БИБЛИОТЕКА КЛАССИКОВ ТОЧНОГО ЗНАНИЯ. I.

РИХАРД ДЕДЕКИНД

ПРОФЕССОР МАТЕМАТИКИ ВЫСШЕЙ
ТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ В БРАУНШВЕЙГЕ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ПЕРЕВЕЛ С НЕМЕЦКОГО
Проф. С. О. ШАТУНОВСКИЙ
СО СТАТЬЕЙ ПЕРЕВОДЧИКА:
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ
ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

4-ое ИСПРАВЛЕННОЕ ИЗДАНИЕ

MATHESIS

ОДЕССА 1923

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИС“

Одесса, Стурдзовский 2.

ВЫШЛИ В СВЕТ:

Мисс *М. Ньюбигин.* **Современная география.**
перев. с англ. под ред. и с прим. проф. Г. И. Танфильева.

Проф. *А. Эддингтон.* **Пространство, время и тяготение.**
пер. с англ. с примеч. проф. Ю. Г. Рабиновича.

Проф. *Р. Дедекинд.* **Непрерывность и иррациональные числа.**
перев. с нем. проф. С. О. Шатуновский. Со статьей переводчика: „Доказательство существования трансцендентных чисел“, 4-е исправленное издание.

ПЕЧАТАЮТСЯ:

Проф. *С. О. Шатуновский.* **Введение в анализ.**

Проф. *С. Ньюком.* **Астрономия для всех.**
перев. с англ. проф. А. Р. Орбинский, 3-е издание, вновь исправленное и дополненное.

Проф. *Ф. Меннхен.* **Некоторые тайны артистов-вычислителей.**
перев. с нем. под ред. проф. И. Ю. Тимченко.

Проф. *Ф. Журдэн.* **Природа математики.**
пер. с англ. под ред. проф. И. Ю. Тимченко.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Проф. *Дж. Виванти.* **Курс Анализа бесконечно-малых.**
перев. с итальянского.

БИБЛИОТЕКА КЛАССИКОВ ТОЧНОГО ЗНАНИЯ. I.

РИХАРД ДЕДЕКИНД
ПРОФЕССОР МАТЕМАТИКИ ВЫСШЕЙ
ТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ В БРАУНШВЕЙГЕ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ
И
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ПЕРЕВЕЛ С НЕМЕЦКОГО
Проф. С. О. ШАТУНОВСКИЙ
СО СТАТЬЕЙ ПЕРЕВОДЧИКА:
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ
ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος
ἡ γεωμετρικὴ γνωσίς ἐστιν
Платон

4-ое ИСПРАВЛЕННОЕ ИЗДАНИЕ

MATHESIS

ОДЕССА 1923

СОДЕРЖАНИЕ

Третья Государственная Типография им. тов. Троцкого, ул. Ленина, №49 в г. Одессе.

Р. О. П. № 51.
Заказ № 1907.
3000 экземпл.

RICHARD DEDEKIND

Stetigkeit und irrationale Zahlen

От переводчика

На числа мы прежде всего должны смотреть, как на ряд произвольно выбранных знаков...

H. von Helmholtz (Zählen u. Messen, 21).

Во всяком случае, число (numerus, ἀριθμός) есть произвольно созданный нами знак, который служит средством достижения весьма многообразных целей.

E. Schröder (Lehrbuch d. Arith. u. Alg., 2).

Если точно следить за тем, что мы делаем при счете количества (Menge oder Anzahl) вещей, то придем к рассмотрению способности духа относить вещи к вещам, ставить одну вещь в соответствие с другой, или отображать одну вещь в другой...

R. Dedekind (Was sind u. was sollen die Zahlen, VIII).

Приступая к переводу этого небольшого сочинения на русский язык, мы, с одной стороны, руководствовались назревшею у нас, как нам кажется, потребностью отдать себе ясный отчет в тех началах, которые лежат в основе арифметики вообще и арифметики иррациональных в частности; с другой стороны, нам казалось, что в маленькой брошюре Дедекинда яркая образность и высокая отвлеченность соединены в той мере, в какой это необходимо для того, чтобы уяснить читателю ход возникновения современной вполне отвлеченной идеи об иррациональном числе и возможность применения этой идеи к предметам более или менее конкретного характера — к геометрическим образам. Наш перевод кажется нам тем более уместным, что в последнее время появились в переводе на русский язык работы Гельмгольца и Кронекера, посвященные научному обоснованию теории рациональных чисел. Знакомство с этой теорией существенно необходимо и для понимания Дедекиндовой теории иррациональных чисел. Особенно важен тот факт, что теория рациональных чисел может быть построена на определении чисел, как *знаков, символов*, которые расположены в установленной раз навсегда последовательности и которыми могут отмечаться некоторые соотношения между вещами. Сами по себе эти знаки могут быть какой угодно природы—это могут быть звуки, цвета, тела, понятия и т. д., распределенные в некотором неизменном порядке. Важность установления такой неизменной в своем порядке системы знаков заключается в „способности нашего духа", как говорит Дедекинд, устанавливать соответствие между этими знаками и индивидуумами какой бы то ни было группы вещей, благодаря чему мы вносим определенный порядок и в эту последнюю группу.

Когда при ближайшем исследовании вещей в них усматриваются такие свойства или соотношения, которые не могут характеризоваться установленными знаками-числами, то создают, если это выгодно, новые знаки такого рода, чтобы ими могли характеризоваться вновь усмотренные соотношения вещей. Можно, если угодно, называть числами и эти новые знаки, можно их так и не называть. Выгоднее, однако, бывает распространить термин „число" и на вновь вводимые символы. Таким образом, к ряду символов, названных целыми числами, были прежде всего присоединены новые символы, также названные числами, именно дробными числами. Этому дало повод то обстоятельство, что целыми числами нельзя или, по крайней мере, весьма неудобно характеризовать такие явления, которыми сопровождается распадение предмета на части. Когда при некоторых исследованиях оказывается удобнее считать предметы, расположенные в линейном порядке, не от крайнего (крайнего может и не быть), а от какого-либо промежуточного предмета, в обе стороны от него, то представляется выгодным присоединить к прежним символам новые символы—отрицательные числа.

Мы не будем больше говорить об этом. Укажем только, что введение новых символов может обусловливаться не объективными свойствами вещей, к которым мы обыкновенно эти символы относим, а стремлением подчинить старые символы некоторым новым требованиям, несовместимым с теми свойствами этих символов, которые служили им определениями. Так, например, когда мы располагаем только тем рядом знаков, который мы называем системой рациональных чисел, и ищем число x (конечно, рациональное, ибо других чисел мы еще не установили), которого квадрат равен данному положительному числу a, то оказывается, что для некоторых a это число x существует, для других же его совсем нет, т. е. бывает так, что среди символов — рациональных чисел — нет такого, квадрат которого равен a. Мы можем в этом случае ввести в наши исследования новый символ, квадрат которого равен a, можем назвать и этот символ числом, например, радикальным числом, можем его обозначить через $a^{1/2}$, $\sqrt{a}$, или как-нибудь иначе. Можем всего этого и не делать. В последнем случае устанавливаем такую теорему: некоторые положительные числа имеют, другие не имеют квадратных корней; если же знаки квадратных корней из положительных чисел введены, то будем иметь такую теорему: каждое положительное число имеет квадратный корень. Обе теоремы верны, ибо в последней подразумевается, что те положительные числа, которые не имеют корней среди старых символов, имеют корни среди новых.

У самого Дедекинда определение числа, как символа, нигде явно не высказано, но такое определение числа явно вытекает из рассуждений, изложенных в другом его сочинении: Was sind und was sollen die Zahlen. По нашему мнению, существенно важно знать, что на иррациональные числа (так же, как и на всякие другие) можно смотреть, как на чистые знаки, которые могут быть и действительно бывают весьма полезны, между прочим, по той причине, что этими знаками удобно выражаются реальные свойства вещей.

Распределение чисел на два класса, на класс чисел алгебраических и класс трансцендентных чисел, представляет собою дальнейший шаг в теории развития понятия о числе. Мы сочли поэтому уместным присоединить к статье Дедекинда статью, которая содержала бы основную теорему, лежащую в основании этой классификации, — теорему о существовании трансцендентных чисел. Статья эта, напечатанная в свое время на страницах „Вестника опытной физики и элементарной математики“ (№ 233), содержит известное Канторово доказательство упомянутой теоремы.

Непрерывность и иррациональные числа

Предисловие автора

Рассуждения, составляющие предмет этого маленького сочинения, относятся к осени 1858 года. Тогда я, в качестве профессора Союзного Политехникума в Цюрихе, в первый раз обязан был по своему положению излагать элементы дифференциального исчисления и при этом чувствовал живее, чем когда-либо, недостаток в действительно научном обосновании арифметики. При изложении понятия о приближении переменной величины к постоянному пределу, и именно при доказательстве того положения, что величина, которая возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, должна приближаться к некоторому пределу, я прибегал к геометрической наглядности. Да и теперь я из дидактических оснований считаю такое привлечение геометрической наглядности при первом обучении дифференциальному исчислению необычайно полезным, даже неизбежным, если не хотят потратить слишком много времени. Но никто не станет отрицать того, что этот способ введения в изучение дифференциального исчисления не может иметь никакого притязания на научность.

