Ф. МЕННХЕН

НЕКОТОРЫЕ ТАЙНЫ АРТИСТОВ-ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ

ПЕРЕВОД ПОД РЕД.
ПРОФ. И. Ю. ТИМЧЕНКО

MATHESIS

ОДЕССА 1923

Ph. MAENNCHEN

GEHEIMNISSE DER RECHENKÜNSTLER

ОПЕЧАТКИ

Стр.	*Строка*	*Напечатано*:	*След. читать*:
19	15 св.	11	10
27	4 „	11 и 4	10 и 14
41	9 „	сделать	сделать,

Р. О. П. (Одесса) № 456.
1-я Госуд. тип. им. К. Маркса, Стурдзовский пер., № 3-а.
Заказ № 1830. 3000 экз.

Ф. МЕННХЕН

НЕКОТОРЫЕ ТАЙНЫ АРТИСТОВ-ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ

ПЕРЕВЕЛА СО 2-ГО НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ Е. Н. ЛЕЙНЕНБЕРГ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. И. Ю. ТИМЧЕНКО

MATHESIS

ОДЕССА 1923

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИБАВЛЕНИЕ

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

Предисловие к русскому переводу

Предлагаемая в русском переводе книжка предназначена прежде всего для удовлетворения любопытства тех, кто желал бы узнать, с помощью каких специальных математических приемов могут производиться трудные вычисления в уме теми лицами, которые именуют себя артистами-вычислителями, или феноменальными счетчиками, и которые избрали своей профессией публичную демонстрацию своих действительно удивительных вычислительных способностей.

Но приемы эти излагаются в книжке Меннхена не только с большой ясностью и достаточной подробностью, что делает их доступными всякому даже и мало опытному математику, но и ставятся в связь с замечательными свойствами чисел — предложениями теории чисел, что делает их привлекательными и для более опытных математиков, в особенности для интересующихся этой теорией. Приемы вычисления, излагаемые автором книжки, представляют немалый практический интерес в смысле усовершенствования способов счета вообще.

Одесса
28 Января 1923 г.

И. Ю. Тимченко

Предисловие к первому немецкому изданию

Эта работа предполагает небольшие математические познания: умение возвышать в степень, извлекать корни, производить вычисления с помощью логарифмов и некоторое знакомство с биномом Ньютона. Конечно, было бы лучше, еслибы читатель был в известной мере знаком с методом поверки посредством девятки и одиннадцати; и, быть может, эта книжка будет способствовать тому, что эти поверки будут несколько чаще применяться. Они этого на самом деле заслуживают.

Цель этой работы — раскрыть те методы, которыми пользуются „артисты-вычислители", извлекая в уме корни высоких степеней и вычисляя время празднования Пасхи. Несмотря на то, что артисты-вычислители зачастую обещают, показывая свое искусство, разъяснить методы, которыми они пользуются, обычно это касается других их приемов. И если они и учат подростков двенадцати-четырнадцати лет извлекать в уме радикалы третьей степени, то и в этом случае они не дают похитить ни одной из своих настоящих тайн, становясь на точку зрения Мефистофеля:

> Все лучшее, что можешь ты познать,
> Не должен поверять мальчишкам.

Особый отдел посвящен четвероногим вычислителям, недавно „выступавшим". В прибавлении изложены более подробно математические основы „тайн"; особенное внимание уделено малой теореме Ферма, причем я постарался выявить глубокое значение этой замечательной теоремы возможно ярче.

Алцей, Август 1913.

Ф. Меннхен

Предисловие ко второму немецкому изданию

Ввиду благосклонного приема, который встретили мои „Тайны“, мне представилось необходимым приступить к новому изданию гораздо быстрее, чем я мог на то надеяться. Я пользуюсь теперь случаем, чтобы по возможности осуществить разного рода пожелания, которые были высказаны в отзывах об этой книжке. Существующая литература указана теперь полнее, в Прибавлении введена новая глава, без того, однако, чтобы существенно изменился объем первого издания. Эти ограничения объемом первого издания повлекли за собою то, что я оставил без разъяснения некоторые уловки, которыми пользуются артисты-вычислители, разрешая в уме уравнения третьей и высших степеней.

