкоторыхъ

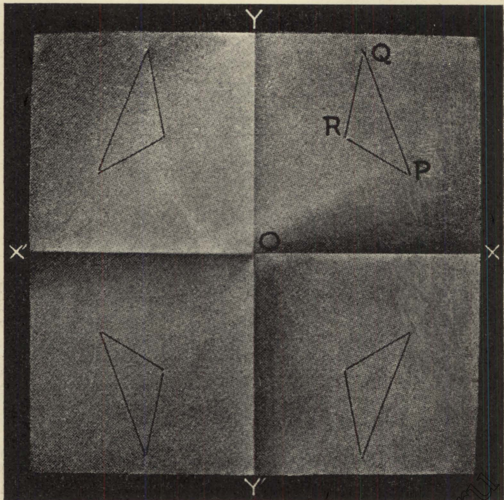


Рис. 53

кривыхъ, какъ, напримѣръ, для круга, эллипса, гиперболы и лемнискаты; правильные многоугольники съ нечетнымъ числомъ сторонъ могутъ имѣть нѣсколько осей симметріи, но среди нихъ не будетъ ни одной пары взаимно-перпендикулярныхъ. Если сложить листъ бумаги вдвое и обрѣзать, то полученный кусокъ бумаги будетъ имѣть ось симметріи; если же обрѣзать сложенный вчетверо листъ, то получится кусокъ, обладающій центральной симметріей (рис. 54).

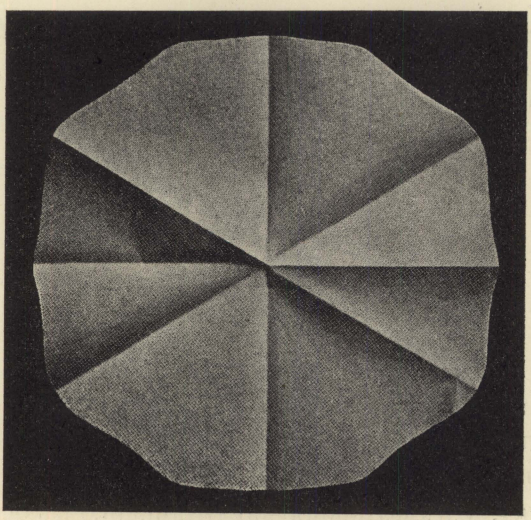

Рис. 54

**162.** Параллелограммы имѣютъ центръ симметріи. Четыреугольникъ, имѣющій форму бумажнаго змѣя, или трапеція съ двумя равными сторонами, противоположными и равно наклоненными къ двумъ другимъ сторонамъ, имѣетъ ось симметріи.

**163.** Положеніе точки на плоскости можетъ опредѣляться также ея разстояніемъ отъ нѣкоторой неподвижной точки и наклономъ прямой, соединяющей обѣ точки, къ нѣкоторой неподвижной прямой, проведенной чрезъ неподвижную точку.

Если $OA$ есть неподвижная прямая, а $P$ данная точка, то длина $OP$ и $\angle AOP$ вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки $P$.

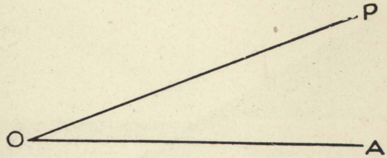


Рис. 55

$O$ называется полюсомъ, $OA$ полярной осью, $OP$ радіусомъ-векторомъ, $\angle AOP$ векторіальнымъ угломъ. Отрѣзокъ $OP$ и $\angle AOP$ называются полярными координатами точки $P$.

**164.** Симметричное по отношенію къ оси $OA$ изображеніе какой-нибудь фигуры можно получить перегибаніемъ по $OA$. Радіусы-векторы соотвѣтственныхъ точекъ равно наклонены къ этой оси.

**165.** Данъ треугольникъ $ABC$. Продолжите его стороны $CA$, $AB$, $BC$ соотвѣтственно до точекъ $D$, $E$, $F$. Предположимъ, что въ $A$ стоитъ человѣкъ, обращенный лицомъ къ $D$; если онъ пойдетъ отъ $A$ къ $B$, отъ $B$ къ $C$ и отъ $C$ къ $A$, то онъ послѣдовательно опишетъ углы $DAB$, $EBC$, $FCD$. Но придя къ своему начальному положенію въ $A$, онъ пройдетъ всѣ углы при точкѣ, т. е. четыре прямыхъ угла. Изъ этого мы заключаемъ, что сумма трехъ внѣшнихъ угловъ равна четыремъ прямымъ угламъ.

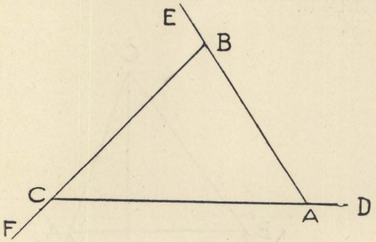


Рис. 56

То же самое заключеніе приложимо къ любому выпуклому многоугольнику.

**166.** Пусть этотъ человѣкъ стоитъ въ $A$ лицомъ къ $C$, затѣмъ поворачивается по направленію $AB$ и идетъ вдоль $AB$, $BC$ и $CA$. Въ этомъ случаѣ онъ сдѣлаетъ поворотъ, равный углу при прямой, т. е. двумъ прямымъ угламъ. Онъ послѣдовательно поворачивается на углы $CAB$, $EBC$ и $FCA$. Поэтому $\angle EBF + \angle FCA + \angle CAB$ (отрицательный уголъ) = углу при прямой.

Этимъ свойствомъ пользуются при поворачиваніи паровозовъ на желѣзныхъ дорогахъ. Локомотивъ, стоящій на $DA$, передней частью къ $A$, переводятъ на $CF$, передней частью къ $F$. Затѣмъ его пускаютъ заднимъ ходомъ и ведутъ на $EB$. Наконецъ, переднимъ ходомъ его переводятъ по $BA$ на $AD$. Паровозъ описалъ одинъ за другимъ углы $ACB$, $CBA$ и $BAC$. Поэтому, три внутреннихъ угла треугольника вмѣстѣ равны двумъ прямымъ угламъ.

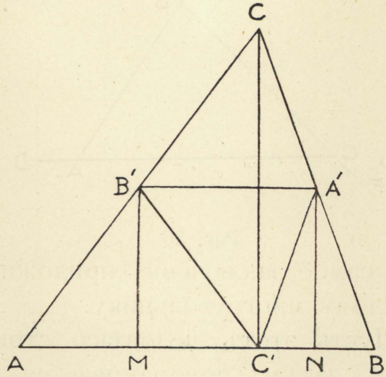


Рис. 57

**167.** То свойство треугольника, что его три внутренніе угла вмѣстѣ равны двумъ прямымъ угламъ, можно иллюстрировать съ помощью куска бумаги слѣдующимъ образомъ.

Перегните треугольникъ по $CC'$, перпендикулярно къ $AB$. Раздѣлите $C'B$ пополамъ въ $N$ и $AC'$ пополамъ въ $M$.

Перегните по $NA'$ и $MB'$, перпендикулярно къ $AB$; эти перпендикуляры пересѣкутъ $BC$ и $AC$ въ $A'$ и $B'$. Проведите $A'C'$ и $B'C'$.

Перегибая углы по $NA'$, $MB'$ и $A'B'$, мы найдемъ, что углы $A$, $B$, $C$ треугольника соотвѣтственно равны угламъ $B'C'A$, $BCA'$ и $A'C'B'$, которые вмѣстѣ составляютъ два прямыхъ угла.

**168.** Возьмите какую-нибудь прямую $ABC$. Проведите перпендикуляры къ $ABC$ въ точкахъ $A$, $B$ и $C$. На этихъ перпендикулярахъ возьмите точки $D$, $E$, $F$, равно отстоящія отъ основаній

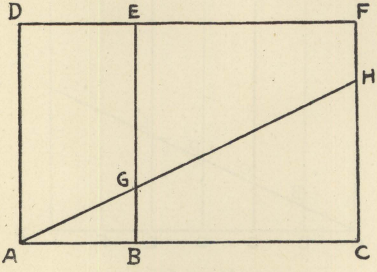


Рис. 58

перпендикуляровъ. При помощи наложенія легко видѣть и доказать, на основаніи равенства треугольниковъ, что отрѣзокъ $DE$ равенъ $AB$ и перпендикуляренъ къ $AD$ и къ $BE$ и что $EF$ равенъ $BC$ и перпендикуляренъ къ $BE$ и къ $CF$. Но $AB$ $(= DE)$ есть кратчайшее разстояніе между прямыми $AD$ и $BE$; это разстояніе сохраняетъ постоянную величину. Поэтому $AD$ и $BE$ никогда не могутъ встрѣтиться, т. е. онѣ параллельны. Отсюда заключаемъ, что прямыя, перпендикулярныя къ одной и той же прямой, параллельны между собой.

Два угла $BAD$ и $EBA$ вмѣстѣ равны двумъ прямымъ угламъ. Если вращать прямыя $AD$ и $BE$ около $A$ и $B$ на встрѣчу другъ другу, то онѣ встрѣтятся и сумма внутреннихъ угловъ будетъ меньше двухъ прямыхъ. При продолженіи же въ другую сторону эти прямыя не будутъ встрѣчаться. Въ этомъ и заключается столь извѣстный двѣнадцатый постулатъ Евклидовыхъ Началъ.

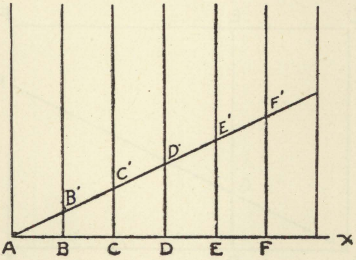


Рис. 59

**169.** Если нѣкоторая прямая $AGH$ встрѣчаетъ $BE$ въ $G$ и $CF$ въ $H$, то

$$\angle GAD = \text{накрестъ лежащему } \angle AGB,$$

такъ какъ каждый изъ нихъ есть дополненіе $\angle BAG$; а

$$\angle HGE = \text{соотвѣтственному } \angle GAD.$$

Поэтому каждый изъ нихъ равенъ $\angle AGB$.

Слѣдовательно, два угла $GAD$ и $EGA$ вмѣстѣ равны двумъ прямымъ.

**170.** Возьмите прямую $AX$ и отмѣтьте на ней, начиная отъ $A$, равные отрѣзки $AB$, $BC$, $CD$, $DE$.... Возставьте въ точкахъ $B$, $C$, $D$, $E$.... перпендикуляры къ $AE$. Пусть нѣкоторая прямая $AF'$ пересѣкаетъ эти перпендикуляры въ точкахъ $B'$, $C'$, $D'$, $E'$.... Получившіеся отрѣзки $AB'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$.... всѣ равны между собой.

Если $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ не равны, то

$$AB:BC = AB':B'C',$$

$$BC:CD = B'C':C'D' \text{ и т. д.}$$

**171.** Если $ABCDE$.... представляетъ нѣкоторый многоугольникъ, то подобные ему многоугольники могутъ быть получены слѣдующимъ образомъ.

Возьмите внутри многоугольника какую-нибудь точку $O$ и проведите линіи $OA$, $OB$, $OC$....

На $OA$ возьмите какую-нибудь точку $A'$ и проведите линіи $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$.... параллельно $AB$, $BC$, $CD$.... Полученный многоугольникъ $A'B'C'D'$.... будетъ подобенъ многоугольнику $ABCD$.... Многоугольники, построенные такимъ образомъ вокругъ общей точки, находятся въ перспективномъ отношеніи между собой. Точка $O$ можетъ лежать и внѣ многоугольника. Она называется центромъ перспективы.

**172.** Раздѣлить данный отрѣзокъ на 2, 3, 4, 5.... равныхъ частей. Пусть $AB$ есть данный отрѣзокъ. Проведите перпендикулярно къ $AB$, въ разныя отъ нея стороны, прямыя $AC$ и $BD$ и отложите $AC = BD$. Соедините $C$ и $D$ прямой, пересѣкающей $AB$ въ $P_2$. Въ такомъ случаѣ $AP_2 = P_2B$.

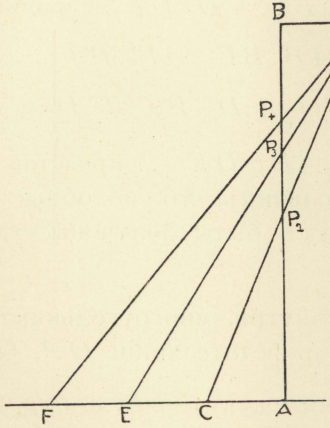


Рис. 60

Теперь продолжите $AC$ и отложите $CE = EF = FG = \ldots = AC$ или $BD$. Проведите линіи $DE$, $DF$, $DG \ldots$; пусть онѣ пересѣкаютъ $AB$ въ точкахъ $P_3$, $P_4$, $P_5 \ldots$.

Изъ подобія треугольниковъ получится

$$P_3B : AP_3 = BD : AE.$$

Отсюда $P_3B : AB = BD : AF$

$$= 1 : 3.$$

Подобнымъ же образомъ

$$P_4B : AB = 1 : 4$$

и т. д.

Если $$AB = 1,$$

то $$AP_2 = \frac{1}{1.2};$$

$$P_2P_3 = \frac{1}{2.3};$$

$$P_3P_4 = \frac{1}{3.4};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_nP_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Но $AP_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \ldots$ въ окончательной суммѣ равняется $AB$.

Поэтому $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$ до $\infty = 1$.

Или еще $$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2};$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Складывая, находимъ:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}=1-\dfrac{1}{n}.$

Предѣлъ $1-\dfrac{1}{n}$ при $n=\infty$ равенъ 1.

**173.** Слѣдующій простой пріемъ можетъ быть употребленъ для дѣленія отрѣзка на произвольное число равныхъ частей.

Возьмите прямоугольный кусокъ бумаги и отмѣтьте $n$ равныхъ отрѣзковъ на каждой или на одной изъ двухъ смежныхъ сторонъ. Перегните бумагу чрезъ точки дѣленія такъ, чтобы получить перпендикуляры къ сторонамъ. Отмѣтьте точки дѣленія и углы цифрами 0, 1, 2, .... $n$. Пусть требуется раздѣлить сторону другого куска бумаги $AB$ на $n$ равныхъ частей. Для этого помѣстите $AB$ такъ, чтобы точка $A$ или $B$ находилась въ 0, а $B$ или $A$ лежала на перпендикулярѣ, проходящемъ чрезъ $n$.

Въ этомъ случаѣ отрѣзокъ $AB$ долженъ быть больше $ON$. Но для меньшихъ отрѣзковъ можно взять меньшую сторону прямоугольника.