Во мне тогда это чувство неудовлетворенности преобладало в такой степени, что я принял твердое решение думать до тех пор, пока не найду чисто арифметического и вполне строгого основания для начал анализа бесконечных. Говорят часто, что дифференциальное исчисление занимается непрерывными величинами, однако же нигде не дают определения этой непрерывности, и даже при самом строгом изложении дифференциального исчисления доказательства не основывают на непрерывности, а апеллируют, более или менее сознательно, либо к геометрическим представлениям, либо к представлениям, которые берут свое начало в геометрии, либо, наконец, основывают доказательства на положениях, которые сами никогда не были доказаны чисто арифметическим путем. Сюда относится, например, и вышеупомянутое положение. Более точное изыскание убедило меня в том, что это или всякое другое эквивалентное ему предложение может до известной степени рассматриваться, как достаточный фундамент для анализа бесконечных. Все сводится только к тому, чтобы открыть настоящее начало этого положения в элементах арифметики и вместе с этим приобрести действительное определение существа непрерывности. Это мне удалось 24 ноября 1858 года, и, несколько дней спустя, я сообщил результаты своих размышлений моему дорогому другу Durège'у, что повело к продолжительной и оживленной беседе. Впоследствии я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал также об этом предмете доклад в ученом обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение представляется не легким, и потому еще, что и самый предмет так мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта, в то время, как я наполовину стал уже подумывать о том, чтобы избрать эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения *), ко мне в руки попала, благодаря любезности ее автора, статья E. Heine (Crelle's Journal. Bd. 74), которая и подкрепила меня в моем решении. По существу я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что мое изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время, как я писал это предисловие (20 марта 1872 г.), я получил интересную статью „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen" G. Cantor'a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neu-

*) Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца.

Примеч. переводчика.

mann, Bd. 5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется при быстром чтении, аксиома в § 2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения, с тем, что я отмечаю ниже в § 3, как сущность непрерывности. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел еще более высокого порядка, я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, еще признать не в состоянии.

§ 1. Свойства рациональных чисел

Хотя арифметика рациональных чисел предполагается здесь уже известной, но мне думается, что полезно будет выдвинуть некоторые главные моменты, не подвергая их обсуждению, с тою только целью, чтобы заранее наметить точку зрения, на которую я становлюсь в последующем изложении. Я смотрю на всю арифметику, как на необходимое или, по крайней мере, натуральное следствие простейшего арифметического акта—счета, самый же счет представляет не что иное, как последовательное созидание бесконечного ряда положительных целых чисел, где каждый индивидуум определяется непосредственно ему предшествующим. Простейший акт заключается в переходе от созданного уже индивидуума к следующему, вновь созидаемому. Уже сама по себе цепь этих чисел образует необычайно полезное вспомогательное средство для человеческого ума и представляет неиссякаемое богатство замечательных законов, к которым мы приходим посредством введения четырех основных арифметических действий. Сложение есть соединение в один акт упомянутых простейших актов, повторенных сколько угодно раз. Таким же образом из сложения проистекает умножение. Между тем, как обе эти операции всегда выполнимы, выполнимость обратных операций — вычитания и деления—оказывается ограниченной. Каков бы ни был здесь ближайший повод, какие бы сравнения и аналогии с опытом и наблюдением ни приводили к этому,—вопрос об этом мы оставим в стороне; достаточно того, что именно эта ограниченность в выполнении обратных операций всякий раз становилась настоящей причиной нового творческого акта. Так созданы человеческим умом отрицательные и дробные числа, благодаря чему приобретено было орудие бесконечно более высокого совершенства в виде системы всех рациональных чисел. Эта система, которую я обозначу через R, обладает прежде всего тою полнотою и законченностью, которую я в другом месте *) отметил, как признак *числового корпуса* (Zahlkörper), и которая состоит в том, что четыре основные операции со всякими двумя индивидуумами из R выполнимы, то есть, что результатом этих операций всегда опять является определенный индивидуум из R, если только исключить единственный случай деления на нуль.

Для нашей ближайшей цели гораздо более важным является другое свойство системы R, которое может быть выражено так: система R представляет правильно распределенную, бесконечно простирающуюся в две стороны область одного измерения. Чтó именно этим хотят сказать—достаточно указывается выбором выражений, заимствованных из области геометрических представлений; тем более необходимо поэтому выделить соответствующие им чисто арифметические особенности — чтобы не могло даже только казаться, будто арифметика нуждается в таких чуждых ей представлениях.

Если нужно выразить, что знаки a и b означают одно и то же рациональное число, то полагают одинаково $a = b$ и $b = a$. Различие двух рациональных чисел сказывается в том, что разность $a - b$ имеет или положительное, или отрицательное значение. В первом случае a *больше* b, b *меньше* a, что и указывается знаками $a > b$, $b < a$**). Так как во втором случае $b - a$ имеет положительное значение, то $b > a$, $a < b$. Сообразно с этой двойственностью в характере различия двух чисел a и b, имеют место следующие законы:

I. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$. Всякий раз, когда a, c будут два различных (или неравных) числа и когда b будет больше одного и меньше другого, мы, не опасаясь отголоска

*) Vorlesungen über Zahlenteorie von P. G. Lejeune-Dirichlet. Zweite Auflage. § 159.

**) В последующем подразумевается так называемое „алгебраическое“ больше и меньше, если только не прибавлено слово „абсолютно“.

геометрических представлений, будем это выражать так: b лежит между обоими числам и a, c.

II. Если a, c суть два различных числа, то всегда существует бесконечное множество чисел, лежащих между a, c.

III. Если a есть определенное число, то все числа системы R распадаются на два класса A_1 и A_2, из коих каждый содержит бесконечно много индивидуумов. Первый класс A_1 обнимает собой все те числа a_1, которые меньше a; второй класс A_2 обнимает собою все числа a_2, которые больше a. Само число a может быть отнесено по произволу к первому или ко второму классу и тогда оно соответственно бывает наибольшим числом в первом классе или наименьшим числом во втором. В обоих случаях разложение системы R на два класса A_1, A_2 таково, что каждое число первого класса A_1 меньше каждого числа второго класса A_2.

§ 2. Сравнение рациональных чисел с точками прямой линии

Поставленные нами на вид свойства рациональных чисел напоминают о взаимном относительном положении точек прямой линии L. Если различать два принадлежащие ей противоположные направления словами „вправо“ и „влево“, и если p, q—две различные точки, то либо точка p расположена вправо от q, и в то же время q влево от p, или, наоборот, q—вправо от p, и в то же время p влево от q. Третий случай невозможен, если p и q действительно различные точки. Сообразно с этим различием в положении имеют место следующие законы:

I. Если p лежит вправо от q и q опять вправо от r, то и p лежит вправо от r; говорят тогда, что q лежит между точками p и r.

II. Если p, r две различные точки, то существует бесконечное множество точек, лежащих между p и r.

III. Если p есть определенная точка на L, то все точки на L распадаются на два класса P_1, P_2, из коих каждый содержит бесконечное множество индивидуумов. Первый класс P_1 обнимает собою все те точки p_1, которые лежат вправо от p, а второй класс P_2 обнимает все точки, которые лежат влево от p. Сама точка p может быть отнесена по произволу к первому или ко второму классу. В обоих случаях разложение прямой L на два класса или два куска таково, что каждая точка первого класса P_1 лежит влево от каждой точки второго класса P_2.

Эта аналогия между рациональными числами и точками прямой становится, как известно, действительною зависимостью, когда на прямой выбирают определенную начальную или нулевую точку o и определенную единицу длины для измерения отрезков. При помощи последней можно для каждого рационального числа a построить соответствующую длину, и если нанести ее на прямую от точки o вправо или влево, смотря по тому, есть ли a положительное или отрицательное число, то получим определенную конечную точку p, которая может быть принята за точку, соответствующую числу a. Рациональному числу нуль соответствует точка o. Таким образом, каждому рациональному числу a, т. е. каждому индивидууму в R, соответствует одна и только одна точка p, то-есть, один индивидуум на L. Если двум числам a, b отвечают две точки p, q и если $a > b$, то p лежит вправо от q. Законам I, II, III предыдущего параграфа вполне отвечают законы I, II, III настоящего.

§ 3. Непрерывность прямой линии

Но теперь фактом величайшей важности является то обстоятельство, что на прямой L есть бесконечно много точек, которые не соответствуют никакому рациональному числу. Действительно, если точка p соответствует рациональному числу a, то, как известно, длина op соизмерима с употребленной при построении единицей длины, то есть существует третья длина, так называемая общая мера, относительно которой обе длины представляются целыми кратными. Но уже древние греки знали и доказали, что существуют длины, несоизмеримые с данной единицей длины,— например, диагональ квадрата, сторона которого есть единица длины. Если нанести такую длину от точки o на прямую, то получим конечную точку, которой не соответствует никакое рациональное число. Так как легко далее показать, что существует бесконечное множество длин, несоизмеримых с единицей длины, то можем утверждать: прямая L бесконечно более богата индивидуумами-точками, чем область R рациональных чисел индивидуумами-числами.

Если же хотят, а это в самом деле желательно, исследовать также все явления на прямой и арифметическим путем, то, в виду недостаточности для этой цели рациональных чисел, становится необходимым существенно улучшить построенный путем созидания рациональных чисел инструмент R, создав новые числа таким образом, чтобы область чисел приобрела ту же полноту, или, скажем прямо, ту же *непрерывность*, как и прямая линия.