Приношу благодарность всем, кто, письменно или в специальных журналах, сделал свои указания относительно желательных улучшений. И мне очень хотелось бы найти и для этого нового издания таких читателей, которые не стали бы только бегло просматривать книжку, а, проделав заново все вычисления, постарались бы придумать другие, быть может, более простые пути.

Гиссен, Февраль 1918.

Ф. Меннхен

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Корни 3 степени из чисел, содержащих от 4-х до 12-ти знаков

Желая дать представление о деятельности „артиста-вычислителя“ и тем, кто никогда не видел его в деле, я буду всегда ставить задачу так и в такой обработке, как это происходит в публичных выступлениях таких артистов. Кто-либо из публики (П.) предлагает определенного рода задачу, вычислитель (В.) говорит, какими заданиями он хочет ограничиться, П. предлагает такого рода данные, и, обыкновенно после довольно короткой паузы, В. объявляет результат.

Затем следуют с моей стороны разъяснения, которые, за исключением некоторых вполне безобидных и довольно известных случаев, остаются в долгу за вычислителем.

1-ая задача

П.: Корень 3-ей степени из 5-тизначного числа!

В.: Пожалуйста, диктуйте мне цифры справа на лево!

П.: ...683.

В.: Остановитесь, этого достаточно! — Число 27.

Корень третьей степени из пятизначного числа должен быть числом двузначным. Так как третья степень оканчивается цифрой 3, то основание должно кончаться на 7. Поэтому основание может быть представлено в виде $10x+7$.

Третья степень двучлена $10x+7$ есть

$$1000\,.\,x^3+3\,.\,100\,.\,x^2\,.\,7+3\,.\,10\,.\,x\,.\,7^2+7^3.$$

$7^3=343$ содержит 3 единицы и 4 десятка. Остальные 4 (из указанных 8) десятка должны содержаться в произведении $3\,.\,10\,.\,x\,.\,7^2$. Это $3\,.\,7^2\,.\,x$ или $147\,.\,x$ десятков, из которых в рассмотрение входят только $7\,.\,x$, ибо остальные $140\,.\,x$ дают только сотни и тысячи. Отсюда следует, что произведение $7\,.\,x$ должно оканчиваться 4, следовательно, $x=2$, и число равно 27.

Примем во внимание, что специалист вычислитель обладает необыкновенным навыком. В его мозгу с молниеносной быстротой проходит приблизительно следующий ряд соображений:

7 единиц; $7^3=34\mathit{3}$; $8-4=\mathit{4}$; $3\,.\,7^2$ оканчивается на *7*; $7\,.\,\mathit{2}$ оканчивается на 4; *2* десятка.

Я вижу, что у некоторых моих читателей готовы сорваться с уст еще вопросы. Так, один желал бы знать, почему вычислитель не говорит сразу: „Задайте мне две последние цифры справа!“ Это—мера предосторожности, которая оправдывалась довольно часто его практикой; ибо, как мы еще увидим, две последние цифры не всегда бывают достаточны. Если они даны так, что их достаточно, то вычислитель говорит: „Довольно!“ Если же нет, то он дает продиктовать себе все подкоренное число.

Другой читатель желал бы, может быть, знать, почему вычислитель дает продиктовать себе 3 цифры, в то время как двух было бы достаточно. Это—также мера предосторожности; она должна предотвратить слишком легкое отгадывание фокуса.

Рассмотрим еще одну задачу этого рода.

2-ая задача

П.: Корень 3-ей степени из пятизначного числа.

В.: Диктуйте снова справа на лево!

П.: ...336.