Тѣ точки, въ которыхъ $AB$ пересѣкаетъ перпендикуляры, и суть искомыя точки дѣленія.

**174.** Центръ средняго положенія. Если прямая $AB$ содержитъ $(m+n)$ равныхъ частей и дѣлится въ точкѣ $C$ такъ, что $AC$ содержитъ $m$, а $CB$ содержитъ $n$ этихъ частей, то, опустивъ изъ точекъ $A$, $C$, $B$ на нѣкоторую прямую перпендикуляры $AD$, $CF$ и $BE$, получимъ

$$m.BE+n.AD=(m+n).CF.$$

Въ самомъ дѣлѣ, проведите параллельно $ED$ прямую $BGH$, которая пересѣчетъ $CF$ въ $G$ и $AD$ въ $H$. Предположите, что чрезъ точки дѣленія $AB$ проведены прямыя параллельно $BH$. Эти прямыя раздѣлятъ $AH$ на $(m+n)$, а $CG$ на $n$ равныхъ частей.

Поэтому

$$n.AH=(m+n).CG;$$

и такъ какъ $DH$ и $BE$ равны $GF$ каждый, то

$$n.HD+m.BE=(m+n)GF.$$

Отсюда, складывая, получаемъ

$$n.(AH+HD)+m.BE=(m+n).(CG+GF)$$

или
$$n.AD+m.BE=(m+n).CF.$$

$C$ называется центромъ средняго положенія или среднимъ центромъ точекъ $A$ и $B$ для системы кратныхъ $m$ и $n$.

Этотъ принципъ можно распространить и на случай любого числа точекъ, не лежащихъ на одной прямой. Въ этомъ случаѣ, если $P$ будутъ обозначать основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на какую-нибудь прямую изъ точекъ $A$, $B$, $C$ и т. д., если $a$, $b$, $c$.... суть соотвѣтствующіе множители кратности, а $M$ есть средній центръ, то

$$a.AP+b.BP+c.CP+\ldots$$
$$=(a+b+c+\ldots).MP.$$

Если всѣ множители равны $a$, то

$$a(AP+BP+CP+\ldots)=na.MP,$$

гдѣ $n$ есть число точекъ.

**175.** Центръ средняго положенія нѣсколькихъ точекъ съ равными множителями получается слѣдующимъ образомъ. Найдите средину $G$ прямой, соединяющей двѣ какія-нибудь точки $A$ и $B$, соедините $G$ съ какой-нибудь третьей точкой $C$ и раздѣлите $GC$ въ $H$ такъ, чтобы $GH={}^1/_3\,GC$; соедините $H$ съ четвертой точкой $D$ и раздѣлите $HD$ въ $K$ такъ, чтобы $HK={}^1/_4\,HD$, и т. д.: послѣдняя найденная такимъ образомъ точка и будетъ центромъ средняго положенія данной системы точекъ.

**176.** Понятіе о среднемъ центрѣ или центрѣ средняго положенія заимствовано изъ статики, ибо система матеріальныхъ точекъ, помѣщенныхъ въ $A$, $B$, $C$.... и обладающихъ вѣсами $a$, $b$, $c$...., была бы въ равновѣсіи около средняго центра $M$, еслибы могла свободно вращаться около $M$ подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

Поэтому средній центръ находится въ тѣсной связи съ центромъ тяжести статики.

**177.** Средній центръ трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой, совпадаетъ съ пересѣченіемъ медіанъ треугольника, имѣющаго вершины въ этихъ трехъ точкахъ. Онъ является также центромъ тяжести или центромъ массы тонкой треугольной пластинки равномѣрной плотности.

**178.** Если $M$ есть средній центръ точекъ $A$, $B$, $C \ldots$ для множителей $a$, $b$, $c \ldots$, а $P$ какая-нибудь другая точка, то

$$a\,.\,AP^2 + b\,.\,BP^2 + c\,.\,CP^2 + \ldots$$
$$= a\,.\,AM^2 + b\,.\,BM^2 + c\,.\,CM^2 + \ldots$$
$$+ PM^2(a + b + c + \ldots).$$

Поэтому въ правильномъ многоугольникѣ, если $O$ есть центръ вписаннаго или описаннаго круга, а $P$ какая-нибудь точка, то

$$AP^2 + BP^2 + \ldots = OA^2 + OB^2 + \ldots + n\,.\,OP^2$$
$$= n\,.\,(R^2 + OP^2).$$

Отсюда

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + \ldots = 2n\,.\,R^2.$$

Подобнымъ же образомъ

$$BA^2 + BC^2 + BD^2 + \ldots = 2n\,.\,R^2$$
$$CA^2 + CB^2 + CD^2 + \ldots = 2n\,.\,R^2.$$

Складывая, находимъ:

$$2(AB^2+AC^2+AD^2+\ldots)=n\,.\,2n\,.\,R^2.$$

Отсюда

$$AB^2+AC^2+AD^2+\ldots=n^2\,.\,R^2.$$

**179.** Сумма квадратовъ отрѣзковъ, соединяющихъ среднiй центръ съ точками системы, представляетъ минимумъ.

Если $M$ есть среднiй центръ, а $P$ какая-нибудь другая точка, не принадлежащая къ этой системѣ, то

$\Sigma PA^2=\Sigma MA^2+\Sigma PM^2$ (гдѣ $\Sigma$ стоитъ вмѣсто словъ: „сумма всѣхъ выраженiй типа").

Отсюда слѣдуетъ, что $\Sigma PA^2$ представляетъ минимумъ, когда $PM=0$, т. е. когда $P$ есть среднiй центръ.

**180.** Свойства пересѣченiй прямыхъ и коллинеарности точекъ могутъ быть повѣрены при помощи складыванiя бумаги. Приведемъ нѣсколько примѣровъ:

1) Медiаны треугольника встрѣчаются въ одной точкѣ. Эта точка называется центроидомъ.

2) Высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ, называемой ортоцентромъ.

3) Перпендикуляры къ срединамъ сторонъ треугольника встрѣчаются въ одной точкѣ, называемой центромъ описаннаго круга.

4) Биссектрисы угловъ треугольника проходятъ чрезъ одну точку Эта точка называется центромъ вписаннаго круга.

5) Пусть $ABCD$ будетъ нѣкоторый параллелограммъ, а $P$ какая-нибудь точка. Проведите чрезъ $P$ параллельно $BC$ и $AB$ прямыя $GH$ и $EF$. Тогда діагонали $EG$, $HF$ и прямая $DB$ пересѣкутся въ одной точкѣ.

6) Если двѣ подобныя, но неравныя прямолинейныя фигуры расположены такимъ образомъ, что ихъ соотвѣтственныя стороны параллельны, то прямыя, соединяющія соотвѣтственныя вершины, пересѣкаются въ одной точкѣ. Эта точка называется центромъ подобія.

7) Если два треугольника расположены такимъ образомъ, что ихъ вершины лежатъ попарно на пересѣкающихся прямыхъ, то точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой. Это положеніе извѣстно подъ именемъ теоремы Дезарга. О такихъ двухъ треугольникахъ говорятъ, что они находятся въ перспективномъ отношеніи. Точка пересѣченія прямыхъ, проходящихъ чрезъ вершины, и прямая, соединяющая точки пересѣченія сторонъ, называются центромъ и осью перспективы.

8) Средины діагоналей полнаго четыреугольника лежатъ на одной прямой.

9) Если изъ какой-нибудь точки окружности, описанной около треугольника, опустить (и продолжить, если надо) на его стороны перпендикуляры, то основанія ихъ будутъ лежать на одной прямой. Эта прямая называется прямой Симсона.

Симсонова прямая дѣлитъ пополамъ прямую, соединяющую ортоцентръ съ той точкой, изъ которой опущены перпендикуляры.

10) Ортоцентръ, центръ описаннаго круга и центроидъ всякаго треугольника лежатъ на одной прямой.

Средина прямой, соединяющей ортоцентръ и центръ описаннаго круга, есть центръ т. наз. „круга девяти точекъ"; это названіе объясняется тѣмъ, что онъ проходитъ чрезъ основанія высотъ и медіанъ треугольника и чрезъ средины частей высотъ, заключенныхъ между ортоцентромъ и вершинами.

Центръ круга девяти точекъ вдвое дальше отъ ортоцентра, чѣмъ отъ центроида. Въ этомъ состоитъ теорема Понселе.

11) Если какія-нибудь шесть точекъ окружности $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ соединить послѣдовательно въ произвольномъ порядкѣ, то точки пересѣченія первой соединительной прямой съ четвертой, второй съ пятой и третьей съ шестой (продолженныхъ, если надо) лежатъ на одной прямой. Эта терема принадлежитъ Паскалю.

12) Прямыя, соединяющія вершины треугольника съ точками касанія его со вписанной окружностью, пересѣкаются въ одной точкѣ. Тѣмъ же свойствомъ обладаютъ внѣвписанныя окружности.

13) Внутреннія биссектрисы двухъ угловъ треугольника и внѣшняя биссектриса третьяго угла пересѣкаютъ противоположныя стороны въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

14) Внѣшнія биссектрисы угловъ треугольника пересѣкаютъ противоположныя стороны въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

15) Прямыя, проведенныя чрезъ какую-нибудь точку перпендикулярно къ прямымъ, соединяющимъ эту же точку съ вершинами какого-нибудь треугольника, встрѣчаютъ противоположныя стороны треугольника въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

16) Если взять какую-нибудь точку $O$ на оси симметріи двухъ равныхъ треугольниковъ $ABC$, $A'B'C'$, то прямыя $A'O$, $B'O$ и $C'O$ пересѣкаютъ стороны $BC$, $CA$ и $AB$ въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

17) Точки пересѣченія паръ касательныхъ къ какому-нибудь кругу въ концахъ хордъ, проходящихъ чрезъ данную точку, лежатъ на одной прямой. Эта прямая называется полярой данной точки относительно даннаго круга.

18) Изогонально сопряженныя прямыя трехъ пересѣкающихся прямыхъ $AX$, $BX$, $CX$ по отношенію къ угламъ треугольника $ABC$ пересѣкаются въ одной точкѣ. (Двѣ прямыя $AX$, $AY$ называются изогонально сопряженными по отношенію къ углу $BAC$, если онѣ составляютъ равные углы съ его биссектрисой).

19) Если въ треугольникѣ $ABC$ прямыя $AA'$, $BB'$, $CC'$, проведенныя изъ каждаго угла къ противоположной сторонѣ, сходятся въ одной точкѣ, то ихъ изотомическія сопряженныя относительно соотвѣтственныхъ сторонъ также сходятся въ одной точкѣ. (Прямыя $AA$, $AA''$ называются изотомическими сопряженными относительно стороны $BC$ треугольника $ABC$, если отрѣзки $BA'$ и $CA''$ равны между собой).

20) Три симмедіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ. (Изогонально сопряженная медіаны $AM$ треугольника называется ея симмедіаной).

# XIII. Коническія сѣченія

## *Отдѣлъ I.—Кругъ*

**181.** Листъ бумаги можно согнуть по многимъ направленіямъ, проходящимъ чрезъ одну и ту же точку. Точки, взятыя на каждой такой прямой въ одномъ и томъ же разстояніи отъ общей точки, будутъ лежать на окружности нѣкотораго круга, а общая точка будетъ его центромъ. Кругъ есть геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ неподвижной точки, его центра.

**182.** Можно провести любое число концентрическихъ круговъ. Они не могутъ пересѣкаться.

**183.** Центръ можно разсматривать, какъ предѣлъ концентрическихъ круговъ, описанныхъ около него, какъ около центра, если величина радіуса безпредѣльно уменьшается.

**184.** Круги съ равными радіусами могутъ быть совмѣщены и равны.

**185.** Кривизна круга одинакова по всей окружности. Поэтому, если вращать кругъ вокругъ центра, то онъ будетъ скользить вдоль самого себя. Отношеніе къ кругу какой-нибудь фигуры, неизмѣнно связанной съ центромъ, не измѣнится, если фигуру вращать около центра.

**186.** Прямая можетъ пересѣкать кругъ только въ двухъ точкахъ.

**187.** Всякій діаметръ дѣлится въ центрѣ круга пополамъ. По длинѣ онъ равенъ двумъ радіусамъ. Всѣ діаметры, какъ и радіусы, равны между собой.

**188.** Центръ круга есть въ то же время его центръ симметріи; концы любого діаметра суть соотвѣтственныя точки.

**189.** Каждый діаметръ является осью симметріи круга и наоборотъ.

**190.** Предложенія §§ 188, 189 вѣрны и для системъ концентрическихъ круговъ.

**191.** Каждый діаметръ дѣлитъ кругъ на двѣ равныя части, называемыя полукругами.

**192.** Два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра дѣлятъ кругъ на четыре равныя части, называемыя квадрантами.

**193.** Дѣля пополамъ прямые углы, образуемые діаметрами, затѣмъ раздѣляя пополамъ эти половины прямыхъ угловъ и т. д., получаемъ $2^n$ равныхъ круговыхъ секторовъ. Уголъ, образуемый радіусами каждаго сектора, равенъ $\frac{4}{2^n}$ прямого угла или $\frac{2\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

**194.** Какъ было показано въ предыдущихъ главахъ, прямой уголъ можно раздѣлить на 3, 5, 9, 10, 12, 15 и 17 равныхъ частей. И каждая часть прямого угла, полученная такимъ образомъ, можетъ быть подраздѣлена на $2^n$ равныхъ частей.

**195.** Можно вписать кругъ въ правильный многоугольникъ и описать около него. Первый кругъ будетъ касаться сторонъ многоугольника въ ихъ срединахъ.

**196.** Равныя дуги стягиваютъ равные углы при центрѣ и наоборотъ. Доказать это можно помощью наложенія. Если перегнуть кругъ по діаметру, то обѣ полуокружности совпадаютъ. Каждая точка одной полуокружности имѣетъ на другой соотвѣтственную точку, лежащую подъ нею.

**197.** Каждые два радіуса образуютъ равнобедренный треугольникъ, основаніемъ котораго служитъ хорда, соединяющая концы радіусовъ.

**198.** Радіусъ, дѣлящій пополамъ уголъ между двумя другими радіусами, перпендикуляренъ къ хордѣ—основанію и дѣлитъ ее пополамъ.

**199.** Если взять опредѣленный діаметръ, то можно провести сколько угодно такихъ паръ радіусовъ, чтобы радіусы каждой пары были равно наклонены къ діаметру по разныя стороны отъ него. Хорды, соединяющія концы каждой такой пары радіусовъ, будутъ перпендикулярны къ взятому діаметру; всѣ такія хорды будутъ параллельны между собой.