Приведенные до сих пор соображения всем так хорошо известны, что многие сочтут их повторение совершенно излишним.

Однако же, я нахожу их краткое обозрение необходимым для того, чтобы надлежащим образом подготовить главный вопрос. Принятое до сих пор введение иррациональных чисел связывается именно с понятием о протяженных величинах — которое само нигде до сих пор не определено—и определяет число, как результат измерения такой величины другою того же рода *). Вместо этого я требую, чтобы арифметика развивалась сама из себя. Можно в общем согласиться с тем, что такие связи с неарифметическими представлениями дали ближайший повод к расширению понятия о числе (хотя это решительно не имело места при введении комплексных чисел), но это безусловно не может служить достаточным основанием для того, чтобы ввести в арифметику, науку о числах, эти чуждые ей соображения. Как отрицательные и дробные рациональные числа созданы путем свободного творчества, и как вычисления с этими числами должны были и могли быть сведены к законам вы-

*) Кажущееся преимущество общности такого определения числа исчезает тотчас же, как только подумаешь о комплексных числах. Наоборот, по моему воззрению, понятие отношения двух однородных величин тогда только может быть ясно развито, когда иррациональные числа уже введены.

Примеч. переводчика.

числений с положительными целыми числами, точно так же должно стремиться к тому, чтобы иррациональные числа были вполне определены через посредство рациональных чисел. Но как это сделать — вот в чем вопрос.

Предыдущее сравнение области R рациональных чисел с прямою привело к открытию в первой изъянов (Lückenhaftigkeit), неполноты, или разрывности, между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чем же, собственно, состоит эта непрерывность? Все и заключается в ответе на этот вопрос, и только в этом ответе мы приобретаем научное основание для исследования *всех* непрерывных областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малейших частиц, конечно, ничего не достигнешь. Дело идет о том, чтобы дать точный признак непрерывности, который мог бы служить базисом действительных дедукций. Долгое время я напрасно об этом думал, но, наконец, нашел искомое. Разные лица, вероятно, оценят эту находку различно, но все же я думаю, что большинство найдет ее содержание весьма тривиальным. Оно состоит в следующем: в предыдущих параграфах обращено было внимание на то, что каждая точка p прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, то-есть, в следующем:

„Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска“ *).

*) То-есть, если, следуя какому бы то ни было закону (правилу), например, подчиняясь условиям некоторой задачи, мы произведем разделение точек прямой на два класса таким образом, что 1) каждая точка прямой принадлежит либо к тому, либо к другому классу, и 2) каждая точка одного класса расположена влево от каждой точки другого класса, то существует одна и только одна точка такого свойства, что каждая точка, влево от нее лежащая, принадлежит к одному классу, а все остальные точки прямой принадлежат к другому классу. Если бы мы разорвали прямую, т. е. удалили бы из нее отрезок AB

Как уже и было сказано, я, кажется, не ошибаюсь, приняв, что каждый тотчас же согласится с истинностью этого утверждения; большинство моих читателей будут даже очень разочарованы, узнав, что посредством этой тривиальности должен быть снят покров с тайны непрерывности. По этому поводу я замечу следующее: мне очень приятно, если каждый находит упомянутый принцип столь ясным и в такой мере согласным со своим представлением о прямой линии, ибо я решительно не в состоянии привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не в состоянии этого сделать. Принятие этого свойства прямой линии есть не что иное, как аксиома, посредством которой мы только и признаем за прямой ее непрерывность, мысленно вкладываем (hineindenken) непрерывность в прямую. Если вообще пространство имеет реальное бытие, то ему *нет необходимости* быть непрерывным. Бесчисленные его свойства оставались бы теми же, еслибы оно было разрывным. И если бы мы знали наверное, что пространство не обладает непрерывностью, то, при желании, нам все-таки ничто не могло бы помешать сделать его непрерывным через мысленное заполнение его пробелов. Это заполнение должно было бы состоять в созидании новых точек и осуществлялось бы сообразно упомянутому принципу.

то оставшийся геометрический образ („разорванная“ прямая) был бы разбит на два куска P и Q, лежащие с различных сторон изъяна таким образом, что 1) каждая точка рассматриваемого образа принадлежала бы либо к классу P, либо к классу Q, и 2) если бы кусок P, содержащий точку A, лежал влево от изъяна, то каждая точка класса P лежала бы влево от каждой точки класса Q. Таким образом, каждая точка, лежащая влево от точки A, и точка A принадлежали бы к классу P, а все остальные точки—к классу Q. Точка B обладает подобным же свойством: все точки нашего образа, лежащие влево от B, принадлежат к классу P; остальные точки—к классу Q. Существованием не одной, а двух точек такого свойства, как A и B, характеризуется разрывность нашего образа. Невозможностью существования двух таких точек и существованием одной точки такого рода определяется непрерывность прямой.

Примеч. переводчика.

§ 4. Созидание иррациональных чисел

Последними словами уже достаточно ясно указывается, каким образом разрывная область R рациональных чисел должна быть дополнена до превращения ее в непрерывную. Как это поставлено было на вид в § 1 (III), каждое рациональное число a производит разложение системы R на два класса A_1 и A_2 такого рода, что каждое число a_1 первого класса меньше каждого числа a_2 второго класса. Число a представляет либо наибольшее число класса A_1, либо наименьшее число класса A_2. Если теперь дано какое-либо подразделение системы R на два класса A_1, A_2, обладающее только тем характерным свойством, что каждое число a_1 из A_1 меньше каждого числа a_2 из A_2, то для краткости мы будем называть такое подразделение *сечением* и будем его обозначать через (A_1, A_2). Мы можем тогда сказать, что каждое число a производит одно или, собственно, два сечения, на которые мы, однако, не будем смотреть, как на существенно различные *); это сечение имеет *кроме того* то свойство, что либо между числами первого класса есть наибольшее, либо между числами второго класса существует наименьшее. И наоборот, если сечение обладает и этим свойством, то оно производится этим наибольшим или наименьшим числом.

Легко, однако, убедиться в том, что существует бесчисленное множество сечений, которые не могут быть произведены рациональным числом. Ближайший пример есть следующий.

Пусть D будет положительное целое число, но не квадрат целого числа. Существует положительное целое число λ такого рода, что

$$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2.$$

*) Число a может быть отнесено к первому или второму классу. Оба эти подразделения R на два класса рассматриваются, как два случая одного и того же сечения. В первом случае, когда число a отнесено к первому классу, оно есть наибольшее число в первом классе, и нельзя указать наименьшего числа во втором классе; во втором случае нет наибольшего числа в первом классе, но a есть наименьшее число во втором классе.

Примеч. переводчика

Если возьмем для второго класса A_2 каждое положительное рациональное число, которого квадрат $> D$, а для первого класса A_1 все остальные рациональные числа, то это подразделение составит сечение (A_1, A_2), то-есть, каждое число a_1 будет меньше каждого числа a_2. Именно, когда $a_1 = 0$ или есть отрицательное число, то уже в силу этого a_1 меньше каждого числа a_2, ибо это последнее, по определению, представляет собой положительное число. Если же a_1 есть число положительное, то его квадрат $\leq D$, и, следовательно, a_1 меньше каждого числа a_2, которого квадрат $> D$.

Это сечение не производится, однако, никаким рациональным числом. Чтобы доказать это, должно прежде всего обнаружить, что нет никакого рационального числа, которого квадрат равен D. Хотя это и известно из первых элементов теории чисел, но мы все же находим возможным уделить место следующему косвенному доказательству. Если есть рациональное число, которого квадрат $= D$, то существуют и два положительных целых числа t и u, которые удовлетворяют уравнению

$$t^2 - D u^2 = 0,$$

и можно принять, что u есть *наименьшее* положительное целое число, обладающее тем свойством, что его квадрат через умножение на D обращается в квадрат некоторого целого числа t. Так как, очевидно *),

$$\lambda u < t < (\lambda + 1) u,$$

то число

$$u_1 = t - \lambda u$$

есть положительное целое число и притом меньшее, чем u. Если, далее, положить

$$t_1 = D u - \lambda t,$$

то и t_1 будет положительное **) целое число, причем получаем

*) Число t не может быть кратным числа u, ибо в противном случае мы, обозначая через λ положительное целое, имели бы $t = \lambda u$; $\lambda^2 u^2 - D u^2 = 0$ или $D = \lambda^2$, что недопустимо, так как D не точный квадрат. Отсюда следует, что t содержится между некоторыми двумя последовательными членами λu и $(\lambda + 1) u$ ряда $u, 2u, 3u, \ldots$

Примеч. переводчика.

**) Ибо $t_1 u = D u^2 - \lambda t u = t^2 - \lambda t u = t (t - \lambda u) = t u_1$.

Примеч. переводчика.

$$t_1^2 - Du_1^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

что противоречит допущению, сделанному относительно u.

Таким образом, квадрат всякого рационального числа a или $< D$, или $> D$. Отсюда легко выводится, что в классе A_1 нет наибольшего, а в классе A_2 нет наименьшего числа. Действительно, если положить

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

то

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

и

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Если взять здесь для x положительное число из класса A_1, то $x^2 < D$, следовательно, $y > x$ и $y^2 < D$; поэтому y также принадлежит к классу A_1. Если же положить, что x есть число из класса A_2, то $y < x$; $x > 0$ и $y^2 > D$, так что и y принадлежит к классу A_2. Это сечение не производится, следовательно, никаким рациональным числом.