В.: Довольно! — Корень 3-ей степени равен 46.

Прием вычислителя следующий: 6 единиц; $6^3 = 21\mathit{6}$; $3 - 1 = \mathit{2}$; $3 . 6^2$ оканчивается на $\mathit{8}$; $8 . \mathit{4}$ и $8 . \mathit{9}$ оканчивается на 2. Следовательно, корень 3-ей степени будет либо 46, либо 96.

Но так как 96^3 число шестизначное, то только 46 может явиться искомым ответом.

Если и дальше составлять подобного рода примеры, то окажется: когда число оканчивается на 1, 3, 7, 9, то десятки определяются однозначно; если же оно оканчивается на 2, 4, 6 или 8, то задача допускает два решения, из которых одно почти всегда не подходит для предписанного числа знаков.

3-я задача

П.: Корень 3-ей степени из восьмизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста!

П.: 45 118 016.

В.: 356.

Искомое число, как это легко можно усмотреть, содержит 3 сотни и 6 единиц. Трудность заключается теперь в том, чтобы безошибочно определить число десятков. Можно было бы попытаться применить метод, которым мы пользовались в двух предыдущих задачах, но он дает обыкновенно, как мы это видели во 2-ой задаче, два решения, и в данном случае число цифр не дает нам средства признать одно из двух решений непригодным. Для однозначного определения числа десятков нам послужит здесь остаток от деления на одиннадцать.

Быть может, следовало бы напомнить, что остаток от деления числа на одиннадцать может быть найден вычитанием суммы цифр, стоящих на четных местах, из суммы цифр, стоящих на нечетных местах. Я хочу также напомнить моим читателям и о том, что остаток от деления на одиннадцать произведения равен остатку от деления на одиннадцать произведения остатков от деления на то же число сомножителей. Ибо, если один из множителей при делении на 11 дает в остатке p, то этот множитель будет вида $11a+p$, и если остаток от деления другого можителя на 11 равен q, то этот множитель имеет вид $11b+q$.

В таком случае, произведение обоих множителей имеет вид

$$121ab + 11aq + 11bq + pq.$$

Первые три члена этой суммы при делении на одиннадцать дают в остатке 0, следовательно, остаток от деления на одиннадцать произведения равен остатку от деления на 11 числа pq, что и требовалось доказать. Замечу, что ход доказательства протекает так же, если рассматривать вместо остатка от деления на одиннадцать другой остаток, например, тот, который получается при делении на 9[1]).

Далее, остаток от деления на 11 некоторой степени равен остатку от деления на 11 той же степени остатка, получаемого от деления основания на 11. Этим свойством мы пользуемся и составляем таблицу, в которой первая строка содержит остатки от деления на одиннадцать чисел от 0 до 10, во второй и в третьей строках содержатся соответственные остатки от деления на одиннадцать 2-ых и 3-их степеней этих чисел. Таким образом, мы получаем:

	Остатки от деления на одиннадцать										
1 степень...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 „ ...	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
3 „ ...	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

1) Примеры на поверки с помощью 9 и 11 будут рассмотрены в прибавлении I.

Так как в нашей задаче остаток от деления подкоренного числа на 11 равен 9, то, как показывает вышеприведенная таблица, основание при делении на 11 дает остаток, равный 4. Теперь нужно определить трехзначное число, которое состоит из трех сотен и шести единиц и при делении на 11 дает в остатке 4. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах, равна 9, а потому цифра, занимающая четное место, должна быть 5, так как разность составляет 4. Таким образом, искомое число есть 356.

И здесь весь процесс происходит снова с ошеломляющей быстротой. Так как „артист-вычислитель“ обыкновенно является также „артистом мнемоники“, то запоминание указанной таблицы представляет для него мало затруднений; он может легко, в случае необходимости, запечатлеть ее с помощью мнемотехнических приемов.

При рассмотрении одной из ближайших задач мы изучим прием, пользуясь которым, можно, вообще, обходиться без таких таблиц.