**200.** Тотъ же діаметръ дѣлитъ пополамъ всѣ упомянутыя хорды и всѣ дуги, стягиваемыя этими хордами, т. е. геометрическое мѣсто срединъ системы параллельныхъ хордъ является діаметромъ.

**201.** Перпендикуляры къ срединамъ всѣхъ хордъ круга проходятъ чрезъ центръ.

**202.** Равныя хорды равно отстоятъ отъ центра.

**203.** Концы двухъ радіусовъ, равно наклоненныхъ къ діаметру по разныя его стороны, находятся на одинаковомъ разстояніи отъ каждой точки этого діаметра. Слѣдовательно, можно описать любое число круговъ, проходящихъ чрезъ эти двѣ точки, съ центрами на этомъ діаметрѣ. Другими словами, геометрическимъ мѣстомъ центровъ круговъ, проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки, является прямая, перпендикулярная къ прямой, соединяющей обѣ точки, въ ея срединѣ.

**204.** Пусть $CC'$ будетъ нѣкоторая хорда, перпендикулярная къ радіусу $OA$. Въ такомъ случаѣ углы $AOC$ и $AOC'$ равны между собой. Предположите, что обѣ точки $C, C'$ движутся съ равной скоростью къ $A$; тогда хорда $CC'$ будетъ все время оставаться параллельной самой себѣ и перпендикулярной къ $OA$. Наконецъ, точки $C$, $A$ и $C'$ совпадутъ въ $A$, а $CAC'$ остается перпендикулярной къ $OA$. Точка $A$ есть послѣдняя точка, общая хордѣ и окружности. $CAC'$, будучи продолжена, въ концѣ концовъ обращается въ касательную къ кругу.

**205.** Касательная перпендикулярна къ діаметру, проходящему чрезъ точку касанія, и обратно.

**206.** Если двѣ хорды круга параллельны, то дуги, соединяющія ихъ концы сходнымъ образомъ, равны. Такъ, напримѣръ, равны дуги, соединяющія концы каждой хорды съ діагонально противоположными концами второй хорды и проходящія чрезъ другіе концы. Это легко видѣть, перегнувъ кругъ по діаметру, перпендикулярному къ параллельнымъ хордамъ.

**207.** Двѣ хорды (§ 206) и прямыя, соединяющія ихъ концы сходнымъ образомъ, образуютъ трапецію, у которой имѣется ось симметріи, а именно діаметръ, перпендикулярный къ параллельнымъ хордамъ. Діагонали такой трапеціи пересѣкаются на діаметрѣ. Складываніемъ легко убѣдиться въ томъ, что углы между каждой изъ параллельныхъ хордъ и каждой діагональю трапеціи равны между собой. Точно такъ же равны между собой углы, стягиваемые другими равными дугами

**208.** Уголъ при центрѣ круга, стягиваемый какой-нибудь дугой, вдвое больше угла съ вершиной на окружности, стягиваемаго тою же дугой

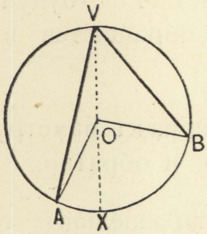


Рис. 61

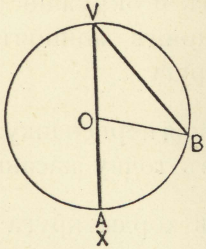


Рис. 62

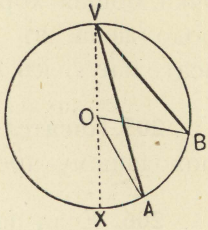


Рис. 63

Вписанный уголъ равенъ половинѣ центральнаго угла, опирающагося на ту же дугу.

Даны

вписанный уголъ $AVB$ и центральный уголъ $AOB$, опирающіеся на одну и ту же дугу $AB$.

Доказать, что $\angle AVB = \frac{1}{2} \angle AOB$.

Доказательство:

1. Предположите, что чрезъ центръ $O$ проведенъ діаметръ $VO$, продолженный до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ $X$.

Тогда $\angle XVB = \angle VBO$.

2. Но $\angle XOB = \angle XVB + \angle VBO$
$= 2 \angle XVB$.

3. Отсюда слѣдуетъ, что
$\angle XVB = \frac{1}{2} \angle XOB$.

4. Подобнымъ же образомъ

$$\angle AVX = \tfrac{1}{2} \angle AOX$$

(каждый изъ нихъ = нулю на рис. 62),
и, слѣдовательно,

$$\angle AVB = \tfrac{1}{2} \angle AOB.$$

Доказательство относится одновременно ко всѣмъ тремъ чертежамъ, на которыхъ точка $A$ переходитъ въ $X$ (рис. 62) и затѣмъ далѣе за $X$ (рис. 63).

**209.** Углы, стягиваемые одинаковой дугой, во всѣхъ частяхъ окружности имѣютъ одну и ту же величину, такъ какъ центральный уголъ остается однимъ тѣмъ же.

**210.** Уголъ, вписанный въ полукругъ, равенъ прямому углу.

**211.** Если хорда $DC$ перпендикулярна къ діаметру круга $AB$, то для четыреугольника $ACBD$ діаметръ $AB$ является осью симметріи. Такъ какъ каждый изъ угловъ $BCA$ и $ADB$ есть прямой, то сумма двухъ другихъ угловъ, $DBC$ и $CAD$, равна двумъ прямымъ угламъ. Если $A'$ и $B'$ суть какія-нибудь другія точки на дугахъ $DAC$ и $CBD$, то $\angle CAD = \angle CA'D$, $\angle DBC = \angle DB'C$. Слѣдовательно, $\angle CA'D + \angle DB'C$ = двумъ прямымъ угламъ. Поэтому и $\angle B'CA' + \angle A'DB'$ = двумъ прямымъ угламъ.

Обратно, если сумма двухъ противоположныхъ угловъ четыреугольника равна двумъ прямымъ, то его можно вписать въ кругъ.

**212.** Уголъ между касательной къ кругу и хордой, проходящей чрезъ точку касанія, равенъ

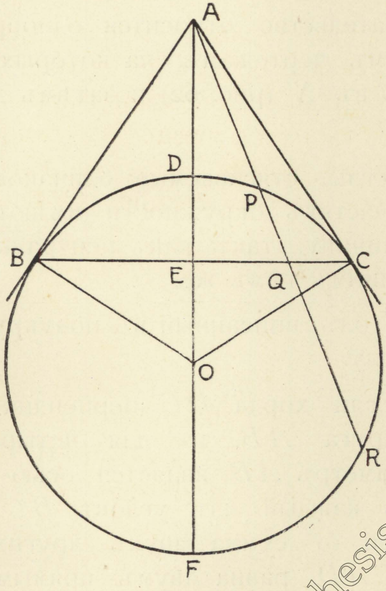


Рис. 64

углу, который опирается на эту хорду и вершина котораго лежитъ на сторонѣ круга, противоположной дугѣ круга, заключающейся между касательной и хордой.

Пусть $AC$ будетъ касательная къ кругу въ $A$, а $AB$ какая-нибудь хорда. Возьмите центръ $O$ круга и проведите $OA$ и $OB$. Изъ $O$ опустите на $AB$ перпендикуляръ $OD$.

Тогда $\angle BAC = \angle AOD = \frac{1}{2} \angle BOA$.

**213.** Перпендикуляры къ концамъ радіусовъ касаются круга въ этихъ концахъ (рис. 64). Прямая, соединяющая центръ съ точкой пересѣченія двухъ касательныхъ, дѣлитъ пополамъ углы между этими касательными и между радіусами къ точкамъ касанія. Та же прямая дѣлитъ пополамъ прямую, соединяющую точки касанія. Обѣ касательныя равны.

Въ этомъ нетрудно убѣдиться, перегибая чертежъ чрезъ центръ и точку пересѣченія касательныхъ.

Пусть $AC$, $AB$ будутъ двѣ касательныя, а $ADEOF$ прямая, проходящая чрезъ точку пересѣченія касательныхъ $A$ и чрезъ центръ $O$ и пересѣкающая кругъ въ точкахъ $D$ и $F$, а прямую $BC$ въ точкѣ $E$.

Въ такомъ случаѣ $AC$ или $AB$ является среднимъ геометрическимъ между $AD$ и $AF$, $AE$ есть среднее гармоническое, $AO$ среднее ариѳметическое.

$$AB^2 = AD.AE$$
$$AB^2 = OA.AF.$$

Поэтому $$AE = \frac{AD \cdot AF}{OA} = \frac{2AD \cdot AF}{AD + AF}.$$

Подобнымъ же образомъ, если чрезъ $A$ провести какую-нибудь другую хорду, встрѣчающую кругъ въ $P$ и $R$, а $BC$ въ $Q$, то отрѣзокъ $AQ$ будетъ гармоническимъ, а $AC$ геометрическимъ среднимъ между $AP$ и $AR$.

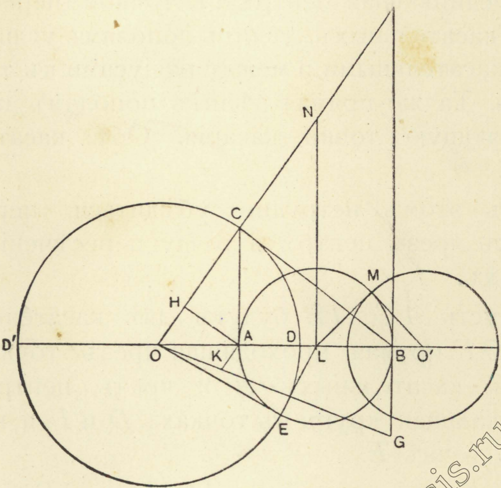


Рис. 65

**214.** Перегните прямоугольный треугольникъ $OCB$ по $CA$ перпендикулярно къ его гипотенузѣ. Найдите на $AB$ такую точку $D$, чтобы $OD = OC$ (рис. 65).

Тогда $OA \cdot OB = OC^2 = OD^2$,

откуда $OA : OC = OC : OB$,

$OA : OD = OD : OB$.

Опишемъ кругъ съ центромъ въ $O$ и радіусомъ, равнымъ $OC$ или $OD$.

Точки $A$ и $B$ являются взаимно-обратными по отношенію къ центру обращенія $O$ и къ кругу обращенія $CDE$.

Поэтому, если взять центръ этого круга за начало координатъ, то для основанія ординаты какой-нибудь точки круга обратной точкой будетъ точка пересѣченія касательной и оси абсциссъ.

**215.** Согните по $FBG$ перпендикулярно къ $OB$. Прямая $FBG$ носитъ названіе поляры точки $A$ по отношенію къ полярному кругу $CDE$ и полярному центру $O$, а точка $A$ называется полюсомъ прямой $FBG$. Обратно, $B$ есть полюсъ $CA$, а $CA$ есть поляра $B$ относительно того же круга.

**216.** Продолжите $OC$ до встрѣчи съ $FBG$ въ $F$ и перегните по $AH$ перпендикулярно къ $OC$.

Точки $F$ и $H$ являются взаимно-обратными.

$AH$ есть поляра $F$, а перпендикуляръ къ $OF$ въ $F$ является полярой точки $H$.

**217.** Точки $A$, $B$, $F$, $H$ лежатъ на одной окружности; другими словами, двѣ точки и ихъ взаимно-обратныя точки лежатъ на одной окружности и наоборотъ.

Теперь возьмите на $FBG$ какую-нибудь другую точку $G$. Проведите $OG$ и перегните по $AK$ перпендикулярно къ $OG$. Точки $K$ и $G$ будутъ взаимно-обратны относительно круга $CDE$.

**218.** Точки $F, B, G$ лежатъ на одной прямой, а ихъ поляры проходятъ чрезъ одну точку $A$.

Итакъ, поляры коллинеарныхъ точекъ сходятся въ одной точкѣ.

**219.** Точки, расположенныя такъ, что каждая изъ нихъ лежитъ на полярѣ другой, называются сопряженными точками; прямыя, расположенныя такимъ образомъ, что каждая проходитъ чрезъ полюсъ другой, называются сопряженными прямыми.

$A$ и $F$ суть сопряженныя точки, какъ и $A$ и $B$, $A$ и $G$.

Точка пересѣченія поляръ двухъ точекъ служитъ полюсомъ прямой, соединяющей эти двѣ точки.

**220.** Если $A$ перемѣщается къ $D$, то и $B$ движется къ $D$. Въ концѣ концовъ $A$ и $F$ совпадаютъ, а $FBG$ становится касательной въ $B$.

Поэтому поляра какой-нибудь точки круга есть въ то же время касательная къ кругу въ этой же точкѣ.

**221.** Если $A$ движется обратно къ $O$, то $B$ удаляется въ безконечность. Поляра центра обращенія или полярнаго центра есть безконечно-удаленная прямая.

**222.** Уголъ между полярами двухъ точекъ равенъ углу при полярномъ центрѣ, опирающемуся на эти двѣ точки.

**223.** Кругъ, описанный изъ $B$, какъ центра, радіусомъ $BC$, пересѣкаетъ кругъ $CDE$ ортогонально.

**224.** Раздѣлите $AB$ пополамъ точкой $L$ и перегните по $LN$ перпендикулярно къ $AB$. Центры всѣхъ круговъ, проходящихъ чрезъ $A$ и $B$, будутъ лежать на этой прямой. Эти круги пересѣкаютъ кругъ $CDE$ ортогонально. Такими кругами являются, между прочимъ, круги, описанные около четыреугольниковъ $ABFH$ и $ABGK$. $AF$ и $AG$ являются діаметрами этихъ круговъ соотвѣтственно. Изъ этого слѣдуетъ, что, если два круга пересѣкаютъ другъ друга ортогонально, то концы какого-нибудь діаметра одного изъ нихъ являются сопряженными точками по отношенію къ другому кругу.

**225.** Точки $O$, $A$, $H$ и $K$ лежатъ на одной окружности. Такъ какъ $H$, $A$ и $K$ взаимно-обратны съ точками, лежащими на прямой $FBG$, то линіей, обратною нѣкоторой прямой, является кругъ, проходящій чрезъ центръ круга обращенія и чрезъ полюсъ этой прямой, причемъ эти точки будутъ концами его діаметра; и обратно.

**226.** Если продолженіе $DO$ встрѣчаетъ кругъ $CDE$ въ $D'$, то $D$ и $D'$ гармонически сопряжены съ $A$ и $B$. Подобнымъ же образомъ, если какая-нибудь прямая, проходящая чрезъ $B$, пересѣкаетъ $AC$ въ $A'$, а кругъ $CDE$ въ $d$ и $d'$, то $d$ и $d'$ представляютъ гармоническія сопряженныя точекъ $A'$ и $B$.