В том свойстве, что не все сечения производятся рациональными числами, и состоит неполнота, или разрывность, области R рациональных чисел.

Теперь всякий раз, когда нам дано сечение (A_1, A_2), которое не может быть произведено никаким рациональным числом, мы *создаем* новое *иррациональное* число α, которое рассматривается нами, как вполне определенное этим сечением (A_1, A_2). Мы скажем, что число α соответствует этому сечению, или что оно производит это сечение. Таким образом, отныне каждому определенному сечению соответствует одно и только одно рациональное или иррациональное число, и мы будем смотреть на два числа, как на *различные* или *неравные*, тогда и только тогда, когда они соответствуют существенно различным сечениям.

Чтобы найти основание для распределения всех *вещественных*, т. е. всех рациональных и иррациональных чисел, нам необходимо прежде всего исследовать соотношения между двумя какими-либо сечениями (A_1, A_2) и (B_1, B_2), производимыми какими угодно двумя числами α и β. Всякое сечение (A_1, A_2), очевидно, дано вполне уже в том случае, когда мы знаем один из двух классов, например, первый класс A_1, потому что второй A_2 состоит из всех рациональных чисел, не заключающихся в классе A_1; характерной же особенностью этого первого класса является то, что, заключая в себе какое-либо число a_1, он содержит и все числа, меньшие a_1. Если теперь сравнить два первых класса этого рода A_1 и B_1, то может случиться, 1) что они вполне тождественны, т. е. каждое число, содержащееся в A_1, содержится также и в B_1, и каждое число, содержащееся в B_1, содержится и в A_1. В этом случае A_2 необходимо тождественно с B_2; оба сечения вполне тождественны, что мы знаками выражаем через $\alpha = \beta$, или $\beta = \alpha$.

Но если два класса A_1 и B_1 не тождественны, то в одном, например, в A_1, есть число $a'_1 = b'_2$, не содержащееся в классе B_1 и заключающееся, следовательно, в B_2; поэтому, все числа b_1, заключающиеся в B_1, несомненно, будут меньше, чем это число $a'_1 = b'_2$; следовательно, все числа b_1 заключаются и в A_1.

Если же 2) это число a'_1 будет единственным числом в A_1, не входящим в B_1, то всякое другое число a_1, содержащееся в A_1, будет содержаться и в B_1, а потому a_1 меньше a'_1, т. е. a'_1 есть наибольшее между числами a_1; поэтому сечение (A_1, A_2) производится рациональным числом $\alpha = a'_1 = b'_2$. Относительно второго сечения (B_1, B_2) мы уже знаем, что все числа b_1 класса B_1 содержатся и в A_1, а потому они меньше, чем число $a'_1 = b'_2$, которое содержится в B_2; всякое же другое число b_2, содержащееся в B_2, должно быть больше, чем b'_2, потому что иначе b_2 было бы также меньше, чем a'_1, и заключалось бы в A_1, а следовательно, и в B_1. Таким образом, b'_2 есть наименьшее между числами, содержащимися в B_2; следовательно, и сечение (B_1, B_2) производится тем же рациональным числом $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$. Оба сечения поэтому несущественно различны.

Но если 3) в A_1 есть, по крайней мере, два различных рациональных числа $a'_1 = b'_2$ и $a''_1 = b''_2$, не содержащихся в B_1, то их существует и бесконечное множество, потому что все бесконечное множество чисел, лежащих между a_1' и a_1'' (§ 1, II), содержится, очевидно, в A_1, но не в B_1. Два числа α и β, соответствующие в этом случае существенно различным сечениям (A_1, A_2) и (B_1, B_2), мы также назовем *различными*, а именно скажем, что α *больше*, чем β, что β *меньше*, чем α, и выразим это в знаках как через $\alpha > \beta$, так и через $\beta < \alpha$. Здесь следует иметь в виду, что это определение вполне совпадает с прежним, когда оба числа α и β были рациональными.

Остаются еще следующие возможные случаи: если 4) в B_1 содержится одно и только одно число $b'_1 = a'_2$, не содержащееся в A_1, то оба сечения (A_1, A_2) и (B_1, B_2) только несущественно различны и производятся одним и тем же числом $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$. Если же 5) в B_1 есть, по крайней мере, два различных числа, не содержащихся в A_1, то $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Так как этим исчерпываются все случаи, то заключаем, что из двух различных чисел одно необходимо окажется большим, другое меньшим: здесь два возможных случая. Третий случай невозможен. Это заключалось уже в употреблении *сравнительной степени* (больше, меньше) для выражения отношения между α и β; но только теперь выбор такого выражения вполне оправдан. Именно при изысканиях такого рода необходимо самым заботливым образом остерегаться, чтобы, даже при всем желании быть честным, не увлечься и не сделать непозволительных перенесений из одной области в другую из-за поспешного выбора выражений, относящихся к другим, уже развитым представлениям.

Если снова точно обсудим случай $\alpha > \beta$, то найдем, что меньшее число β в том случае, когда оно рациональное, наверно принадлежит к классу A_1. Действительно, так как в A_1 есть число $a'_1 = b'_1$, принадлежащее к классу B_2, то независимо от того, будет ли β наибольшим числом в B_1 или наименьшим в B_2, наверное имеем $\beta \leq a'_1$ и, следовательно, β содержится в A_1. Точно так же из $\alpha > \beta$ выводится, что большее число α, когда оно рациональное, непременно содержится в B_2, ибо $\alpha \leq a'_1$. Соединяя оба соображения, найдем следующий результат: если сечение (A_1, A_2) производится числом α, то всякое рациональное число принадлежит к классу A_1 или к классу A_2, смотря по тому, будет ли оно меньше или больше α. Если само число α рациональное, то оно может принадлежать к тому или другому классу.

Отсюда, наконец, вытекает еще и следующее: если $\alpha > \beta$, если, значит, существует бесчисленное множество чисел в A_1, не содержащихся в B_1, то существует среди них также бесконечное множество таких чисел, которые одновременно отличны и от α, и от β. Каждое такое рациональное число $c < \alpha$, ибо оно содержится в A_1, и в то же время оно $> \beta$, потому что содержится в B_2.

§ 5. Непрерывность области вещественных чисел

Сообразно с твердо установленными нами родами различия чисел, система $\mathfrak{R}$ всех вещественных чисел образует правильно распределенную область одного измерения. Этим сказано только то, что имеют место нижеследующие законы:

I. Если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то и $\alpha > \gamma$. Мы будем говорить, что β лежит между числами α и γ.

II. Если α, γ суть два различных числа, то всегда существует бесконечное множество различных чисел, лежащих между числами α и γ.

III. Если α есть определенное число, то все числа системы $\mathfrak{R}$ распадаются на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, из коих каждый содержит бесконечно много индивидуумов. Первый класс $\mathfrak{A}_1$ обнимает собою все те числа α_1, которые $< \alpha$; второй класс $\mathfrak{A}_2$ обнимает все те числа α_2, которые $> \alpha$. Само число α может быть отнесено по произволу к первому или ко второму классу и тогда оно соответственно бывает наибольшим числом в первом или наименьшим во втором классе. В обоих случаях разложение системы $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ таково, что каждое число первого класса $\mathfrak{A}_1$ меньше каждого числа второго класса $\mathfrak{A}_2$, и мы говорим, что это разложение произведено числом α.

Чтобы быть кратким и не утомлять читателя, я опускаю доказательства этих положений, вытекающие непосредственно из определений предыдущих параграфов.

Кроме этих свойств, область $\mathfrak{R}$ обладает еще *непрерывностью*, то есть имеет место следующее предложение:

IV. Если система $\mathfrak{R}$ всех вещественных чисел распадается на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такого рода, что каждое число α_1, класса $\mathfrak{A}_1$, меньше каждого числа α_2 класса $\mathfrak{A}_2$, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение.

Доказательство. Вместе с разложением или сечением $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ дается и некоторое сечение (A_1, A_2) системы R всех рациональных чисел, определяемое тем правилом, что A_1 содержит все рациональные числа класса $\mathfrak{A}_1$, а A_2 все остальные рациональные числа, то есть все рациональные числа класса $\mathfrak{A}_2$. Пусть α будет то вполне определенное число, которым производится это сечение (A_1, A_2). Если теперь β есть какое-либо число, отличное от α, то существует бесконечно много рациональных чисел c, которые лежат между α и β. Если $\beta < \alpha$, то $c < \alpha$; поэтому c принадлежит к классу A_1, а следовательно, и к классу $\mathfrak{A}_1$, но так как вместе с этим $\beta < c$, то и β принадлежит к тому же классу $\mathfrak{A}_1$, ибо каждое число в $\mathfrak{A}_2$ больше каждого числа c из $\mathfrak{A}_1$. Если же $\beta > \alpha$, то $c < \alpha$; поэтому c принадлежит к классу A_2, а следовательно, и к классу $\mathfrak{A}_2$; но так как вместе с этим $\beta > c$, то и β принадлежит к классу $\mathfrak{A}_2$, потому что каждое число в $\mathfrak{A}_1$ меньше каждого числа c из $\mathfrak{A}_2$. Таким образом, каждое число β, отличное от α, принадлежит или к классу $\mathfrak{A}_1$, или к классу $\mathfrak{A}_2$, смотря по тому, будет ли $\beta < \alpha$, или $\beta > \alpha$; следовательно, само α представляет либо наибольшее число в $\mathfrak{A}_1$, либо наименьшее в $\mathfrak{A}_2$, то есть, α есть некоторое и, очевидно, единственное число, производящее разложение системы $\mathfrak{R}$ на классы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Что и требовалось доказать.