4-ая задача

П.: Корень 3-ей степени из семизначного числа.

В.: Прошу диктовать справа налево!

П.: ...313.

В.: Остановитесь, достаточно!—Число 217.

Мы поступаем, как при решении 1-ой задачи, но только несколько подробнее, принимая в соображение также и сотни.

$7^3 = 343$; $..313 - 343 = ..970$; $3 . 7^2 . 1$ оканчивается на 7, следовательно, искомое число имеет один десяток; $3 . 7^2 . 1 = 147$, причем только 47 десятков входят в наше рассмотрение.

$$97 - 47 = 50,$$

следовательно, остаются еще 5 сотен. Последние составляются из $3 . 7 . 1^2$ и из $3 . 7^2 . y$, где y обозначает число сотен результата. $3 . 7 . 1^2$ дает 21 сотню. Отсчитываю 1 сотню от упомянутых 5 сотен и сохраняю в уме еще 4 сотни. Произведение $3 . 7^2 . y$ или, проще, $27y$, или, еще проще, $7y$ должно оканчиваться на 4, поэтому $y = 2$, и искомый кубический корень есть 217.

Прием, очерченный здесь, применяется реже и приложим, вообще, только тогда, когда дано нечетное число единиц.

5-ая задача

П.: Корень 3-ей степени из десятизначного числа:

В.: Пожалуйста, диктуйте!

П.: 3 532 642 667.

В.: 1 523.

По первому знаку слева мы узнаем, что искомое число содержит 1 тысячу; по единицам данного числа мы узнаем, что в корне их имеется 3. Затем для определения числа десятков следует вычисление, подобное тому, какое было в 1-ой задаче.

$3^3 = 27$; $6 - 2 = 4$; $3 \cdot 3^2 \cdot 2$ оканчивается на 4. Следовательно, искомое число имеет

2 десятка. Недостающие еще теперь сотни определяются с помощью остатка от деления на 11. Для подкоренного числа таковой равен 4, следовательно, для основания, согласно таблице, помещенной на стр. 5, он должен быть равен 5. Сумма цифр, стоящих на четных местах, равна 3, следовательно, сумма цифр, занимающих нечетные места, должна быть равна 8. Так как одна из этих цифр есть 3, то другая должна быть 5, откуда получается искомое число 1 523.

Еслибы последняя цифра справа была четным числом, то для второй цифры представились бы два возможных ответа. Как помогает себе в этом случае вычислитель, мы разъясним впоследствии.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Корни 7-ой степени из чисел, содержащих от 8 до 28 знаков

6-ая задача

П.: Корень 7-ой степени из двенадцатизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста, цифры справа налево!

П.: . . . 7.

В.: Можете называть цифры в любом порядке!

П.: 887 621 111 107 (число, что я советую проверить моему читателю, равно 271 818 611 107).

В.: 43.

„Как видите, я извлекаю корни также и тогда, когда цифры заданы в любом порядке. Уже Гаусс пользовался этим приемом!“

Это добавление сделал однажды один вычислитель во время своего представления, и в вызванных этим отзывах нередко проглядывала та точка зрения, будто бы вычислитель может пренебрегать порядком цифр во **всех** задачах. Мы скоро убедимся в том, что это не так. Ссылка на Гаусса, которую он едва ли мог бы оправдать[1]), служит только к тому, чтобы всему дать еще более таинственный вид. Решение же загадки чрезвычайно просто:

Число содержит 3 единицы, ибо первая степень оканчивается той же цифрой, что и 5-ая, 9-ая, 13-ая, 17-ая, ..., $(4n+1)$-ая степени, а 3-ья так же, как и 7-ая, 11-ая, 15-ая, 19-ая, ..., $(4n+3)$-ья степени[2]).