**227.** Отложите въ какомъ-нибудь направленіи $LM = LB = LA$ и согните по $MO'$ перепендикулярно къ $LM$; пусть этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ продолженіе $AB$ въ точкѣ $O'$.

Кругъ, описанный около $O'$, какъ центра, радіусомъ $O'M$, пересѣчетъ кругъ съ центромъ въ $L$ и съ радіусомъ $LM$ ортогонально.

Но $$OL^2 = OE^2 + LE^2$$
и $$O'L^2 = O'M^2 + LM^2;$$
поэтому $$OL^2 - O'L^2 = OE^2 - O'M^2$$
и, слѣдовательно, $LN$ является радикальной осью круговъ $O(OC)$ и $O'(O'M)$.

Беря другія точки на полуокружности $AMB$ и повторяя то же самое построеніе, мы получимъ двѣ системы безконечнаго числа круговъ, соосныхъ съ $O(OC)$ и $O'(O'M)$, а именно, по одной системѣ съ каждой стороны радикальной оси $LN$. Точечнымъ кругомъ каждой системы является точка $A$

или $B$, которую можно разсматривать, какъ кругъ безконечно-малаго радіуса.

Эти двѣ безконечныя системы круговъ можно разсматривать, какъ одну соосную систему, круги которой составляютъ непрерывный рядъ отъ безконечно-большого до безконечно-малаго круга, причемъ радикальная ось является безконечно-большимъ, а предѣльныя точки безконечно-малыми кругами. Эта система соосныхъ круговъ называется предѣльно-точечнымъ образомъ.

Въ двухъ пересѣкающихся кругахъ общая хорда является ихъ радикальной осью. Поэтому всѣ круги, проходящіе чрезъ $A$ и $B$, оказываются соосными. Эта система соосныхъ круговъ называется образомъ общей точки.

**228.** Возьмите двѣ прямыя $OAB$ и $OPQ$. Изъ точекъ $A$ и $B$ прямой $OAB$ опустите перпендикуляры $AP$ и $BQ$ на прямую $OPQ$. Круги, описанные около $A$ и $B$ радіусами $AP$ и $BQ$, касаются прямой $OPQ$ въ $P$ и $Q$. Поэтому

$$OA:OB=AP:BQ.$$

Это соотношеніе имѣетъ мѣсто какъ въ томъ случаѣ, когда перпендикуляры направлены въ одну сторону, такъ и тогда, когда они лежатъ по разныя стороны отъ $OAB$. Касательная въ первомъ случаѣ является внѣшней, а во второмъ внутренней.

Въ первомъ случаѣ $O$ лежитъ внѣ $AB$, а во второмъ между $A$ и $B$. Въ первомъ случаѣ $O$ называется внѣшнимъ, а во второмъ внутреннимъ центромъ подобія обоихъ круговъ.

**229.** Прямая, соединяющая концы двухъ параллельныхъ между собой радіусовъ двухъ круговъ, проходитъ чрезъ центръ подобія круговъ: внѣшній, если радіусы направлены въ одну сторону, внутренній, если они имѣютъ противоположныя направленія.

**230.** Два радіуса какого-нибудь круга, проведенные въ точки пересѣченія этого круга съ какой-нибудь прямой, проходящей чрезъ тотъ или другой центръ подобія, соотвѣтственно параллельны двумъ радіусамъ другого круга, проходящимъ чрезъ точки его пересѣченія съ той же самой прямою.

**231.** Всѣ сѣкущія, проходящія чрезъ центръ подобія двухъ круговъ, разсѣкаются этими кругами на пропорціональныя части.

**232.** Если $B_1$, $D_1$ и $B_2$, $D_2$ суть точки пересѣченія, причемъ $B_1$, $B_2$ и $D_1$, $D_2$ являются соотвѣтственными точками, то

$$OB_1 \,.\, OD_2 = OD_1 \,.\, OB_2 = OC_2^2 \,.\, \frac{X_1 C_1}{X_2 C_2} \,.$$

Отсюда видно, что обращеніе круга, не проходящаго чрезъ центръ обращенія, даетъ снова кругъ.

Центръ обращенія есть центръ подобія первоначальнаго круга и обратнаго ему.

Первоначальный кругъ, кругъ ему обратный и кругъ обращенія оказываются соосными.

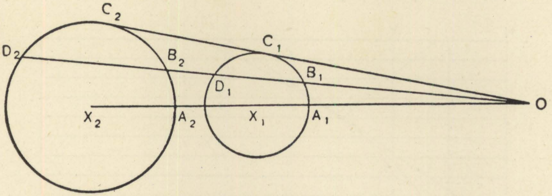


Рис. 66

**233.** Методъ обращенія является однимъ изъ наиболѣе важныхъ въ геометріи. Онъ былъ открытъ докторами Стёббсомъ и Инграмомъ (Stubbs, Ingram), членами Trinity College, въ Дублинѣ, около 1842 г. Этотъ методъ былъ употребленъ сэромъ Вилліамомъ Томсономъ для геометрическаго доказательства нѣкоторыхъ изъ наиболѣе трудныхъ теоремъ математической теоріи электричества.

*Отдѣлъ II.—Парабола*

**234.** Параболой называется кривая, описываемая точкой, которая движется по плоскости такимъ образомъ, что ея разстояніе отъ данной точки постоянно равно ея разстоянію отъ данной прямой.

**235.** Рис. 67 показываетъ, какъ можно получить параболу на бумагѣ. Сторона квадрата $MN$ служитъ директрисой, $O$ вершиной, $F$ фокусомъ. Перегибая по $OX$, вы получите ось. Верхнюю половину квадрата раздѣлите на нѣсколько частей

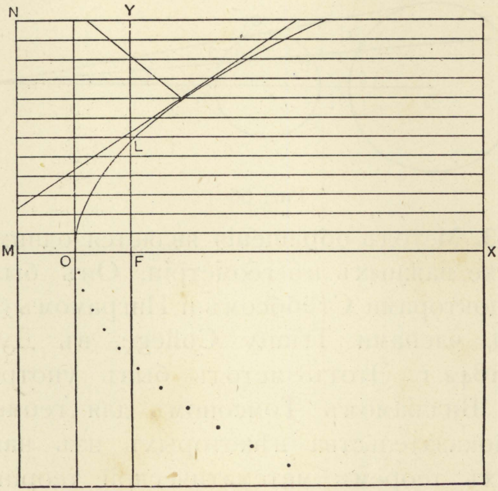


Рис. 67

прямыми, параллельными оси. Эти прямыя встрѣчаютъ директрису въ нѣсколькихъ точкахъ. Перегибайте бумагу, совмѣщая каждую изъ этихъ точекъ съ фокусомъ, и отмѣчайте каждый разъ ту точку на соотвѣтствующей горизонтальной прямой, въ которой послѣдняя перегибается. Полученныя такимъ образомъ точки будутъ лежать на параболѣ. Перегибаніе даетъ въ то же время и касательную къ кривой въ мѣстѣ перегиба.

**236.** Отрѣзокъ $FL$, перпендикулярный къ $OX$, называется полупараметромъ параболы.

**237.** Получивъ точки верхней половины кривой, можно получить и соотвѣтствующія точки нижней половины, складывая бумагу вдвое по оси и прокалывая ее въ уже найденныхъ точкахъ.

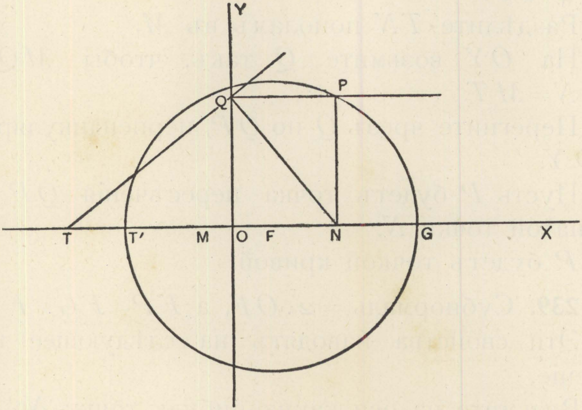


Рис. 68

**238.** Если ось параболы и ея касательную въ вершинѣ принять за оси координатъ, то уравненіе параболы получитъ такой видъ:

$$y^2=4ax \text{ или } PN^2=4 \cdot OF \cdot ON.$$

Параболу можно опредѣлить, какъ кривую, описываемую точкой, которая движется по плоскости такимъ образомъ, что квадратъ ея разстоянія отъ данной прямой измѣняется такъ же, какъ ея разстояніе отъ нѣкоторой другой прямой; или такъ, что ордината является средней пропорціональной между абсциссой и параметромъ (latus rectum), который равенъ $4 \cdot OF$. Отсюда слѣдующее построеніе.

Возьмите на продолженіи $FO$ отрѣзокъ $OT=4 \cdot OF$.

Раздѣлите $TN$ пополамъ въ $M$.

На $OY$ возьмите $Q$ такъ, чтобы $MQ = MN = MT$.

Перегните чрезъ $Q$ по $QP$, перпендикулярно къ $OY$.

Пусть $P$ будетъ точка пересѣченія $QP$ съ ординатой точки $N$.

$P$ будетъ точкой кривой.

**239.** Субнормаль $= 2 \cdot OF$, а $FP=FG=FT'$.

Эти свойства наводятъ на слѣдующее построеніе.

Возьмите на оси какую-нибудь точку $N$.

Отъ $N$ со стороны, противоположной вершинѣ, отложите $NG=2 \cdot OF$.

Перегните по $NP$ перпендикулярно къ $OG$ и найдите на $NP$ точку $P$, для которой $FP=FG$.

Точка $P$ принадлежитъ кривой.

Изъ центра $F$ можно описать кругъ, проходящій чрезъ $G$, $P$ и $T'$.

Удвоенная ордината этого круга есть въ то же время удвоенная ордината параболы, т. е. въ то время какъ $N$ движется вдоль оси, $P$ описываетъ параболу.

**240.** Возьмите между $O$ и $F$ (рис. 69) какую-нибудь точку $N'$. Согните по $RN'P'$ перпендикулярно къ $OF$.

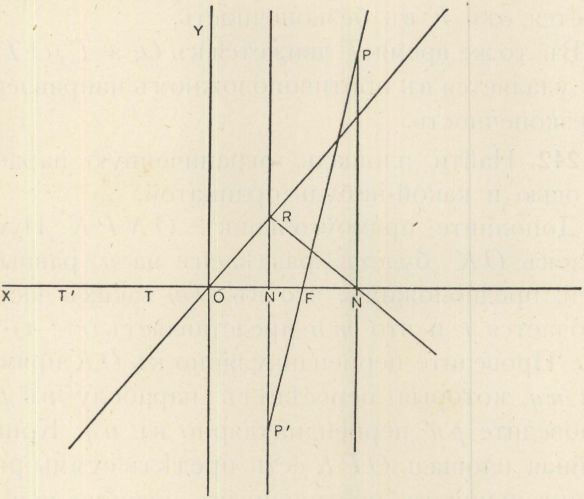


Рис. 69

Найдите такую точку $R$, чтобы $OR = OF$.

Сложите по $RN$ перпендикулярно къ $OR$, гдѣ $N$ лежитъ на оси. Перегните по $NP$ перпендикулярно къ оси.

На $OX$ отложите $OT = ON'$.

На $RN'$ найдите $P'$, для которой $FP' = FT$.

Перегните по $P'F$ и этимъ перегибомъ опредѣлите точку $P$ на $NP$.

Точки $P$ и $P'$ принадлежатъ кривой.

**241.** $N$ и $N'$ совпадаютъ, если $PFP'$ равно параметру.

Если $N'$ перемѣщается отъ $F$ къ $O$, то $N$ движется отъ $F$ въ безконечность.

Въ то же время $T$ движется къ $O$, а $T'$ $(OT' = ON)$ удаляется въ противоположномъ направленіи въ безконечность.

**242.** Найти площадь, ограниченную параболой, осью и какой-нибудь ординатой.

Дополните прямоугольникъ $ONPK$. Пусть отрѣзокъ $OK$ будетъ раздѣленъ на $n$ равныхъ частей; предположимъ, что въ $Om$ такихъ частей заключается $r$ и что $mn$ представляетъ $(r+1)$-ую часть. Проведите перпендикулярно къ $OK$ прямыя $mp$ и $nq$, которыя пересѣкутъ параболу въ $p$ и $q$; проведите $pn'$ перпендикулярно къ $nq$. Криволинейная площадь $OPK$ есть предѣлъ суммы ряда прямоугольниковъ, построенныхъ подобно $mn'$ на частяхъ, соотвѣтствующихъ $mn$.

Но $\square pn : \square NK = pm \,.\, mn : PK \,.\, OK$, а по свойству параболы

$$pm : PK = Om^2 : OK^2$$
$$= r^2 : n^2$$

и

$$mn : OK = 1 : n.$$

Отсюда

$$pm \cdot mn : PK \cdot OK = r^2 : n^3$$

и

$$\square\, pn = \frac{r^2}{n^3} \times \square\, NK.$$

Поэтому сумма ряда такихъ прямоугольниковъ

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} \times \square\, NK$$

$$= \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} \times \square\, NK$$

$$= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} \times \square\, NK$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \times \square\, NK$$

$= \frac{1}{3} \square\, NK$ въ предѣлѣ, т. е. для $n = \infty$.

Криволинейная площадь $OPK = \frac{1}{3}$ площади $\square\, NK$, а слѣдовательно, параболическая площадь $OPN = \frac{2}{3} \square\, NK$.

**243.** Такой же способъ доказательства примѣняется и для нахожденія параболической площади, ограниченной какими нибудь діаметромъ и ординатой.

*Отдѣленіе III.—Эллипсъ*

**244.** Эллипсомъ называется кривая, которую описываетъ точка, движущаяся по плоскости такъ, что ея разстояніе отъ данной точки находится въ постоянномъ, меньшемъ единицы, отношеніи къ ея разстоянію отъ данной прямой.

Пусть $F$ будетъ фокусъ, $OY$ директриса, $XX'$ перпендикуляръ къ $OY$ въ точкѣ $F$. Пусть $FA:AO$ и есть указанное постоянное отношеніе, причемъ $FA$ меньше $AO$. Здѣсь $A$ есть точка эллипса, называемая вершиной.