§ 6. Вычисления с вещественными числами

Для того, чтобы вычисление с двумя вещественными числами α и β свести к вычислению с рациональными числами, нужно только по двум сечениям (A_1, A_2) и (B_1, B_2), производимым числами α и β в системе R, определить сечение (C_1, C_2), соответствующее результату γ вычисления *). Мы ограничимся здесь приведением простейшего примера —сложения.

Если c есть какое-либо рациональное число, то мы отнесем его к классу C_1, когда существует число a_1 в A_1 и число b_1 в B_1 такого рода, что $a_1 + b_1 \geq c$. Все другие числа c отнесем к классу C_2. Это подразделение всех рациональных чисел на два класса C_1 и C_2, очевидно, образует се-

*) Автор, очевидно, хотел сказать следующее: действия сложения, вычитания, умножения и деления определены были до сих пор только для рациональных чисел; для иррациональных же чисел эти действия не будут иметь смысла до тех пор, пока мы не условимся относительно того, какой именно смысл мы *желаем* им придавать в применении к иррациональным числам. Так, например, сумму двух иррациональных чисел нельзя определить ни как совокупность, в которой содержится столько единиц и аликвотных частей единицы, сколько их в двух слагаемых, вместе взятых, ни индуктивно, как это делал Грассман для целых чисел, ибо ни то, ни другое определение не имеет здесь смысла. Мы могли бы и совсем не употреблять термина „сумма“ в применении к иррациональным числам, говоря, что иррациональные числа не имеют суммы, но делать такое или подобное ограничение было бы в высшей степени неудобно; с другой стороны, сообразуясь с выгодами соблюдения в одной и той же области знания так называемого правила перманентности в определении термина (по этому правилу всякое изменение в соозначении термина должно совершаться так, чтобы новое соозначение по возможности не только не противоречило прежнему, но заключало бы последнее, как частный случай), будет наиболее целесообразным определить термины основных действий над вещественными числами так, чтобы в своем новом соозначении эти термины могли быть относимы как к рациональным, так и к иррациональным числам, и чтобы, совершая над рациональными числами действия на основании нового их определения, мы всегда получали прежние результаты. Пусть γ будет результат совершения некоторого действия O над двумя произвольными рациональными числами α и β. Если найдем правило K, по которому, зная сечения, производимые числами α и β, мы всегда в состоянии найти сечение, производимое числом γ, то действие O можно будет определить, как процесс составления некоторого сечения по правилу K из сечений, производимых числами α и β. Такое определение действия O, имея смысл и в том случае, когда одно из чисел α и β или оба они иррациональны, обладает свойством перманентности. Процесс отыскания новых перманентных определений действий при переходе от рациональных чисел ко всей системе вещественных чисел автор называет приведением вычислений с вещественными числами к вычислениям с рациональными числами.

Примеч. переводчика.

чение, ибо всякое число c_1 в C_1 меньше каждого числа c_2 в C_2. Если теперь оба числа α, β рациональные, то каждое содержащееся в C_1 число $c_1 \leq \alpha + \beta$, ибо $a_1 \leq \alpha$ и $b_1 \leq \beta$, а потому и $a_1 + b_1 \leq \alpha + \beta$. Если бы, далее, в C_2 содержалось какое-либо число $c_2 < \alpha + \beta$, так что было бы $\alpha + \beta = c + p$, где p означает положительное число, то мы нашли бы, что

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p),$$

а это находится в противоречии с определением числа c_2, так как $\alpha - \frac{1}{2}p$ есть число из A_1, а $\beta - \frac{1}{2}p$ есть число из B_1. Таким образом, каждое содержащееся в C_2 число $c_2 \geq \alpha + \beta$; следовательно, сечение (C_1, C_2) образуется в этом случае суммой $\alpha + \beta$. Мы поэтому не погрешим против определения, которое имеет место в арифметике рациональных чисел, если во всех случаях будем разуметь под *суммой* $\alpha + \beta$ двух произвольных вещественных чисел α, β то число γ, посредством которого образуется сечение (C_1, C_2)*). Далее, если только одно из двух чисел α, β — например, α — рациональное, то легко убедиться, что на сумму $\gamma = \alpha + \beta$ не влияет то обстоятельство, отнесем ли мы α к первому классу A_1 или ко второму A_2.

Так же, как сложение, можно определить и остальные операции так называемой элементарной арифметики, а именно составление разности, произведения, степени, корня, логарифма. Таким образом можно придти к действительному доказательству теорем (как, например, $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6}$), которые, сколько я знаю, до сих пор нигде не доказаны. Слишком большие подробности, которых следует опасаться при определении более сложных операций, лежат частью в природе самого предмета, большею же частью они могут быть устранены. В этом отношении является весьма полезным понятие об *интервале*, т. е. системе A рациональных чисел, обладающих следующим характерным свойством: если a и a' суть числа системы A, то все рациональные числа, лежащие между a и a', содержатся в A. Система B раци-

*) Из сечений (A_1, A_2) и (B_1, B_2) по указанному только что способу. *Примеч. переводчика.*

ональных чисел, а также и оба класса каждого ее сечения суть интервалы. Если существует рациональное число a_1, которое меньше каждого числа интервала A, и если есть рациональное число a_2, которое больше каждого числа интервала A, то A называется конечным интервалом; в этом случае существует, очевидно, бесконечное множество чисел такого же рода, как a_2. Вся область R распадается на три куска: A_1, A, A_2, причем появляются два вполне определенных рациональных или иррациональных числа α_1, α_2, которые соответственно могут быть названы нижней и верхней (или меньшей и большей) *границей* интервала A. Нижняя граница α_1 определяется сечением, в котором первый класс образован системой A_1, верхняя же граница α_2 определяется сечением, в котором A_2 образует второй класс. О всяком рациональном или иррациональном числе α, лежащем между α_1 и α_2, будем говорить, что оно лежит *внутри* интервала A. Когда все числа интервала A являются также числами интервала B, то A будет называться куском B.

Придется, повидимому, сделать еще большие отступления, когда желательно будет перенести бесчисленные предложения арифметики рациональных чисел [например, предложение, в силу которого $(a+b)c=ac+bc$] на произвольные вещественные числа. Это, однако, не так; скоро убеждаешься, что все здесь приводится к доказательству положения, по которому арифметические операции сами обладают некоторой непрерывностью. То, что я под этим понимаю, я облеку в форму общей теоремы.

„Если число λ есть результат вычислений, совершенных над числами α, β, γ,..., и если λ лежит внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C (внутри которых лежат числа α, β, γ,...) такого рода, что результат такого же вычисления, в котором, однако, числа α, β, γ,..., заменены любыми числами соответственных интервалов A, B, C,..., будет всегда представлять число, лежащее внутри интервала L“. Однако же, ужасная трудность, связанная со словесным изложением такой теоремы, убеждает нас в том, что здесь необходимо что-нибудь предпринять для того, чтобы придти в помощь языку: этого мы действительно достигаем самым совершенным образом, когда вводим понятие *о переменных величинах, о функциях, о пределах.* Всего целесообразнее было бы основать на этих понятиях определения даже простейших арифметических операций, что здесь, однако, не может быть дальше проведено.

§ 7. Анализ бесконечных

В заключение мы уясним себе зависимость между приведенными до сих пор соображениями и основными положениями анализа бесконечных.

Говорят, что переменная величина x, пробегающая последовательные определенные численные значения, приближается к постоянному *пределу* α, если она в ходе процесса изменения *окончательно* *) заключается между каждыми двумя числами, между которыми α само лежит, или, что то же, если разность $x-\alpha$, взятая абсолютно, окончательно опускается ниже всякого данного значения, отличного от нуля.

Одно из важнейших предложений гласит так: „Если величина x возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, то она приближается к некоторому пределу".

Я доказываю это предложение следующим образом: по предположению, существует одно, а следовательно, и бесчисленное множество чисел α_2 такого рода, что x постоянно остается $<\alpha_2$. Я обозначаю через $\mathfrak{A}_2$ систему всех этих чисел α_2 и через $\mathfrak{A}_1$ систему всех остальных чисел α_1; каждое из последних имеет то свойство, что впродолжение процесса изменения имеем окончательно $x \geq \alpha_1$; поэтому каждое число α_1 меньше каждого числа α_2 и, следовательно, существует число α, которое представляет собою или наибольшее в $\mathfrak{A}_1$, или наименьшее в $\mathfrak{A}_2$ (§ 5, IV). Первого быть не может, ибо x никогда не перестает возрастать, поэтому α есть наименьшее число в $\mathfrak{A}_2$. Какое бы число α_1 мы ни взяли,

*) Автор употребляет слово „definitiv"=„определенно, решительно, окончательно" в том смысле, что, приобретя какое-либо свойство в определенный момент своего изменения, переменная величина удерживает это свойство впродолжение всего остального хода процесса.

Примеч. переводчика.

рано или поздно будет окончательно $\alpha_1 < x < \alpha$, т. е. x приближается к пределу α.