Остаток от деления на 9, как известно, определяемый из суммы цифр, где порядок цифр не играет никакой роли, в данном случае равен 7, следовательно, и искомое число при делении на 9 дает в остатке 7, а потому число десятков равно 4.

Теорема, которой при этом пользуются, гласит:

Остаток от деления 7-ой степени числа на 9, за двумя исключениями, равен остатку

---

[1]) Теорема, лежащая в основе этого приема, несомненно не прошла незамеченной для Гаусса в его обширных исследованиях о степенных вычетах.

[2]) Доказательство можно найти в прибавлении III.

от деления на 9 основания. Для доказательства представляем таблицу.

	Остатки от деления на 9								
1 степень .	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2 „ .	0	1	4	0	7	7	0	4	1
3 „ .	0	1	8	0	1	8	0	1	8
4 „ .	0	1	7	0	4	4	0	7	1
5 „ .	0	1	5	0	7	2	0	4	8
6 „ .	0	1	1	0	1	1	0	1	1
7 „ .	0	1	2	0	4	5	0	7	8

В первой строке помещены остатки от деления на 9 чисел от 0 до 8, в следующих строках остатки от деления на то же число 2-ой, 3-ей, 4-ой,... до 7-ой степеней. Видно, что на самом деле, за исключением остатков от деления на 9 степеней чисел 3 и 6, теорема оказывается справедливой, и таким образом мы узнаем простую подкладку искусственного приема, который с первого взгляда так ошеломляет. Исключения для 3 и 6 я рассмотрю позже в связи с другими трудностями.

При этой задаче дело могло бы разыграться следующим образом:

П.: Корень 7-ой степени из двенадцатизначного числа.

В.: Прошу диктовать справа налево!

П.: ...07.

В.: Остановитесь, этого достаточно. — Число 43.

Искомое число имеет 3 единицы; 3^7 оканчивается на 87, следовательно, имеет 8 десятков; остальные 2 десятка даст $7 \cdot 3^6 \cdot x$, таким образом,

$$7 \cdot 9 \cdot x = 63x;$$

отсюда в рассмотрение входят только $3x$. Произведение $3x$ должно оканчиваться на 2, откуда $x = 4$; число есть 43.

Мы применили при этом формулу бинома Ньютона для $n = 7$:

$$(3+10x)^7 = 3^7 + 7 \cdot 3^6 \cdot 10x + 21 \cdot 3^5 \cdot 100x^2 + \ldots,$$

причем в рассмотрение входят только два первых члена правой части.

Еще быстрее приводит к цели при той же задаче следующий прием: возвышают в 3-ю степень число, составленное из десятков и единиц подкоренного числа, таким образом, в данном случае число 7. Число, образованное десятками и единицами этой третьей степени, и есть искомый корень 7-ой степени; в нашем случае:

$$7^3 = 343; \ 43.$$

Этим изящным приемом я обязан Иоганну Губбесу (Johann Hubbes) из Кронштадта (Трансильвания), написавшему несколько чрезвычайно интересных книжек по вопросам о вычислении в уме и извлечении корней[1]). Я нашел в них несколько искусственных приемов вычисления, бывших мне до того времени неизвестными, и я советую тем из моих

[1]) См. указатель литературы в конце книги.

читателей, которые захотели бы познакомиться еще с некоторыми „тайнами", изучить эти книжечки.

Как объясняется, однако, этот прием? Очень просто при помощи следующей теоремы. Двадцатая степень каждого нечетного числа, не оканчивающегося 5-ю, оканчивается на 01, и, следовательно, две последние цифры 21-ой степени должны быть такими же, как в первоначальном числе.

Легко видеть, что также и 40-ая, 60-ая, 80-ая, ..., $(20 \cdot n)$-ая степени нечетного числа, не оканчивающегося пятеркой, оканчиваются на 01, и что поэтому также 41-ая, 61-ая, 81-ая, ..., $(20n+1)$-ая степени каждого такого числа должны оканчиваться теми же двумя цифрами, что и первоначальное число.