Какъ въ § 116, найдите на $XX'$ такую точку $A'$, чтобы

$$FA':A'O=FA:AO.$$

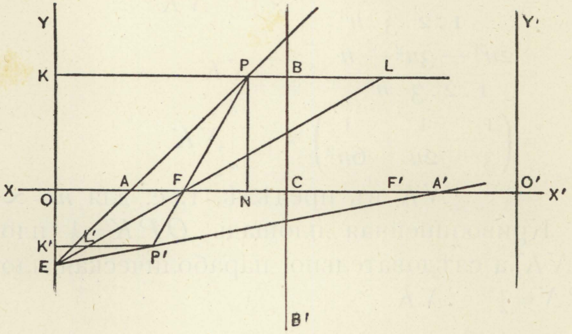


Рис. 70

Такая точка $A'$ тоже принадлежитъ эллипсу и представляетъ его вторую вершину.

Перегните отрѣзокъ $AA'$ вдвое, вы получите его средину $C$, называемую центромъ; отмѣтьте $F'$ и $O'$, соотвѣтствующія $F$ и $O$. Въ $O'$ перегните по $O'Y'$ перпендикулярно къ $XX'$. Точка $F'$ представляетъ второй фокусъ, а $O'Y'$ вторую директрису.

Перегнувъ, проведите чрезъ $C$ перпендикуляръ къ $AA'$.

$$FA:AO=FA':A'O$$
$$=(FA+FA'):(AO+A'O)$$
$$=AA':OO'$$
$$=CA:CO.$$

На перпендикулярѣ чрезъ $C$ возьмите точки $B'$ $B'$ по разныя стороны отъ $C$ и на такомъ разстояніи, чтобы $FB$ и $FB'$ равнялись каждый $CA$. Эти точки $B$, $B'$ принадлежатъ кривой.

$AA'$ называется большой, а $BB'$ малой осью.

**245.** Чтобы найти другія точки кривой, возьмите на директрисѣ какую-нибудь точку $E$ и перегните бумагу по $EA$ и по $EA'$. Перегните еще по $EF$ и отмѣтьте точку $P$, въ которой $FA'$ послѣ перегибанія пересѣчетъ продолженіе $EA$. Сгибаніемъ по $PF$ опредѣлите точку $P'$ на $EA'$. Точки $P$ и $P'$ принадлежатъ кривой.

Согните бумагу чрезъ $P$ и $P'$ такъ, чтобы $KPL$ и $K'L'P'$ были перпендикулярны къ директрисѣ, гдѣ $K$ и $K'$ суть точки директрисы, а $L$ и $L'$ лежатъ на $EL$.

$FL$ дѣлитъ уголъ $A'FP$ пополамъ, слѣдовательно, $\angle LEP=\angle PLF$ и $FP=PL$.

Далѣе,

$$FP:PK=PL:PK$$
$$=FA:AO.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\begin{aligned} FP' : P'K' &= P'L' : P'K' \\ &= FA' : A'O \\ &= FA : AO. \end{aligned}$$

Если $EO = FO$, то $FP$ перпендикулярно къ $FO$ и $FP = FP'$. Отрѣзокъ $PP'$ есть параметръ.

**246.** Когда найдено нѣсколько точекъ лѣвой половины кривой, то соотвѣтствующія точки другой половины можно найти, складывая бумагу вдвое вдоль малой оси и прокалывая ее въ уже найденныхъ точкахъ.

**247.** Эллипсъ можетъ быть опредѣленъ еще и такимъ образомъ:

Если точка $P$ движется такъ, что отношеніе $PN^2 : AN.NA'$ сохраняетъ постоянное значеніе, гдѣ $PN$ представляетъ разстояніе точки $P$ отъ прямой, соединяющей двѣ неподвижныя точки $A$ и $A'$; а $N$ лежитъ между $A$ и $A'$, то геометрическое мѣсто $P$ есть эллипсъ, для котораго $AA'$ есть ось.

**248.** Для круга $PN^2 = AN.NA'$.

Для эллипса $PN^2 : AN.NA'$ представляетъ постоянное отношеніе.

Это отношеніе можетъ быть меньше или больше единицы. Въ первомъ случаѣ $\angle APA'$ тупой, а кривая лежитъ внутри вспомогательнаго круга, описаннаго около $AA'$, какъ діаметра. Во второмъ случаѣ $\angle APA'$ острый и кривая лежитъ внѣ указаннаго круга. Въ первомъ случаѣ $AA'$ служитъ большой, а во второмъ малой осью.

**249.** Данное выше опредѣленіе отвѣчаетъ уравненію

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

причемъ начало координатъ находится въ вершинѣ эллипса.

**250.** $AN \, . \, NA'$ равняется квадрату, построенному на ординатѣ $QN$ вспомогательнаго круга, и $PN : QN = BC : AC$.

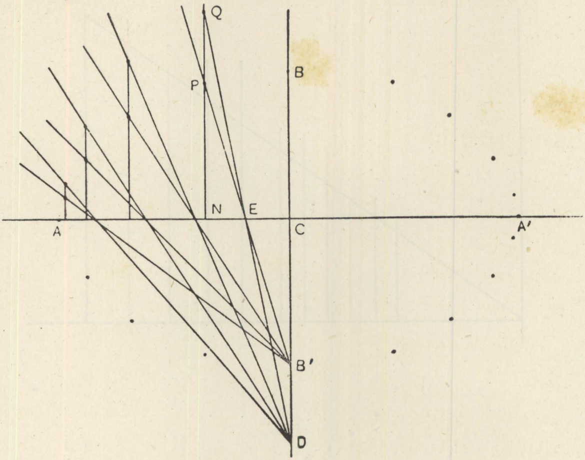


Рис. 71

**251.** Рис. 71 показываетъ, какъ можно опредѣлить точки, когда указанное постоянное отношеніе меньше единицы. Отложите $CD = AC$, т. е. большой полуоси. Чрезъ какую-нибудь точку $E$ на $AC$ проведите прямую $DE$ и продолжите ее до встрѣчи со вспомогательнымъ кругомъ въ $Q$. Проведите прямую $B'E$ и цродолжите ее до встрѣчи съ ординатой $QN$ въ $P$. Тогда $PN:QN = B'C:DC = BC:AC$. Такой же точно способъ примѣнимъ и въ случаѣ отношенія, бо́льшаго единицы. Если точки одного квадранта найдены, то по нимъ легко найдутся соотвѣтственныя точки другихъ квадрантовъ.

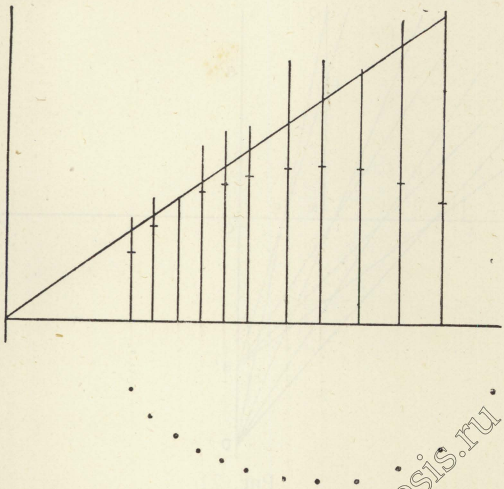

Рис. 72

**252.** Если $P$ и $P'$ суть концы двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса и ординаты $MP$ и $M'P'$ встрѣчаютъ вспомогательный кругъ въ $Q$ и въ $Q'$, то уголъ $QCQ'$ есть прямой.

Возьмите теперь прямоугольный кусокъ картона или бумаги и отложите на двухъ смежныхъ краяхъ его, начиная отъ вершины ихъ угла, отрѣзки, равные малой и большой оси. Вращая картонъ вокругъ $C$, нанесите соотвѣтствующія точки внѣшняго и внутренняго вспомогательныхъ круговъ. Пусть $Q$, $R$ и $Q'$, $R'$ будутъ точки, лежащія на одной прямой. Согните по ординатамъ $QM$ и $Q'M'$ и перпендикулярно къ этимъ ординатамъ, по $RP$ и $R'P'$. Точки $P$ и $P'$ пранадлежатъ кривой.

**253.** Точки этой кривой можно также легко найти, пользуясь слѣдующимъ свойствомъ коническихъ сѣченій.

Фокальное разстояніе какой-нибудь точки коническаго сѣченія равно длинѣ ординаты, продолженной до встрѣчи съ касательной къ кривой на концѣ параметра.

**254.** Даны двѣ точки $A$ и $A'$. Проведите прямую $AA'$ и продолжите ее въ обѣ стороны. Въ какой-нибудь точкѣ $D$ на продолженіи $A'A$ возставьте къ $AD$ перпендикуляръ $DR$. Чрезъ какую-нибудь точку $R$ на $DR$ проведите прямыя $RA$ и $RA'$. Въ $A$ согните по $AP$, перпендикулярно къ $AR$; пусть $P$ будетъ точка пересѣченія $AP$ съ $RA'$. Геометрическое мѣсто точекъ $P$, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ точки $R$ на $DR$, есть эллипсъ; $AA'$ есть его большая ось.

Въ самомъ дѣлѣ, согните по $PN$ перпендикулярно къ $AA'$.

Такъ какъ $PN$ параллельно $RD$, то

$$PN : A'N = RD : A'D.$$

Съ другой стороны, изъ треугольниковъ $APN$ и $DAR$

$$PN : AN = AD : RD.$$

Слѣдовательно, $PN^2 : AN . A'N = AD : A'D$,

т. е. равняется нѣкоторой постоянной величинѣ, меньшей единицы; а изъ построенія очевидно, что $N$ должно лежать между $A$ и $A'$.

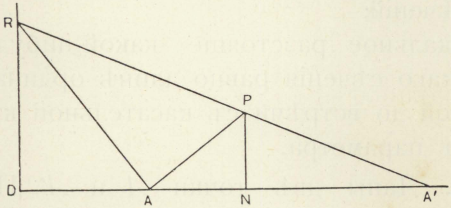


Рис. 73

*Отдѣлъ IV.—Гипербола*

**255.** Гиперболой называется кривая, описываемая точкой, которая движется по плоскости такимъ образомъ, что ея разстояніе отъ данной точки находится въ постоянномъ, большемъ единицы, отношеніи къ ея разстоянію отъ данной прямой.

**256.** Построеніе здѣсь такое же, какъ и для эллипса, но расположеніе частей иное. Какъ объяснено въ § 119, гл. X, $A'$ лежитъ слѣва отъ директрисы. Каждая директриса проходитъ между $A$ и $A'$, а фокусы лежатъ внѣ этихъ точекъ. Кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, открытыхъ каждая съ одной стороны. Эти вѣтви лежатъ цѣликомъ внутри двухъ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ двумя прямыми, проходящими чрезъ центръ и называемыми асимптотами. Эти послѣднія касаются кривой въ безконечности.

**257.** Гиперболу можно опредѣлить такъ: Если точка $P$ движется такимъ образомъ, что отношеніе $PN^2 : AN.NA'$ сохраняетъ постоянную величину,—гдѣ $PN$ есть разстояніе $P$ отъ прямой, соединяющей двѣ неподвижныя точки $A$ и $A'$, а $N$ не лежитъ между $A$ и $A'$—то геометрическое мѣсто $P$ есть гипербола, а $AA'$ ея поперечная ось.

Такое опредѣленіе соотвѣтствуетъ уравненію

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

гдѣ за начало координатъ принята лежащая справа вершина гиперболы.

Рис. 74 показываетъ, какъ можно найти точки этой кривой на основаніи послѣдней формулы.

Пусть $C$ есть центръ и $A$ вершина кривой.

$$CB' = CB = b;$$
$$CA' = CA = C''A = a.$$

Чрезъ $C$ проведите, перегнувъ бумагу, какую-нибудь прямую $CD$ и отложите на ней $CD = CA$. Согните по $DN$ перпендикулярно къ $CD$. Согните по $NQ$ перпендикулярно къ $CA$ и отложите $NQ = DN$. Согните по прямой $QA''$, пересѣкающей $CA$ въ точкѣ $S$. Согните по $B'S$, пересѣкающей $QN$ въ точкѣ $P$.

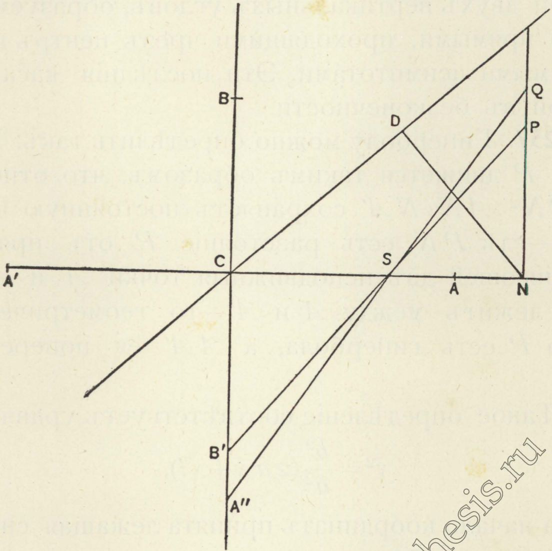


Рис. 74

Эта точка $P$ принадлежитъ нашей кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $DN$ касается круга на діаметрѣ $AA'$, то

$$DN^2 = AN \cdot (2CA + AN);$$

но такъ какъ $QN = DN$,
то $QN^2 = x(2a + x)$.
Затѣмъ

$$\frac{QN}{PN} = \frac{A'' C}{B' C}.$$

Возводя въ квадратъ, находимъ:

$$\frac{x(2a + x)}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

или

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Если $QN = b$, то $N$ есть фокусъ, а $CD$ одна изъ асимптотъ. Если дополнить прямоугольникъ со сторонами $AC$ и $BC$, то эта асимптота будетъ его діагональю.

**258.** Гиперболу можно построить также, пользуясь свойствомъ, указаннымъ въ § 253.

**259.** Гипербола называется равнобочной, если ея поперечная и сопряженная оси равны. Тогда $a = b$ и послѣднее уравненіе обращается въ

$$y^2 = (2a + x)x.$$

Въ этомъ случаѣ построеніе проще, такъ какъ ордината гиперболы представляетъ геометрическое среднее между $AN$ и $A'N$ и, слѣдовательно, равняется касательной изъ $N$ къ кругу, описанному около $AA'$, какъ діаметра.