Это предложение эквивалентно принципу непрерывности, то есть оно теряет свою силу, как только мы станем смотреть хотя бы на одно вещественное число, как на число, отсутствующее в области $\mathfrak{R}$; или, выражаясь иначе, если это предложение верно, то верна и теорема IV в § 5.

Другое предложение, также ему эквивалентное, но еще более часто встречающееся в анализе бесконечных, гласит так: „Если в процессе изменения величины x можно указать для каждой положительной величины δ соответствующий момент, начиная с которого x изменяется меньше, чем на δ, то x приближается к некоторому пределу".

Это обращение легко доказуемой теоремы, по которой переменная величина, приближающаяся к определенному пределу, изменяется, в конце концов, меньше, чем на любую данную положительную величину, может быть выведено как из предыдущего предложения, так и непосредственно из принципа непрерывности. Мы выберем последний путь. Пусть δ будет произвольная положительная величина (то есть $\delta > 0$); по предположению, наступает момент, начиная с которого x изменяется меньше, чем на δ, то есть, если в этот момент x обладает значением a, то впоследствии всегда $x > a - \delta$ и $x < a + \delta$. Я оставляю на время первоначальную гипотезу и держусь только сейчас доказанного факта, что все позднейшие значения переменной x лежат между конечными значениями, которые могут быть даны. На этом я основываю двойное подразделение всех вещественных чисел. К системе $\mathfrak{A}_2$ я отношу всякое число α_2 (например, $a + \delta$), обладающее тем свойством, что в ходе процесса x окончательно становится $\leq \alpha_2$; к системе $\mathfrak{A}_1$ я отношу всякое число, не содержащееся в $\mathfrak{A}_2$. Если α_1 есть такое число, то, как бы далеко процесс ни продолжался, случай $x > \alpha_1$ будет еще наступать бесчисленное множество раз *). Так как ка-

---

*) Ибо противное означало бы, что неравенство $x \leq \alpha_1$ справедливо *окончательно*, т. е. α_1 принадлежало бы к классу $\mathfrak{A}_2$.

Примеч. переводчика.

ждое число α_1 меньше каждого числа α_2 *), то существует вполне определенное число α, которым производится это сечение $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ системы $\mathfrak{R}$ и которое я буду называть верхним пределом переменной величины x, остающейся всегда конечною. Но характером изменений переменной x порождается также другое сеченне $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ системы $\mathfrak{R}$: число β_1 (например, $a - \delta$) заключается в $\mathfrak{B}_1$, если впродолжение процесса окончательно $x \geq \beta_1$; всякое другое число β_2, подлежащее включению в $\mathfrak{B}_2$, имеет то свойство, что x никогда окончательно не становится $\geq \beta_2$, так что случай $x < \beta_2$ будет наступать еще бесчисленное множество раз. Число β, производящее это сечение, пусть называется нижним пределом переменной x. Оба числа α, β очевидно характеризуются следующим свойством: если ε есть произвольно малая положительная величина, то всегда будет окончательно $x < \alpha + \varepsilon$ и $x > \beta - \varepsilon$ но никогда не будет окончательно $x < \alpha - \varepsilon$ и $x > \beta + \varepsilon$. Теперь возможны два случая. Если α и β отличны друг от друга, то необходимо $\alpha > \beta$, ибо всегда $\alpha_2 \geq \beta_1$; переменная величина x колеблется и, как бы далеко процесс ни пошел, она все еще претерпевает изменения, значения которых превосходят $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$, где ε означает произвольно малую положительную величину. Первоначальная гипотеза, к которой я теперь только возвращаюсь, находится в противоречии с этим выводом; остается, поэтому, только второй случай $\alpha = \beta$, и так как уже доказано, что как бы мала ни была положительная величина ε, окончательно будет всегда $x < \alpha + \varepsilon$ и $x > \beta - \varepsilon$, то x приближается к пределу α, что и требовалось доказать.

Удовольствуемся этими примерами в изложении связи между принципом непрерывности и анализом бесконечных.

---

*) Потому что после того, как величина x *окончательно* стала $\leq \alpha_2$, она еще больше, или сделается еще больше, чем α_1.

Примеч. переводчика.

Доказательство существования трансцендентных чисел
(по Cantor'у)

Предварительные замечания

§ 1. Число N называется *алгебраическим*, когда оно удовлетворяет уравнению вида

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0 \ldots \quad (1),$$

где показатель m есть положительное целое число, коэффициенты $a, a_1 \ldots a_{m-1}, a_m$ суть целые числа, а коэффициент a отличен от нуля.

В этом уравнении мы можем считать коэффициент a высшего члена положительным, ибо, допуская противное и меняя знаки всех членов уравнения, найдем, что число N удовлетворяет уравнению того же вида, но при этом коэффициент высшего члена есть уже положительное число. Можно также предположить, что общий наибольший делитель d всех коэффициентов уравнения равен единице, ибо, предположив d отличным от единицы и разделив обе части уравнения на d, найдем, что число N удовлетворяет уравнению вида (1) с коэффициентами, общий наибольший делитель которых равен единице.

Рассматривая алгебраические уравнения, мы всюду будем предполагать (если противное не оговорено), что эти уравнения приведены к виду (1) и что коэффициенты в этих уравнениях удовлетворяют условиям, установленным нами относительно коэффициентов уравнения (1).

Степень алгебраического уравнения, которому удовлетворяет алгебраическое число N, по определению, не может быть меньше единицы, и, следовательно, имеет minimum. Зная это, докажем следующую теорему.

Теорема I. *Если алгебраическое уравнение*

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

есть уравнение наименьшей степени, удовлетворяющееся числом N, *и если полином* A *делится без остатка на полином*

$$B = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n,$$

в котором показатель n и коэффициенты $b, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ удовлетворяют условиям, установленным соответственно относительно показателя m и коэффициентов полинома A, *то полиномы* A *и* B *тождественно равны, то есть*

$$m = n;\ a = b;\ a_1 = b_1;\ldots\ a_{m-1} = b_{n-1};\ a_m = b_n.$$

Доказательство. Нельзя допустить, чтобы было $n > m$, ибо в этом случае полином A не мог бы делиться без остатка на полином B. Покажем также, что и неравенство $n < m$ невозможно. Когда $n < m$, то частное от деления полинома A на полином B представится в виде полинома

$$C = cx^{m-n} + c_1x^{m-n-1} + \cdots + c_{m-n-1}x + c_{m-n}$$

с рациональными коэффициентами, где $c = \frac{a}{b}$ есть положительное число.

Приведем все коэффициенты $c, c_1, \ldots, c_{m-n}$ к одному знаменателю q и допустим, что после этого их числители имеют общим наибольшим делителем число d. Полином C представится в виде

$$C = \frac{d}{q} C',$$

где

$$C' = c'x^{m-n} + c'_1x^{m-n-1} + \ldots + c'_{m-n-1}x + c'_{m-n}.$$

Показатель $m - n$ и коэффициенты $c', c'_1, \ldots, c'_{m-n}$ удовлетворяют теперь условиям, установленным относительно показателя и коэффициентов полинома A, и мы имеем тождественно:

$$A = \frac{d}{q} BC'.$$

Число N, обращая в нуль полином A при замещении x на N, должно обратить в нуль один из двух полиномов

В и С′, что невозможно, ибо степени n и $m-n$ алгебраических уравнений $B=0$ и $C'=0$ меньше m, а уравнение $A=0$ есть алгебраическое уравнение наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x=N$.

Таким образом, необходимо допустить, что

$$m=n.$$

В этом случае частное от деления А на В равно $\frac{a}{b}$.

Обозначив через $\frac{a'}{b'}$ несократимую дробь, равную $\frac{a}{b}$, будем иметь тождественно:

$$ax^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=\frac{a'}{b'}(bx^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m),$$

откуда

$$b'a=a'b;\; b'a_1=a'b_1;\; \ldots;\; b'a_m=a'b_m.$$

Принимая во внимание, что a' и b' взаимно простые числа, найдем из этих равенств, что каждое из чисел $a, a_1, \ldots, a_m$ имеет делителем число a', а каждое из чисел $b, b_1, \ldots, b_m$ имеет делителем число b'; следовательно, $a'=b'=1$. Но в таком случае предыдущие равенства обращаются в

$$a=b;\; a_1=b_1;\; \ldots;\; a_m=b_m,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если полином* А *делится без остатка на полином*

$$B'=b'x^n+b'x^{n-1}+\cdots+b'_n,$$

где и есть положительное целое, $b', b'_1, \ldots, b_n'$ *суть рациональные числа и* b' *отлично от нуля, то* B′ *отличается от* А *только постоянным (независимым от* x*) рациональным множителем.* Действительно, мы видели уже, как приведением коэффициентов к одному знаменателю q и вынесением за скобки общего численного множителя d можно представить такой полином, как B′, в виде

$$B'=\frac{d}{q}B,$$

причем в полиноме

$$B=bx^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

коэффициенты удовлетворяют условиям, установленным относительно коэффициентов полинома A. Делясь без остатка на B′, полином A делится без остатка и на B, но в таком случае, в силу доказанной теоремы,

$$B = A \text{ и } B' = \frac{d}{q} A,$$

то есть, полином B′ отличается от полинома A только постоянным множителем $\frac{d}{q}$.