Тех моих читателей, которые пожелают углубиться в этот предмет, я отсылаю к главе в прибавлении: Применения бинома Ньютона. Остальные, возможно, удовольствуются пробами, т. е. возвысят произвольные двузначные числа, оканчивающиеся на 1, 3, 7, 9, в двадцатую степень.

Пример: $37^2 = 1\,369 = \ldots 69$; $69^2 = \ldots 61$; $61^2 = \ldots 21$; $21^2 = \ldots 41$; таким образом, 16-ая степень 37 оканчивается на 41.—$37^{20} = 37^{16} \cdot 37^4 = (\cdots 41) \cdot (\cdots 61) = (\cdots 01)$, то есть двадцатая степень 37 действительно оканчивается на 01.

Губбес следующим образом пользуется этим результатом в применении к вычислению: так, например, предстоит извлечь корень 7-ой степени из числа, оканчивающегося на 23.

Тогда он возвышает 23 в третью степень, получает... 67 и знает, что 21-ая степень искомого числа, а вместе с тем и само искомое число оканчивается на 67.

К той же самой задаче применим еще четвертый метод. Дело будет происходить, примерно, следующим образом.

П.: Корень 7-ой степени из двенадцатизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 271 818 611 107.

В.: Я часто возвышаю сначала заданное число в некоторую высшую степень и тогда уже извлекаю соответствующий корень более высокой степени. Так, в этом случае я возвышу предложенное число в 3-ью степень и затем извлеку корень 21-ой степени.

После паузы, несколько более продолжительной, чем раньше, следует указание результата, причем выполнение указанных операций сопровождается вращением глаз и другими ужимками. Натуральны при этом большое удивление у одной части публики и недоверчивые улыбки у другой, которая уже настроена несколько критически и не склонна верить, что можно быстрее подсчитать число овец в стаде, пересчитав число ног и разделив их на 4.

И всетаки, в этом смелом утверждении вычислителя содержится крупица истины. А именно, он возвышает в 3-ью степень не заданное число, а только остаток от деления его на одиннадцать; затем он получает остаток от деления на одиннадцать 21-ой степени числа, который совпадает, как мы это сейчас покажем, с остатком от деления на 11 основного числа. Вычисление совершается в следующем порядке:

Искомое число оканчивается на 3, остаток от деления на 11 подкоренного числа, т. е. седьмой степени искомого числа, есть 10; 10^3 при делении на 11 дает в остатке 10 и, следовательно, искомое число есть 43.

Если составим таблицу остатков от деления на 11, продолжая таблицу стр. 5, то получим

	Остатки от деления на одиннадцать										
1 степень .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 „ .	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
3 „ .	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10
4 „ .	0	1	5	4	3	9	9	3	4	5	1
5 „ .	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10
6 „ .	0	1	9	3	4	5	5	4	3	9	1
7 „ .	0	1	7	9	5	3	8	6	2	4	10
8 „ .	0	1	3	5	9	4	4	9	5	3	1
9 „ .	0	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10
10 „ .	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11 „ .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Здесь можно прежде всего убедиться в справедливости следующего правила:

Остаток от деления на 11 одиннадцатой степени числа равен остатку от деления на 11 самого числа.

Это предложение, как видим, не допускает исключений, и тому, кто хорошо знаком с низшей теорией чисел, известно и более глубокое основание этого свойства: это есть так называемая малая теорема Ферма, примененная к простому числу 11[1]).

Далее, также можно убедиться в том, что остаток от деления на 11 двенадцатой степени числа должен совпадать с таковым же для второй степени, остаток 13-ой — с остатком 3-ей,..., вместе с тем и остаток 21-ой — с остатком 11-ой, и, следовательно, также и с остатком от деления на 11 первой степени. Но этим и доказывается наше утверждение, а потому и правильность примененного выше метода.