**260.** Полярное уравненіе прямоугольной гиперболы, центръ которой принятъ за начало (полюсъ), а одна изъ осей за полярную ось, имѣетъ видъ

$$r^2 \cos 2\theta = a^2$$

или

$$r^2 = \frac{a}{\cos 2\theta} \cdot a.$$

Пусть $OX$, $OY$ будутъ оси; раздѣлите прямой уголъ $YOX$ на нѣкоторое число равныхъ частей. Пусть $XOA$, $AOB$ будутъ два изъ этихъ равныхъ угловъ. Согните по $XB$ перпендикулярно

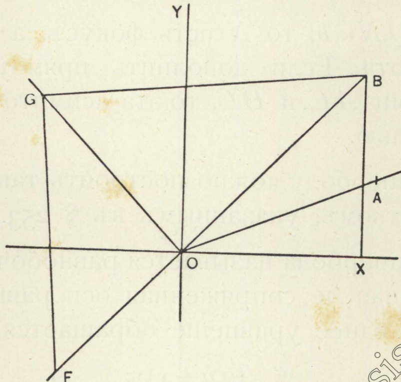


Рис. 75

къ $OX$. На продолженіи $BO$ отложите $OF = OX$. Согните по $OG$ перпендикулярно къ $BF$ и найдите на $OG$ такую точку $G$, чтобы уголъ $FGB$ былъ прямымъ. Отложите $OA = OG$. Полученная точка $A$ будетъ лежать на нашей кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ каждый изъ угловъ $XOA$ и $AOB$ равенъ $\theta$, то

$$OB = \frac{a}{\cos 2\theta}.$$

Поэтому $OA^2 = OG^2 = OB \,.\, OF = \frac{a}{\cos 2\theta} \cdot a$,

слѣдовательно, $r^2 \cos 2\theta = a^2$.

**261.** Точки трисекціи ряда сопредѣльныхъ круговыхъ дугъ лежатъ на вѣтвяхъ двухъ гипербола, эксцентрицитетъ которыхъ равенъ 2. Эта теорема даетъ способъ трисекціи угла.

## XIV. Различныя кривыя

**262.** Въ этой послѣдней главѣ я намѣренъ дать указанія относительно построенія нѣкоторыхъ общеизвѣстныхъ кривыхъ.

*Циссоида*

**263.** Это названіе означаетъ плющевидную кривую. Опредѣляется она такъ: Пусть $OQA$ (рис. 76) будетъ полукругъ на неподвижномъ діаметрѣ $OA$ и пусть $QM$ и $RN$ означаютъ двѣ ординаты этого полукруга, равноудаленныя отъ центра. Проведите прямую $OR$, встрѣчающую $QM$ въ точкѣ $P$. Геометрическимъ мѣстомъ такихъ точекъ $P$ и будетъ циссоида.

Если $OA=2a$, то уравненіе кривой есть

$$y^2(2a-x)=x^3.$$

Пусть $PR$ встрѣчаетъ въ точкѣ $D$ перпендикуляръ, возставленный въ $C$. Проведите линію $AP$, пересѣкающую $CD$ въ $E$.

$$RN:CD=ON:OC=AM:AC=PM:EC,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$RN:PM=CD:CE.$$

Съ другой стороны

$$RN : PM = ON : OM = ON : AN = ON^2 : NR^2$$
$$= OC^2 : CD^2.$$

Слѣдовательно,

$$CD : CE = OC^2 : CD^2.$$

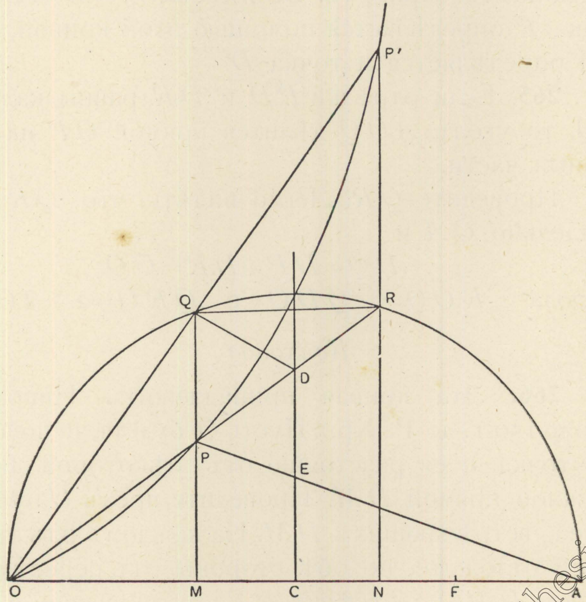


Рис. 76

Если $CF$ есть геометрическое среднее между $CD$ и $CE$, то

$$CD : CF = OC : CD$$

и $$OC : CD = CD : CF = CF : CE.$$

Значитъ, $CD$ и $CF$ представляютъ два геометрическихъ среднихъ между $OC$ и $CE$.

**264.** Циссоида была придумана Діоклесомъ (II ст. до Р. Хр.) для нахожденія двухъ среднихъ геометрическихъ между двумя отрѣзками вышеописаннымъ образомъ. Если даны $OC$ и $CE$, то точка $P$ опредѣляется помощью этой кривой, а по ней опредѣляется и точка $D$.

**265.** Если отрѣзки $PD$ и $DR$ равны каждый $OQ$, то уголъ $AOQ$ дѣлится прямой $OP$ на три равныя части.

Проведите $QR$. Легко видѣть, что $QR$ параллельно $OA$ и

$$DQ=DP=DR=OQ.$$

Отсюда $\angle ROQ=\angle QDO=2\angle QRO=2\angle AOR$.

### *Конхоида*

**266.** Эта кривая принадлежитъ Никомеду (около 150 г. до Р. Хр.). Пусть $O$ будетъ неподвижная точка, $a$ ея разстояніе отъ нѣкоторой неподвижной прямой $DM$. Проведите чрезъ $O$ пучокъ лучей, встрѣчающихъ $DM$. На каждомъ изъ этихъ лучей отложите, по обѣ стороны отъ пересѣченія его съ $DM$, по отрѣзку $b$. Геометрическое мѣсто опредѣленныхъ такимъ образомъ точекъ и есть конхоида. Смотря по тому, будетъ ли $b>$, $=$ или $<a$, начало представляетъ узелъ, остріе или сопряженную точку. Нашъ рисунокъ изображаетъ тотъ случай, когда $b>a$.

**267.** Этой кривой также пользовались для нахожденія двухъ геометрическихъ среднихъ и для трисекціи угла.

Пусть $OA$ будетъ бо́льшій изъ тѣхъ двухъ отрѣзковъ, для которыхъ требуется найти два геометрическихъ среднихъ.

Раздѣлите $OA$ пополамъ въ $B$; изъ $O$, какъ изъ центра, опишите, окружность радіусомъ $OB$. Чрезъ $B$ проведите хорду $BC$, равную меньшему изъ двухъ данныхъ отрѣзковъ. Проведите $AC$ и продолжите $AC$ и $BC$ до точекъ $D$ и $E$, лежащихъ на одной прямой съ $O$ и отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніе $DE = OB$ или $BA$.

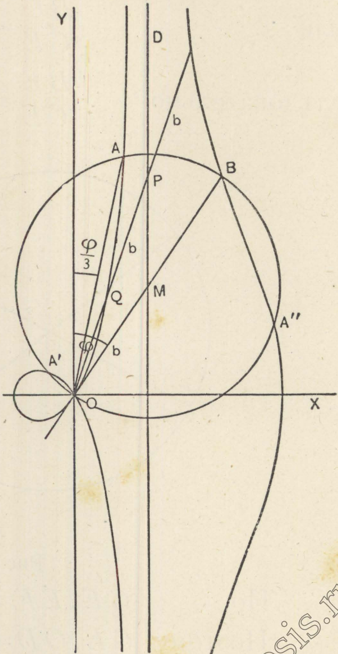

Рис 77

Отрѣзки $ED$ и $CE$ и суть два искомыхъ среднихъ пропорціональныхъ.

Пусть $F$ и $G$ будутъ точки пересѣченія $OE$ съ кругомъ.

На основанiи теоремы Менелая

$$BC.ED.OA = CE.OD.BA,$$

поэтому $$BC.OA = CE.OD$$

или $$\frac{BC}{CE} = \frac{OD}{OA};$$

слѣдовательно, $$\frac{BE}{CE} = \frac{OD+OA}{OA} = \frac{GE}{OA}.$$

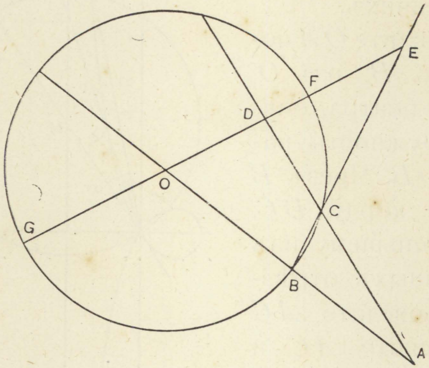


Рис. 78

Но $$GE.EF = BE.EC.$$

Поэтому $$GE.OD = BE.EC,$$

$$OA.OD = EC^2$$

и наконецъ $$OA : CE = CE : OD = OD : BC.$$

Положенiе $E$ найдено при помощи конхоиды, для которой $AD$ служитъ асимптотой, $O$ фокусомъ, а $DE$ постояннымъ отрѣзкомъ.

**268.** Трисекція угла выполняется такимъ образомъ. На рис. 77 пусть $\varphi = \angle MOY$, который требуется раздѣлить на три части. На $OM$ отложите произвольный отрѣзокъ $OM = b$. Изъ центра $M$ радіусомъ $b$ опишите кругъ и проведите чрезъ $M$ перпендикулярно къ оси $X$, имѣющей начало въ $O$, вертикальную прямую, представляющую асимптоту конхоиды, которую надо построить. Постройте конхоиду. Соедините $O$ съ $A$, т. е. съ пересѣченіемъ круга и конхоиды. Полученный $\angle AOY$ равенъ одной трети $\varphi$.

### *Версьера* *)

**269.** Если $OQA$ (рис. 79) представляетъ полукругъ, $NQ$ одну изъ его ординатъ и отрѣзокъ $NP$ равенъ четвертой пропорціональной къ $ON$, $OA$ и $QN$, то геометрическое мѣсто точекъ $P$ есть версьера.

Согните по $AM$ перпендикулярно къ $OA$.

Согните чрезъ $O$, $Q$ и $M$.

Дополните прямоугольникъ $NAMP$.

$$PN:QN = OM:OQ$$
$$= OA:ON.$$

Точка $P$ есть одна изъ точекъ нашей кривой.

Ея уравненіе есть

$$xy^2 = a^2\,(a - x).$$

---

*) По имени нашедшей ее эту линію называютъ также *аньезьерой. Прим. пер.*

Эта кривая была предложена Маріей Гаэтаной Аньези, профессоромъ математики въ Болоньѣ въ XVIII столѣтіи.

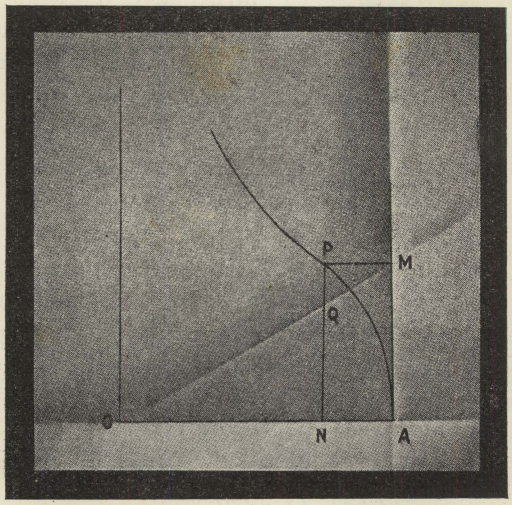


Рис. 79

## *Кубическая парабола*

**270.** Уравненіе этой кривой есть $a^2y=x^3$.

Пусть $OX$, $OY$ будутъ прямоугольныя оси, $OA=a$ и $OX=x$.

На оси $OY$ возьмите $OB=x$.

Проведите $BA$ и затѣмъ, перпендикулярно къ $AB$, прямую $AC$, которая встрѣтитъ ось $OY$ въ точкѣ $C$.

Проведите $CX$ и, перпендикулярно къ $CX$, прямую $XY$.

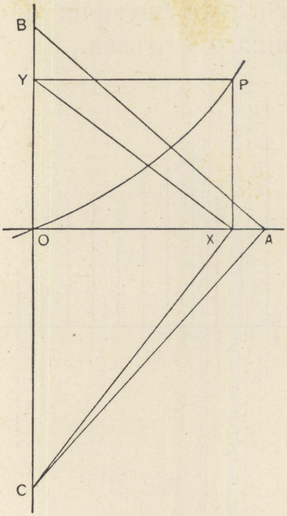


Рис. 80

$XOY$ дополните до прямоугольника.

Точка $P$ принадлежитъ разсматриваемой кривой.

$$y = XP = OY = \frac{x^2}{OC} = x^2 . \frac{x}{a^2} = \frac{x^3}{a^2}$$

или $$a^2 y = x^3.$$

### *Гармоническая кривая или синусоида*

**271.** Это та кривая, форму которой принимаетъ звучащая струна. Въ ней ординаты пропорціональны синусамъ угловъ, которые во столько же разъ меньше четырехъ прямыхъ угловъ, во сколько разъ соотвѣтствующія абсциссы меньше нѣкотораго даннаго отрѣзка.

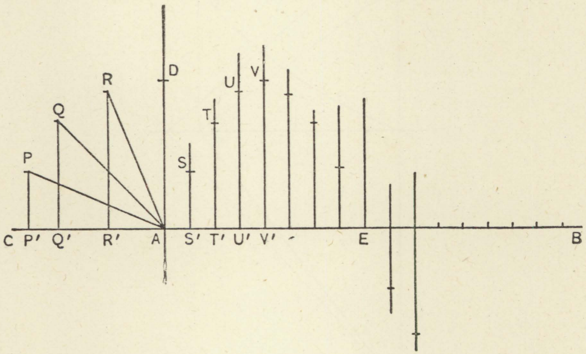


Рис. 81

Пусть $AB$ есть данный отрѣзокъ (рис. 81). Продолжите $BA$ до $C$ и согните по $AD$ перпендикулярно къ $AB$. Прямой уголъ $DAC$ раздѣлите на нѣсколько равныхъ частей, напримѣръ, на четыре. На каждомъ радіусѣ отложите отрѣзокъ, равный амплитудѣ колебанія, $AC=AP=$ $=AQ=AR=AD$.

Изъ точекъ $P$, $Q$, $R$ опустите на $AC$ перпендикуляры; отрѣзки $PP'$, $QQ'$, $RR'$ и $DA$ будутъ пропорціональны синусамъ угловъ $PAC$, $QAC$, $RAC$, $DAC$.