Теорема II. *Алгебраическое уравнение* $A=0$ *наименьшей степени* m, *удовлетворяющееся при* $x=N$, **неприводимо,** *т. е. левая его часть неспособна делиться без остатка ни на какой полином*

$$B = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

где $n<m$ *есть положительное целое число,* $b, b_1, \ldots, b_n$ *суть рациональные числа и* b *отлично от нуля.*

Ибо, допустив, что A делится на B, мы нашли бы, что B отличается от A только постоянным множителем и, следовательно, степень n полинома B не могла бы быть ниже степени m полинома A.

Теорема III. *Если алгебраическое уравнение*

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$

удовлетворяющееся при $x=N$, *неприводимо, и если*

$$B = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

есть одно из алгебраических уравнений наименьшей степени, удовлетворяющихся при $x=N$, *причем коэффициенты* b *удовлетворяют условиям теоремы I, то полиномы* A *и* B *тождественно равны.*

Доказательство. Так как каждый из полиномов A и B делится без остатка на $x-N$, то их общий наибольший делитель D зависит от x. Из самого же процесса нахождения общего наибольшего делителя D вытекает, что D есть полином вида

$$D = dx^p + d_1x^{p-1} + \cdots + d_p,$$

где p есть положительное целое, d, $d_1, \ldots$ — целые числа *), коих общий наибольший делитель можно принять равным единице *), и d отлично от нуля. Отсюда, согласно теореме I, вытекает, что полиномы B и D тождественны; следовательно, полином A делится без остатка на полином B; но полином A неприводим; следовательно, степень m полинома A равна степени n полинома B. Частное от деления A на B будет поэтому равно $\frac{a}{b}$ и не будет зависеть от x. Частное $\frac{B}{A}$ будет, следовательно, равно $\frac{b}{a}$, то есть полином B делится без остатка на полином A, а так как $B = 0$ есть уравнение наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x = N$, и B делится без остатка на A, то, по теореме I, полиномы B и A тождественны, что и требовалось доказать.

Теорема IV. *Существует только одно алгебраическое уравнение* **) *наименьшей степени с целыми коэффициентами, коих общий наибольший делитель равен единице, удовлетворяющееся данным алгебраическим числом* N. *Это уравнение будем называть уравнением, определяющим алгебраическое число* N.

Ибо, если $A=0$ и $B=0$ суть два алгебраических уравнения наименьшей степени с целыми коэффициентами, коих общий наибольший делитель равен единице, удовлетворяющихся числом N, то, по теореме II, уравнение $A=0$ неприводимо, а по теореме III полиномы A и B тождественно равны.

Следствие. Если алгебраическое число N удовлетворяет алгебраическому неприводимому уравнению $A=0$, то уравнение $A = 0$ и есть то единственное уравнение, которым определяется алгебраическое число N.

---

*) Если бы некоторые из коэффициентов d не были целыми, то, умножив все коэффициенты на их общего наименьшего знаменателя и разделив полученные после умножения числители на их общего наибольшего делителя, получим общий наибольший делитель полиномов A и B в требуемой форме.

**) Коэффициент высшего члена этого уравнения предполагается положительным.

Определение трансцендентного числа

§ 2. К классу алгебраических чисел относятся:

1) Все рациональные числа, ибо каждое рациональное число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{b}{a}$, которая определяется алгебраическим неприводимым уравнением

$$ax - b = 0.$$

2) Все те иррациональные числа, которые получаются, как результат соединения рациональных чисел при помощи конечного числа рациональных действий ($+$, $-$, $\times$, $:$) и извлечения конечного числа корней с целыми показателями, ибо такие иррациональные числа, как доказывается в высшей алгебре, суть корни неприводимых алгебраических уравнений с целыми коэффицентами.

3) Все те иррациональные числа, которые, служа корнями алгебраических неприводимых уравнений с целыми коэффицентами, не могут быть получены, как результаты соединения рациональных чисел посредством конечного числа рациональных действий и конечного числа извлечений корней с целыми показателями. Существование таких *алгебраических* иррациональных чисел впервые доказано Абелем.

Спрашивается, исчерпывается ли *весь* класс иррациональных чисел двумя классами алгебраических иррациональных чисел, или существуют еще иррациональные неалгебраические числа, т. е. такие, которые не могут удовлетворять никакому неприводимому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.

Намек на существование неалгебраических иррациональных чисел содержится уже у английского геометра James Gregory (1638—1675) в его сочинении Vera circuli et hyperbolae quadratura. Лейбниц назвал такие числа *трансцендентными*.

Итак, *трансцендентным называется всякое число, которое неспособно удовлетворить никакому алгебраическому неприводимому уравнению с целыми коэффицентами.*

Строгое доказательство существования трансцендентных чисел дано впервые Liouville'ем (Comptes rendus, 1844, и журнал Liouville'я 16, 1851). Оно основано на теории непрерывных дробей и представляется довольно сложным *). Замечательное по простоте и гениальное по идее доказательство существования трансцендентных чисел дано было затем германским геометром Georg'ом Cantor'ом в статье Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeller algebraischer Zahlen в журнале Crell'я 77 (1873). К изложению этого доказательства мы теперь и переходим.

Понятие об исчислимом комплексе

§ 3. Комплексом называют совокупность, составленную из ограниченного или неограниченного числа предметов, называемых членами комплекса.

Мы будем рассматривать только такие комплексы, членами которых служат вещественные числа, взятые в неограниченном числе.

Cantor называет *исчислимым комплексом* (abzählbare Menge) такой комплекс, члены которго могут быть перенумерованы, т. е. расположены в один ряд таким образом, чтобы каждый член комплекса занимал в этом ряду совершенно определенное место (указываемое нумером) и чтобы каждое определенное, указанное нумером, место ряда было занято одним только определенным членом комплекса.

Комплекс положительных четных чисел представляет пример исчислимого комплекса, ибо, располагая эти числа в порядке их возрастания,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots,\ 2n, \ldots,$$

видим, что каждый член (например, $2n$) занимает совершенно определенное (n-ое) место и, наоборот, каждое определенное (n-ое) место занято одним определенным членом ($2n$).

---

*) См. также: 1) E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898, стр. 26—33. 2) В. Каган. Новое доказательство трансцендентности чисел π и e. „Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики“, № 286.

Комплекс натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ n, \ldots \qquad (2)$$

представляет другой пример исчислимого комплекса.

Члены этого комплекса могут быть рассматриваемы, как нумера мест, занимаемых членами любого исчислимого комплекса, и, следовательно, между членами всякого исчислимого комплекса и членами комплекса (2) существует взаимно однозначное соответствие, то есть каждому члену исчислимого комплекса соответствует член комплекса (2) и каждому члену комплекса (2) соответствует один определенный член исчислимого комплекса.

Когда между членами двух комплексов возможно установить взаимно однозначное соответствие, то Cantor говорит, что эти комплексы имеют одинаковую *мощность* (Mächtigkeit). Можно поэтому установить следующее определение:

Исчислимым комплексом называется комплекс, мощность которого равна мощности комплекса натуральных чисел.

С первого взгляда может показаться, что комплекс *всех рациональных* положительных чисел не есть исчислимый комплекс. Действительно, располагая все эти числа в один ряд по порядку их возрастания, находим, что каждому определенному рациональному положительному числу N предшествует бесчисленное множество других рациональных положительных чисел, меньших N, вследствие чего нельзя указать нумера места, занимаемого в этом ряду числом N. Можно, однако же, дать другое расположение членам комплекса рациональных положительных чисел и притом такое, что каждый член этого комплекса будет занимать совершенно определенное место.

Комплекс рациональных положительных чисел есть комплекс всех неравных между собою рациональных положительных несократимых дробей, которых знаменатели в частных случаях могут быть равны единице. Рассмотрим одну такую несократимую дробь $\frac{a}{b}$. Положим

$$H = a + b. \qquad (3)$$

и будем называть целое положительное число H высотою рассматриваемой несократимой дроби. Каждая несократимая дробь будет иметь определенную высоту Н. Наоборот, существует только *ограниченное число* несократимых дробей, имеющих данное целое положительное число Н своею высотою.

Для нахождения всех этих дробей достаточно разрешить относительно неизвестных a и b неопределенное уравнение (3) в целых и положительных числах, взять значения a числителями, а соответствующие значения b знаменателями дробей и отбросить все те дроби, которые окажутся сократимыми. А так как уравнение (3) допускает только ограниченное число целых и положительных решений, то число несократимых дробей, имеющих Н своею высотой, непременно будет ограниченным. Так, например, в группе дробей

$$\frac{1}{9}, \ \frac{3}{7}, \ \frac{7}{3}, \ \frac{9}{1}$$

заключаются все те положительные рациональные числа, которых высота равна 10.

Если распределим все положительные рациональные числа в классы по их высотам 1, 2, 3, 4,..., если затем внутри каждого класса расположим числа в порядке их возрастания и если, наконец, соединим эти классы в один ряд, как это здесь показано:

$$\begin{array}{llc|c|c|c}
\text{числа:} & 0,1, & \underbrace{\frac{1}{2}, \ \frac{2}{1}} & \underbrace{\frac{1}{3}, \ \frac{3}{1}} & \underbrace{\frac{1}{4}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{1}} & \ldots, \\
\text{высоты:} & 1,2, & 3, & 4, & 5, & \ldots,
\end{array}$$

то каждое положительное рациональное число будет занимать в этом ряду определенное место, и на каждом месте будет находиться только одно определенное число. Таким образом, комплекс рациональных положительных чисел оказывается исчислимым комплексом.