Теперь читатель также поймет, почему можно не прибегать к таблице на стр. 5. Возвышают в 7-ую степень остаток от деления на 11 заданной третьей степени и таким образом получают остаток от деления на 11 двадцать первой степени и, вместе с этим, искомого числа. После некоторого упражнения эти операции выполняются быстро.

7-ая задача

П.: Корень 7-ой степени из 18-тизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 321 673 167 473 963 573.

В.: 317.

Я желаю указать прежде всего прием, который едвали применяется именно профессиональными вычислителями, но является

---

1) Относительно малой теоремы Ферма читатель найдет особую главу в прибавлении.

бесспорным с математической точки зрения и наиболее интересным.

Искомое число содержит 7 единиц. Остаток от деления подкоренного числа на 9 равен двум, а потому такой же остаток при делении на 9 дает и искомое число, которое, как легко убедиться, должно быть трехзначным. Остаток от деления подкоренного числа на 11 равен 4; таким образом, таков же остаток от деления на 11 третьей степени, а потому остаток от деления на 11 двадцать первой степени искомого числа равен остатку от деления на 11 числа 4^3, т. е. равен 9. Отсюда следует, согласно сделанному нами выводу на стр. 14, что искомое число при делении на 11 дает в остатке 9. Следовательно, ищется такое число, которое при делении на 9 дает в остатке 2, а при делении на одиннадцать 9. Наименьшее число, обладающее этим свойством, есть 20; затем следуют $20+99$, $20+2.99$ и т. д. Так как, кроме того, число должно оканчиваться на 7, то слагаемое, кратное 99, должно оканчиваться семёркой; этим же свойством обладает трехкратное (относительно 99) число 297; следовательно, искомое число есть $20+297=317$.

Я желал бы, пользуясь случаем, обратить внимание составителей сборников упражнений на то, что они, быть может, в главе о задачах Диофанта могли бы заменить некоторые из вызывающих затруднения задач примерами, подобными рассмотренным выше. Я уверен, что интерес учащихся к задачам Диофанта благодаря этому значительно возрос бы.

Вычислитель избирает один из трех путей, которые нам предстоит описать:

a) Искомое число имеет 7 единиц. 7^7 оканчивается на 43 (7, 49, 43, 01, 7, 49, 43); $7-4=3$. Эти 3 десятка заключаются в числе $7 . 7^6 . x$, т. е. в $43x$, из коих только $3x$ входят в рассмотрение. Произведение $3x$ должно оканчиваться на 3, а потому $x=1$. Следовательно, число состоит из 7 единиц, 1 десятка и дает при делении на 9 в остатке 2, а потому оно должно иметь 3 сотни.—В случае, если число делится на 9, то оперируют с остатком от деления на 11.

b) Возвышают 73 в третью степень и получают $73^3 = \ldots 17$. Таким образом, число оканчивается 17-ью и, так как его остаток от деления на 9 должен быть равен 2, то оно имеет 3 сотни.

c) Искомое число содержит 7 единиц. Восемнадцатизначное подкоренное число на первом месте слева имеет цифру 3; следовательно, логарифм подкоренного числа больше, чем $17 \cdot 477\ldots$, так как $\log 3 = 0 \cdot 477\ldots$. Логарифм искомого числа больше $2 \cdot 496\ldots$, а потому лежит между $2 \cdot 477$ и $2 \cdot 602$, откуда следует, что искомое число заключается между 300 и 400. Искомое число, следовательно, начинается цифрой 3, кончается на 7, при делении на 9 дает в остатке 2 и поэтому равно 317.