Раздѣлите $AB$ пополамъ въ $E$; отрѣзки $AE$ и $EB$ раздѣлите каждый на вдвое бо́льшее число частей, чѣмъ было взято частей прямого угла. Проведите ординаты $SS'$, $TT'$, $UU'$, $VV'$ и т. д., соотвѣтственно равныя $PP'$, $QQ'$, $RR'$, $DA$ и т. д. Тогда точки $S$, $T$, $U$, $V$ и будутъ точками искомой кривой, причемъ $V$ будетъ ея верхней точкой. Складывая по $VV'$ и дѣлая проколы въ $S$, $T$, $U$, $V$, мы получимъ соотвѣтственныя точки части $VE$ кривой. Часть кривой, соотвѣтствующая отрѣзку $EB$, равна части $AVE$, но лежитъ по другую сторону $AB$. Разстояніе $AE$ равно длинѣ полуволны, которая повторяется отъ $E$ до $B$ по другую сторону $AB$. Точка $E$ есть точка перегиба кривой; въ ней радіусъ кривизны становится безконечно большимъ.

### *Овалы Кассини*

**272.** Если точка движется по плоскости такимъ образомъ, что произведеніе ея разстояній отъ двухъ неподвижныхъ точекъ плоскости сохраняетъ постоянную величину, то эта точка описываетъ одинъ изъ оваловъ Кассини. Неподвижныя точки называются фокусами. Уравненіе кривой есть $rr' = k^2$, гдѣ $r$ и $r'$ означаютъ разстоянія какой-нибудь точки кривой отъ ея фокусовъ, а $k$ есть нѣкоторая постоянная.

Пусть $F$ и $F'$ будутъ фокусы. Проведите прямую $FF'$. Раздѣлите $FF'$ пополамъ въ $C$ и чрезъ $C$ проведите $BCB'$ перпендикулярно къ $FF'$. Найдите такія точки $B$ и $B'$, чтобы $FB = FB' = k$. Ясно, что такія точки $B$, $B'$ принадлежатъ нашей кривой.

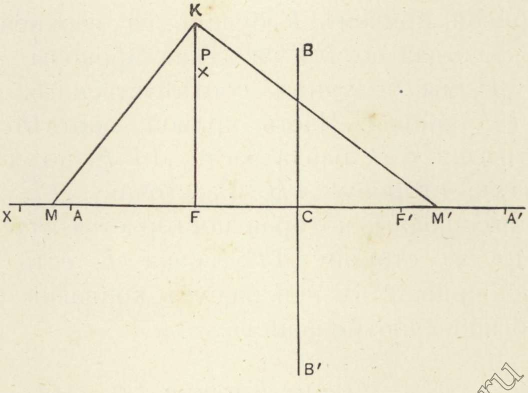


Рис 82

Согните по $FK$ перпендикулярно къ $FF'$ и отложите $FK = k$; на $FF'$ отложите $CA = CA' = CK$. Полученныя точки $A$, $A'$ лежатъ на нашей кривой.

Въ самомъ дѣлѣ

$$CA^2 = CK^2 = CF^2 + FK^2.$$

Слѣдовательно,

$$CA^2 - CF^2 = k^2 = (CA + CF)(CA - CF) = F'A \,.\, FA.$$

Продолжите $FA$ и отложите $AT = FK$. На $AT$ возьмите какую-нибудь точку $M$ и проведите $MK$. Перегните по $KM'$ перпендикулярно къ $MK$; $KM'$ пересѣчетъ $FA'$ въ $M'$.

Въ такомъ случаѣ $FM \,.\, FM' = k^2$.

Изъ $F$ и $F'$, какъ изъ центровъ, опишите дуги радіусами $FM$ и $F'M'$; эти дуги пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ $P$. Эта точка принадлежитъ нашей кривой.

Когда найдено нѣсколько точекъ между $A$ и $B$, соотвѣтственныя точки въ другихъ квадрантахъ можно намѣтить, перегнувъ бумагу.

Если $FF' = \sqrt{2}\,k$, а $rr' = \frac{1}{2}k^2$, то кривая принимаетъ форму лемнискаты (§ 279).

Если $FF'$ больше, чѣмъ $\sqrt{2}\,k$, то кривая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ оваловъ, по одному вокругъ каждаго фокуса.

### *Логариѳмическая кривая*

**273.** Уравненіе этой кривой есть $y = a^x$.

Ордината въ началѣ равна единицѣ.

Когда абсцисса возрастаетъ въ ариѳметической прогрессіи, ордината увеличивается въ геометрической.

Значенія $y$, отвѣчающія цѣлымъ значеніямъ $x$, можно получить помощью построенія, даннаго въ § 108.

Эта кривая уходитъ въ безконечность, не выходя изъ угла $XOY$.

Если $x$ отрицательно, то $y=\frac{1}{a^x}$ и, слѣдовательно, приближается къ нулю при возрастаніи абсолютной величины $x$. Поэтому отрицательная сторона оси $OX$ является асимптотой этой кривой.

*Обыкновенная цѣпная линія*

**274.** Цѣпной линіей называется форма, принимаемая тяжелой (вѣсомой) нерастяжимой нитью, свободно висящей на двухъ точкахъ и находящейся подъ дѣйствіемъ только силы тяжести.

Уравненіе этой кривой имѣетъ видъ

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

если за ось $y$ принять вертикальную прямую, проходящую чрезъ самую низкую точку кривой, а за ось $x$ горизонтальную прямую, лежащую въ плоскости нити на разстояніи $c$ книзу отъ самой низкой точки кривой; $c$ называется параметромъ кривой, а $e$ есть основаніе натуральныхъ логариѳмовъ.

Если $x=c$, то $y=\frac{c}{2}(e^1+e^{-1})$;

если $x=2c$, то $y=\frac{c}{2}(e^2+e^{-2})$ и т. д.

**275.** Изъ уравненія

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

можно графически опредѣлить $e$.

$$ce-2y\sqrt{e}+c=0$$

$$\sqrt{e}=\frac{1}{c}(y+\sqrt{y^2-c^2})$$

$$c\sqrt{e}=y+\sqrt{y^2-c^2}.$$

$\sqrt{y^2-c^2}$ можно найти, какъ геометрическое среднее между $y+c$ и $y-c$.

### *Кардіоида или сердцевидная кривая*

**276.** Чрезъ какую-нибудь неподвижную точку $O$, лежащую на окружности радіуса $a$, проведите пучокъ прямыхъ; на каждой изъ нихъ отложите, считая отъ точки ея пересѣченія съ окружностью, по отрѣзку, равному $2a$, въ ту и въ другую сторону. Концы этихъ отрѣзковъ лежатъ на кардіоидѣ.

Уравненіе этой кривой есть $r=2a(1+\cos\theta)$.

Въ началѣ координатъ будетъ остріе кривой.

Кардіоида есть обращеніе параболы относительно ея фокуса, какъ центра обращенія.

### *Улитка*

**277.** Чрезъ какую-нибудь постоянную точку на кругѣ проведите пучокъ хордъ; на каждой изъ нихъ отложите въ обѣ стороны отъ точки встрѣчи съ окружностью по отрѣзку опредѣленной длины.

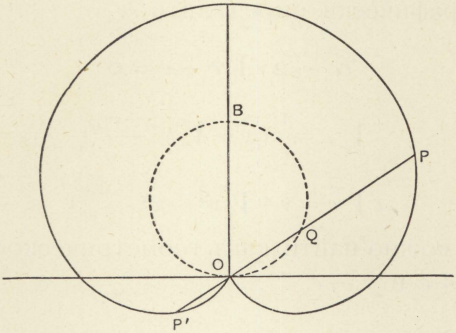


Рис. 83

Если эти отрѣзки постоянной длины равны діаметру взятаго круга, то кривая будетъ кардіоидой.

Если же эти отрѣзки больше діаметра, то кривая лежитъ цѣликомъ внѣ круга.

Если отрѣзки короче діаметра, то часть кривой лежитъ внутри круга въ видѣ петли.

Если наконецъ длина отрѣзковъ равна половинѣ діаметра, то кривая получаетъ названіе трисектрисы вслѣдствіе того, что при ея помощи можно раздѣлить любой уголъ на три части.

Уравненіе этой кривой есть $r = a\cos\theta + b$.

Улитка перваго рода представляетъ обращеніе эллипса, улитка второго рода представляетъ обращеніе гиперболы, причемъ въ томъ и другомъ случаѣ за центръ обращенія надо брать одинъ изъ фокусовъ. Петля есть обращеніе той же вѣтви гиперболы около другого фокуса.

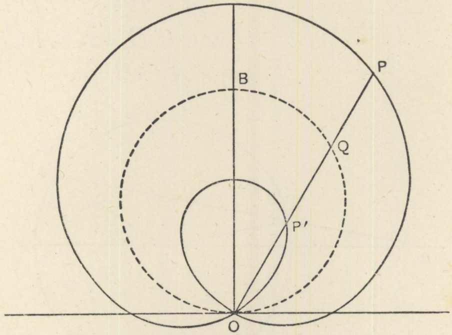

Рис. 84

**278**. Трисектрису примѣняютъ слѣдующимъ образомъ:

Данъ уголъ $AOB$. Отложите отрѣзки $OA$, $OB$, равные радіусу круга. Опишите кругъ радіуса $OA$ (или $OB$) съ центромъ въ $O$. Продолжите $AO$ неопредѣленно далеко за кругъ. Наложите трисектрису такъ, чтобы точка $O$ совпала съ центромъ ея круга, а $OB$ съ осью петли. Пусть внѣшняя часть кривой пересѣчетъ продолженіе $AO$ въ точкѣ $C$.

Проведите прямую $BC$, встрѣчающую кругъ въ $D$, и прямую $OD$.

Покажемъ, что

$$\angle ACB = \tfrac{1}{3} \angle AOB.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$CD = DO = OB.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle ACB + \angle CBO \\ &= \angle ACB + \angle ODB \\ &= \angle ACB + 2\angle ACB \\ &= 3\angle ACB. \end{aligned}$$

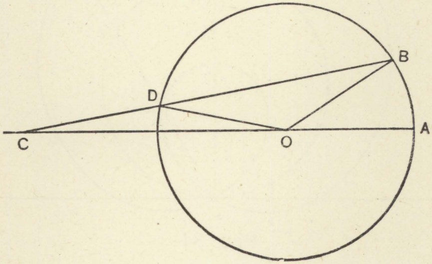


Рис. 85

### *Лемниската Бернулли*

**279.** Полярное уравненіе этой кривой имѣетъ видъ:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Пусть $O$ будетъ начало и пусть $OA = a$.

Продолжите $AO$ и проведите $OD$ перпендикулярно къ $OA$.

Возьмите $\angle AOP = \theta$ и $\angle AOB = 2\theta$.

Изъ $A$ опустите на $OB$ перпендикуляръ $AB$.

На продолженіи $AO$ отложите $OC = OB$.

На $OD$ найдите такую точку $D$, для которой $\angle ADC$ есть прямой.

Отложите $OP = OD$.

Тогда $P$ будетъ одной изъ точекъ нашей кривой.

$$\begin{aligned} r^2 = OD^2 &= OC \, . \, OA \\ &= OB \, . \, OA \\ &= a \cos 2\theta \, . \, a \\ &= a^2 \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Какъ было упомянуто выше, эта кривая представляетъ частный случай оваловъ Кассини.

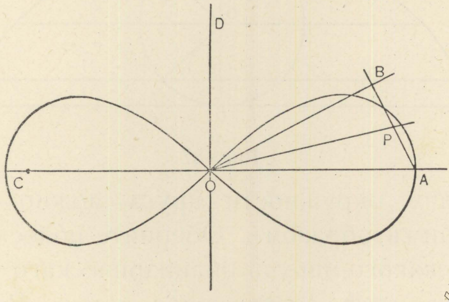


Рис. 86

Она есть обращеніе прямоугольной гиперболы, если центръ послѣдней взятъ за центръ обращенія, а также представляетъ подарную кривую той же гиперболы по отношенію къ ея центру.

Площадь этой кривой равняется $a^2$.

### *Циклоида*

**280.** Циклоидой называется путь, описываемый точкой окружности круга, катящагося по неподвижной прямой.

Пусть $A$ и $A'$ суть положенія точки, описывающей циклоиду, когда она касается неподвижной прямой въ началѣ и въ концѣ одного полнаго оборота круга. $AA'$ равняется длинѣ окружности взятаго круга.

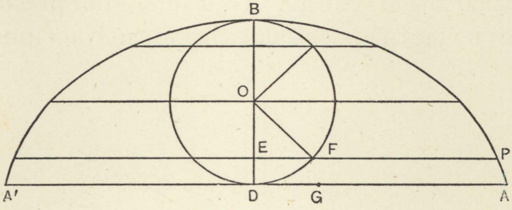


Рис. 87

Длину окружности круга можно получить слѣдующимъ образомъ. Оберните полоску бумаги вокругъ какого-нибудь цилиндрическаго предмета и отмѣтьте двѣ совпадающія точки. Разверните затѣмъ бумагу и перегните ее чрезъ эти точки. Тогда отрѣзокъ прямой, заключенный между этими точками, по длинѣ будетъ равенъ окружности, соотвѣтствующей діаметру цилиндра.

Пользуясь пропорціональностью, можно найти окружность для любого діаметра и наоборотъ.

Раздѣлите $AA'$ пополамъ въ $D$; возставьте въ $D$ перпендикуляръ къ $AA'$ и отложите на немъ $DB$=діаметру производящаго круга.

Точки $A$, $A'$ и $B$ принадлежатъ кривой.

Найдите средину $O$ отрѣзка $BD$.

Чрезъ $O$ проведите нѣсколько радіусовъ, дѣлящихъ правую полуокружность на нѣсколько равныхъ дугъ, напримѣръ, на четыре.

Отрѣзокъ $AD$ раздѣлите на такое же число равныхъ частей.

Чрезъ концы этихъ радіусовъ при помощи перегиба проведите прямыя, перпендикулярныя къ $BD$.

Пусть $EFP$ будетъ одна изъ такихъ прямыхъ, $F$ конецъ соотвѣтствующаго радіуса и пусть $G$ будетъ точка соотвѣтственнаго дѣленія отрѣзка $AD$, начиная отъ $D$. Отложите $FP=GA$ или длинѣ дуги $BF$.

Точка $P$ есть точка кривой.

Другія точки, соотвѣтствующія другимъ точкамъ дѣленія $AD$, можно получить такимъ же образомъ.

Кривая симметрична по отношенію къ оси $BD$; поэтому соотвѣтствующія точки лѣвой половины кривой можно получить, складывая бумагу по $BD$.

Длина кривой въ 4 раза больше $BD$, а ея площадь въ 3 раза больше площади производящаго круга.