Комплекс вещественных алгебраических чисел

§ 4. Доказательство существования трансцендентных вещественных чисел основывается у Cantor'а на следующих двух теоремах.

Первая теорема Cantor'а. *Комплекс вещественных алгебраических чисел есть исчислимый комплекс.*

Доказательство. Пусть N будет алгебраическое число, определяемое неприводимым алгебраическим уравнением

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_nx + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

с целыми коэффициентами, причем $a > 0$. Обозначим через $|a_n|$ численную величину коэффициента a_n. Положим

$$H = m - 1 + a + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots + |a_m| \qquad (4)$$

и будем называть число H высотою алгебраического числа N и определяющего его уравнения $A=0$. Каждое алгебраическое число имеет, таким образом, определенную высоту H, которая выражается целым положительным числом.

Наоборот, существует только ограниченное число вещественных алгебраических чисел, которых высота равна данному положительному целому числу H. Чтобы найти все алгебраические числа высоты H, составим все те алгебраические неприводимые уравнения, которых высота равна H. Для этой цели достаточно будет сначала разрешить в целых и положительных числах неопределенное уравнение (4), допускающее только конечное число систем целых и положительных значений для m, a, $|a_1|, \ldots, |a_m|$. Имея все системы решений уравнения (4), напишем все те алгебраические уравнения, которых высота равна H, причем коэффициентами при x^n ($n = m-1$, $m-2, \ldots$, 1,0) в составляемых уравнениях будут служить различные значения выражения $\pm |a_n|$. Из полученной таким образом системы уравнений исключим все приводимые уравнения, а также и все те уравнения, коэффициенты которых имеют общим наибольшим делителем число, отличное от единицы. Остающаяся после этого система уравнений будет в себе заключать все те и только те неприводимые алгебраические уравнения, которых высота равна H. Система конечного числа вещественных чисел, из коих каждое удовлетворяет одному из этих уравнений, будет содержать все те и только те алгебраические числа, которых высота равна H*).

---

*) Найдем, для примера, все те вещественные алгебраические числа, которых высота равна 4. Полагая в уравнении (4) $H = 4$ и за-

Если распределим все вещественные алгебраические числа в классы по их высотам 1, 2, 3, 4, ..., если затем внутри каждого класса расположим числа в порядке их возрастания и если, наконец, соединим эти классы в один ряд, то каждое вещественное алгебраическое число будет занимать в этом ряду вполне определенное место и на каждом месте будет находиться только одно определенное алгебраическое число. Теорема Cantor'а, таким образом, доказана.

Вторая теорема Cantor'а. *Можно найти бесконечное число вещественных чисел, заключающихся между данными пределами a и $b > a$ и не содержащихся в данном исчислимом комплексе вещественных чисел.*

мечая, что при этом m не может быть больше 5 и что a_m необходимо отлично от 0 (ибо в противном случае соответствующее алгебраическое уравнение степени m, имея корень $x = 0$, будет приводимым), находим, что вопрос приводится к решению в целых и положительных числах каждого из следующих неопределенных уравнений:

$$a + |a_1| = 4 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (m = 1)$$
$$a + |a_1| + |a_2| = 3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (m = 2)$$
$$a + |a_1| + |a_2| + |a_3| = 2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (m = 3)$$
$$a + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 1 \quad \dots\dots\dots \quad (m = 4)$$
$$a + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| = 0 \quad \dots\dots \quad (m = 5)$$

Последнее уравнение не допускает положительного значения для a и потому должно быть отброшено. Уравнение, соответствующее $m = 4$, уже при $a = 1$ не допускает для $|a_4|$ значения, отличного от 0, и потому также должно быть отброшено. В уравнении, соответствующем $m = 1$, числа a и $|a_1|$ положительны и общий наибольший делитель их равен единице, а потому имеем только следующие две системы решений:

$$a = 1\,;\ |a_1| = 3,$$
$$a = 3\,;\ |a_1| = 1,$$

соответственно чему имеем четыре уравнения:

$$x + 3 = 0\,;\ x - 3 = 0;\ 3x + 1 = 0\,;\ 3x - 1 = 0.$$

Уравнение, соответствующее $m = 2$, допускает, при a и $|a_2|$ положительных, только следующие системы решений:

$$a = |a_1| = |a_2| = 1$$
$$a = 1,\ a_1 = 0,\ |a_2| = 2 \text{ и } a = 2,\ a_1 = 0,\ |a_2| = 1,$$

соответственно чему имеем 8 уравнений:

$$x^2 + x + 1 = 0\,;\ x^2 - x + 1 = 0\,;\ x^2 + x - 1 = 0\,;\ x^2 - x - 1 = 0\,;$$
$$x^2 + 2 = 0\,;\ x^2 - 2 = 0;\ 2x^2 + 1 = 0;\ 2x^2 - 1 = 0.$$

Доказательство. Пусть C будет исчислимый комплекс вещественных чисел. Расположим эти числа в один ряд

$$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, \ldots\ldots \qquad (5)$$

так, чтобы каждое занимало в этом ряду вполне определенное место, и обратим каждое число N в бесконечную десятичную дробь. Если какое-либо из чисел N обращается в конечную десятичную дробь—например, $0\cdot 26$,—то эту десятичную дробь можно будет представить в виде бесконечной десятичной дроби двумя способами: как бесконечную десятичную дробь с периодом 0 и как бесконечную десятичную дробь с периодом 9, то есть

$$0{\cdot}26 = 0{\cdot}260\,00\ldots \text{ и } 0{\cdot}26 = 0{\cdot}259\,99\ldots$$

Мы предположим, что, если в ряду (5) какое-либо из чисел N обращается в конечную десятичную дробь, то число N замещено двумя равными ему бесконечными десятичными дробями. Найдем затем две конечные десятичные дроби, отличающиеся друг от друга только одною единицею какого-либо десятичного порядка и содержащиеся между двумя данными пределами a и $b > a$. Пусть, например, будет

$$a < 0{\cdot}45 < 0{\cdot}46 < b$$

Составим бесконечную десятичную дробь

$$c = 0{\cdot}45c_3c_4c_5\ldots c_n\ldots$$

Первые два уравнения, а также и уравнения $x^2+2=0$, $2x^2+1=0$, как не содержащие вещественных корней, должны быть отброшены. Уравнение, соответствующее $m=3$, допускает, при a и $|a_3|$ положительных, только одну систему решений

$$a = |a_3| = 1;\ |a_1| = |a_2| = 0,$$

соответственно чему имеем 2 уравнения

$$x^3 \pm 1 = 0.$$

Оба эти уравнения, как приводимые, должны быть отброшены. Таким образом, находим, что неприводимыми алгебраическими уравнениями высоты 4, удовлетворяющимися вещественными значениями x, будут только следующие уравнения:

$$x \pm 3 = 0;\ 3x+1=0;\ x^2 \pm x - 1 = 0;\ x^2 - 2 = 0;\ 2x^2 - 1 = 0,$$

Вещественными алгебраическими числами, которых высота равна 4, будут следующие 12 чисел:

$$\pm 3;\ \pm\frac{1}{3};\ \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2};\ \pm\sqrt{2};\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

где $c_3, c_4, \ldots, c_n$ суть последовательные цифры числа c, начиная с третьего десятичного порядка. Каковы бы ни были цифры $c_3, c_4, \ldots, c_n, \ldots$, дробь c будет содержаться в интервале 0·45 и 0·46, а следовательно, между a и b. Возьмем теперь c_3 отличным от третьей цифры десятичного порядка числа N_1, или отличным от третьих цифр двух бесконечных периодических дробей, заменяющих в ряду (5) место числа N_1. Точно также возьмем c_4 отличным от четвертой цифры числа N_2 или от четвертых цифр двух дробей, заменяющих в ряду (5) число N_2 и т. д., вообще, цифру c_n возьмем отличною от n-ой цифры числа N_{n-2} или от n-ых цифр двух бесконечных десятичных дробей, замещающих число N_{n-2} в ряду (5). Если затем подчиним выбор цифр $c_3, c_4, \ldots$ какому-либо определенному дополнительному правилу, которое позволяло бы выбирать каждую цифру одним только способом, то для числа c получим определенную бесконечную десятичную дробь, содержащуюся между пределами a и b и не входящую в состав комплекса C. Действительно, допуская противное, мы нашли бы, что c занимает определенное n-ое место в ряду (5), что невозможно, так как $(n+2)$-ой десятичный знак числа c отличается от соответствующего $(n+2)$-ого знака числа N_n, или от $(n+2)$-ых цифр двух бесконечных десятичных дробей, равных N_n.

Таких чисел, как c, можно составить сколько угодно, вариируя дополнительное правило выбора цифр $c_3, c_4 \ldots$, что и требовалось доказать.

Как непосредственное следствие из приведенных двух теорем Cantor'а вытекает

Третья теорема Cantor'а. *Существует неограниченное число вещественных трансцендентных чисел, содержащихся между двумя данными вещественными пределами* a и $b > a$.

Ибо, по первой теореме Cantor'а, комплекс вещественных алгебраических чисел есть исчислимый комплекс C, а по второй теореме можно написать сколько угодно вещественных чисел, не содержащихся в этом комплексе и заключающихся между пределами a и b.

СКЛАД ИЗДАНИЯ:
Одесское Отделение
Гос. Изд Украины
Одесса, Пушкинск. 1