*Трохоида*

**281.** Если кругъ катится по прямой такъ же, какъ въ случаѣ циклоиды, то каждая точка, лежащая въ плоскости круга, но не на его окружности, описываетъ кривую, называемую трохоидой.

*Эпициклоида*

**282.** Эпициклоидой называется путь, описываемый точкой окружности круга, который катится по окружности другого, неподвижнаго круга, касаясь его съ наружной стороны.

*Гипоциклоида*

**283.** Если катящійся кругъ касается неподвижнаго круга съ его внутренней стороны, то кривая, которую описываетъ точка окружности перваго круга, называется гипоциклоидой.

Если радіусъ неподвижнаго круга въ цѣлое число разъ больше радіуса катящагося круга, то окружность перваго слѣдуетъ раздѣлить на такое же число равныхъ частей.

Эти части въ свою очередь надо раздѣлить на нѣкоторое число равныхъ частей каждую; тогда положеніе центра катящагося круга и производящей точки, соотвѣтствующія каждой точкѣ части неподвижнаго круга, можно найти, дѣля окружность катящагося круга на такое же число равныхъ частей.

*Квадратриса*

**284.** Пусть $OACB$ представляетъ квадратъ. Если радіусъ $OA$ круга равномѣрно поворачивается около центра $O$ на прямой уголъ отъ положенія $OA$ до положенія $OB$ и если въ то же время прямая, перпендикулярная къ $OB$, равномѣрно перемѣщается параллельно самой себѣ отъ положенія $OA$ до $BC$, то геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія радіуса и прямой называется квадратрисой.

Эта кривая была придумана Гиппіадомъ изъ Элиды (420 до Р. Хр.) для раздѣленія угла на нѣсколько равныхъ частей.

Если $P$ и $P'$ суть точки кривой, то углы $AOP$ и $AOP'$ относятся другъ къ другу, какъ ординаты точекъ $P$ и $P'$.

*Спираль Архимеда*

**285.** Если прямая $OA$ равномѣрно вращается вокругъ $O$, какъ центра, то точка $P$, которая равномѣрно движется отъ $O$ вдоль $OA$, описываетъ спираль Архимеда.

MATHESIS

А. В. КЛОССОВСКІЙ
*заслуженный профессоръ.*

# ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГІИ

XVI+527 стр. большого 8⁰. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. Ц. 4 р.

## СОДЕРЖАНІЕ.

### Ч. I. Статическая метеорологія.

Введеніе.—Распространеніе и составъ атмосферы.—Физическія свойства атмосферы.—Вода въ атмосферѣ.—Непрерывная водная оболочка (океаны), ея распространеніе и свойства.—Солнечное лучеиспусканіе.—Расходъ тепла.—Тепловое состояніе земной коры въ самыхъ верхнихъ ея слояхъ.—Тепловое состояніе земного ядра.—Тепловыя условія океановъ.—Тепловое состояніе нижнихъ слоевъ земной атмосферы.—Давленіе воздуха.—Образованіе гидрометеоровъ.—Температура и давленіе въ болѣе высокихъ слояхъ атмосферы.—Аномальныя отклоненія.

### Ч. II. Динамическая метеорологія и метеорологическая оптика.

Основныя начала динамики атмосферы.—Распредѣленіе воздушныхъ теченій на земной поверхности.—Циклоны и антициклоны.—Теоретическія соображенія о происхожденіи циклоновъ и антициклоновъ.—Состояніе вопроса о предсказаніи погоды.—Динамика океановъ.—Метеорологическая оптика.

### Ч. III. Земной магнетизмъ. Электрометеорологія. Методы современной метеорологіи.

Земной магнетизмъ.—Электрометеорологія.—Методы и задачи современной метеорологіи.—Серія метеорологическихъ, электрометрическихъ и магнитныхъ наблюденій.—Литературныя указанія.

### Описаніе таблицъ.

Среднее годовое распредѣленіе осадковъ на земной поверхности по Зупану.—Среднее распредѣленіе воздушныхъ теченій на земной поверхности.—Морскія теченія по Шотту.—Карты равныхъ склоненій (изогоны) и равныхъ наклоненій (изоклины), приведенныя къ эпохѣ 1 января 1905 г.—Карта равныхъ горизонтальныхъ напряженій (изодинамы), приведенная къ эпохѣ 1 января 1905 г. Магнитная буря 30 января—1 февраля 1881 года. Магнитная буря 28 февраля 1896 года.

# КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ".

# КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ“.

10. **К. Шейдъ**, проф. ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ ДЛЯ ЮНОШЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. лаб. Новорос. унив. *Е. С. Ельчанинова*. II+192 стр. 8⁰. Съ 79 рис. Ц. 1 р. 20 к.

11. **Э. Вихертъ,** проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ. Лекціи для преподав. средн. учебн. заведеній. Пер. съ нѣм. 80 стр. 16⁰. Съ 41 рис. Ц. 35 к.*).

12. **Б. Шмидъ**. ФИЛОСОФСКАЯ ХРИСТОМАТІЯ. Пособіе для средн. учебн. зав. и для самообраз. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. Н. Ланге*. VI+171 стр. 8⁰. Ц. 1 р.*).

13. **С. Тромгольтъ**. ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16⁰. Со мн. рис. Ц. 50 к.

14. **А. Риги**, проф. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ. (Радіоактивность, іоны, электроны). Пер. съ 3-го (1907) итал. изд. XII+156 стр. 8⁰. Съ 21 рис. Ц. 1 р.*).

15. **В. Ветгэмъ**, проф. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТІЕ ФИЗИКИ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга* и *А. Р. Орбинскаго*. Съ прилож. рѣчи перваго министра Англіи *A. J. Balfour*: НѢСКОЛЬКО МЫСЛЕЙ О НОВОЙ ТЕОРІИ ВЕЩЕСТВА. VIII+319 стр. 8⁰. Съ 5 портр., 6 отд. табл. и 33 рис. Ц. 2 р.*).

16. **П. Лакуръ** и **Я. Аппель**. ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Матем.“. Въ двухъ томахъ. 875 стр. 8⁰. Съ 799 рис. и 6 отд. табл. Ц. 7 р. 50 к.*).

17. **А. В. Клоссовскій,** проф. ФИЗИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ. Изд. 2-е, испр. и доп. 45 стр. 8⁰. Ц. 40 к.

18. **С. А. Арреніусъ**. ОБРАЗОВАНІЕ МІРОВЪ. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. Имп. Юрьев. Унив. *К. Д. Покровскаго*. VIII+200 стр. 8⁰. Съ 60 рис. Ц. 1 р. 75 к.*).

19. **Н. Г. Ушинскій,** проф. ЛЕКЦІИ ПО БАКТЕРІОЛОГІИ. VIII+136 стр. 8⁰. Съ 34 рис. на 15 отд. табл. Ц. 1 р. 50 к.

20. **В. Ф. Каганъ**. прив.-доц. ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ. 35 стр. 8⁰. Съ 11 рис. Ц. 35 к.

21. **В. Циммерманъ,** проф. ОБЪЕМЪ ШАРА, ШАРОВОГО СЕГМЕНТА и ШАРОВОГО СЛОЯ. 34 стр. 16⁰. Ц. 25 к.

---

*) *Изданія, помѣченныя звѣздочкой, Учен. Ком. М. Н. П признаны заслуживающими вниманія при пополн. учен. библ. средн. учебн. заведеній.*

22. **О. Леманъ,** проф. ЖИДКІЕ КРИСТАЛЛЫ и ТЕОРІИ ЖИЗНИ. Пер. съ нѣм. 48 стр. 8⁰. Съ 30 рис. Ц. 40 к.

23. **Г. Гейбергъ,** проф. НОВОЕ СОЧИНЕНІЕ АРХИМЕДА. Пер. съ нѣм. XV+27 стр. 8⁰. Ц. 40 к*).

24. **А. Риги,** проф. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МАТЕРІИ. Пер. съ итал. 28 стр. 8⁰. Ц. 30 к.*).

25. **Г. Ковалевскій,** проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. пр.-доц. *С. Шатуновскаго.* VIII + 140 стр. 8⁰. Съ 18 черт. Ц. 1 р.*)

26. **Б. Вейнбергъ,** прив.-доц. СНѢГЪ, ИНЕИ, ГРАДЪ, ЛЕДЪ и ЛЕДНИКИ. IV+127 стр. 8⁰. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. Ц. 1 р.*).

27. **Томпсонъ, Сильванусъ.** ДОБЫВАНІЕ СВѢТА. Общедоступная лекція. VIII+88 стр. 16⁰. Съ 28 рис. Ц. 50 к.*)

28. **А. Слаби,** проф. РЕЗОНАНСЪ и ЗАТУХАНІЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ. 42 стр. 8⁰. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

29. **К. Снайдеръ,** КАРТИНА МІРА ВЪ СВѢТѢ СОВРЕМЕННАГО ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8⁰. Съ 16 отд. портрет. Ц. 1 р. 50 к.

30. **В. Рамзай,** проф. БЛАГОРОДНЫЕ и РАДІОАКТИВНЫЕ ГАЗЫ. Пер. подъ ред. *Вѣстн. Опытн. Физ. и Эл. Мат.* 37 стр. 16⁰. Съ 16 рис. Ц. 25 к.

31. **К. Бруни,** проф. ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ. Пер. съ итал. подъ ред. *Вѣстн. Опытн. Физ. и Эл. Матем.* 37 стр. 16⁰. Ц. 25 к.

32. **Р. С. БОЛЛЪ,** проф. ВѢКА и ПРИЛИВЫ, Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц, *А. Р. Орбинскаго.* 104 стр. 8⁰. Съ 4 рис. и 1 табл. Ц. 75 к.

33. **А. Слаби,** проф БЕЗПРОВОЛОЧНЫЙ ТЕЛЕФОНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Матем.* 28 стр. 8⁰. Съ 23 рис. Ц 30 к.

34. **Л. Кутюра,** АЛГЕБРА ЛОГИКИ. Пер. съ фр. съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* 128 стр. 8⁰. Ц. 90 к.

35, **Веберъ и Вельштейнъ,** проф. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ. Т. II, кн. I. Основанія геометріи. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* VIII + 362 стр. 8⁰. Съ 142 черт. и 5 рис. Ц. 3 р.

36. **Ф. Линдеманъ.** СПЕКТРЪ и ФОРМА АТОМОВЪ. Рѣчь ректора Мюнхенск. унив. Перев. съ нѣм. 25 стр. 16⁰. Изд. 2-е. Ц. 15 коп.

37. **Г. Лоренцъ,** проф. КУРСЪ ФИЗИКИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф, *Н. П. Кастерина.* Т. I. VIII + 348 стр. Съ 236 рис. Ц. 2 р. 75 к. (Т. II печатается).

38. **В. А. Гернетъ.** ОБЪ ЕДИНСТВѢ ВЕЩЕСТВА. 46 стр. 16⁰. 1909. Ц. 25 к.

39. **П. Зееманъ.** проф. ПРОИСХОЖДЕНІЕ ЦВѢТОВЪ СПЕКТРА. Съ приложеніемъ статьи *В. Ритца* „ЛИНЕЙНЫЕ СПЕКТРЫ И СТРОЕНІЕ АТОМОВЪ". 50 стр. 16⁰. 1910. Ц. 30 к.

40. **С. Ньюкомъ,** проф. ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. 16⁰. 1910. Ц. 20 к.

41. **А. Клоссовскій,** проф. ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГІИ. XVI+525 стр. большого 8⁰. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. Р. 4

42. **Ф. Кэджори,** проф. ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (съ нѣкоторыми указаніями для препод). Перев. съ англ. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XII+368 стр. 8⁰. Съ рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

43. **В. Рамзай,** проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИЗУЧЕНІЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* IV+75 стр. 16⁰. 1910. Ц. 40 к.

## Имѣются на складѣ:

**Д. Ефремовъ.** НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. 334+XIII стр. 8⁰. Ц. 2 руб.

**Ф. Мультонъ,** проф. ЭВОЛЮЦІЯ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. 90 стр. 16⁰. Съ 12 рис. Ц. 50 коп.

## Печатаются и готовятся къ печати:

**Дж. Дж. Томсонъ,** проф. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ТЕОРІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ англ. подъ ред. *В. О. Ф. и Эл. Мат.*

**Г. Пуанкаре,** проф. НАУКА и МЕТОДЪ. Перев. съ франц. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.*

**Г. Ковалевскій,** проф. КУРСЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІИ. Съ нѣм. подъ ред. *С. Шатуновскаго.*

**Оствальдъ, В.** проф. НАТУРФИЛОСОФІЯ. Съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Л. Мандельштама.*

# КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ“.

**Веберъ и Вельштейнъ**, проф. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. **Томъ II.** кн. 2 и 3. ТРИГОНОМЕТРІЯ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ и СТЕРЕОМЕТРІЯ.

**Г. Лоренцъ,** проф. КУРСЪ ФИЗИКИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* Т. II.

**АДЛЕРЪ, А. Теорія геометрическихъ построеній.** Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

**НИМФЮРЪ, Р.** д-ръ. **Воздухоплаваніе.** Его научныя основы и техническое развитіе. Переводъ съ нѣм. Съ 42 рис.

**КЛЕЙНЪ, Ф.** проф. **Лекціи по элементарной математикѣ для учителей.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.*

**ТРЕЛЬСЪ-ЛУНДЪ. Небо и міровоззрѣніе въ круговоротѣ временъ.** Пер. съ нѣмецкаго.

**ЛОВЕЛЛЬ, П. Обитаемость Марса.** Пер. съ англ. Со мног. рис.

**ШУБЕРТЪ, Г.** проф. **Математическія развлеченія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. „В. Оп. Ф. и Эл. Мат.“.

**БОРЕЛЬ, Е.** проф. **Курсъ математики для среднихъ учебныхъ заведеній.** Въ обработкѣ проф. *П. Штэккеля.*

**СОДДИ, Ф.** проф. **Что такое радій?** Переводъ съ англійскаго.

**МАРКОВЪ, А.** акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей.** Въ двухъ частяхъ. Изд. 2-ое.

**ГАМПСОНЪ Б. и ШЕФЕРЪ К. Парадоксы природы.** Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ Пер. съ нѣм.

**ЛЁБЪ. Динамика живого вещества.** Переводъ съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.*

**АНДУАЙЕ,** проф. **Курсъ астрономіи.** Переводъ съ французскаго.

**ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. Два новыхъ міра** (Инфра-міръ. Супра-міръ). Перев. съ англійскаго.

Тип. Ю.-Р. О-ва
Печатнаго Дѣла.
Одесса, Пушкин-
ская 18, 1910

Цѣна 90 коп.