Этим приемом c) вычислитель пользуется, по моему убеждению, чаще всего. Хотя некоторые из них торжественно отрицают, что они заучивают наизусть логарифмы, тем не менее нужно признать достоверным, что им приходится сохранять в памяти логарифмы всех двузначных чисел, по крайней мере, до трех десятичных знаков. Впрочем, при сноровке, которой обладают эти „мастера счета и памяти“ в деле мнемотехнического запечатлевания, это не является чем-то необыкновенным. В нашей задаче, и даже в большинстве задач, встречающихся в практике вычислителя, достаточно, впрочем, знать наизусть логарифмы чисел от 1 до 10, а это — нечто такое, что доступно обыкновенному смертному без какого бы то ни было мнемонического искусства. Я принимаю, таким образом, это требование и считаю его выполненным в некоторой части следующих задач, и если кто-либо из моих читателей его не выполнит, или не пожелает выполнить, я вынужден буду просить его при вычислениях в этих задачах иметь наготове таблицы логарифмов,

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Корень 5 степени из чисел, содержащих от 6 до 20 знаков

8-ая задача

П.: Корень 5-ой степени из 7-мизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 6...

В.: Диктуйте теперь в любом порядке!

П.: 6 644 333 (Число равно 6 436 343).

В.: Число 23.

Способ, по которому задается последняя цифра справа и остальные в любом порядке, описан в задаче 6, и, естественно, мог бы быть применен и здесь.

Так как первая цифра равна 6, то подкоренное число лежит между $32 \cdot 10^5$ и $243 \cdot 10^5$, а потому искомое число заключается между 20 и 30; следовательно, оно начинается цифрой 2. Остаток от деления подкоренного числа на 9 равен 2, остаток от деления на 9 искомого числа, как это теперь нужно доказать, равен остатку от деления на то же число 2^5, то есть равен 5. Таким образом, искомое число есть 23.

Составленная нами на стр. 11 таблица показала нам, что, не считая двух исключений, остатки от деления на 9 седьмой степени и основания соответственно равны. Следовательно, остаток от деления на 9 восьмой степени совпадает с таковым же для второй степени, остаток от деления на 9 девятой степени с остатком третьей степени и т. д.; таким образом, остаток от деления на 9 тринадцатой степени совпадает с остатком от деления на 9 седьмой степени, а следовательно, и с остатком первой степени. Далее, остаток от деления на 9 первой степени совпадает с остатками от деления на девять 19-ой, 25-ой, 31-ой степеней и, вообще, степеней с показателями вида $6n+1$.

Если мы, однако, возвысим остаток от деления на 9 подкоренного числа, представляющего 5-ую степень искомого числа, в пятую степень, то мы получим 25-ую степень остатка от деления на 9 искомого числа, но таковой, как мы показали выше, совпадает с остатком от деления на 9 основания. Этим самым доказывается справедливость нашего приема.

Приведем еще объяснение другого способа решения этой задачи:

П.: Корень 5-ой степени из семизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 64...

В.: Довольно! Число 23.

Я уже сказал выше, что по моему убеждению вычислители запечатлевают в уме логарифмы всех двузначных чисел по крайней мере до трех десятичных знаков. Так как мы не желаем им в этом подражать, то возьмем в руки таблицы логарифмов и откроем первую страницу, на которой обыкновенно находятся логарифмы чисел от 1 до 100. Мы определяем $\log 64 = 1{\cdot}806$, следовательно, $\log 6\,400\,000 = 6{\cdot}806$. Логарифм подкоренного числа, таким образом, немного больше, чем $6{\cdot}806$, а посему логарифм искомого числа немного больше $1{\cdot}361$. — $1{\cdot}362$ есть логарифм 23; таким образом, 23 есть искомое число.

Этот прием мы еще часто будем употреблять. Теперь мы применим при решении той же задачи еще и третий прием, с целью иметь достаточное вспомогательное средство для случая, когда подкоренное число содержит от 11 до 20 знаков.

П.: Корень 5-ой степени из 7-мизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста, справа налево!

П.: ...343.

В.: Остановитесь! — Число 23.

Искомое число имеет 3 единицы. $3^5 = 243$; таким образом, остается еще 1 сотня, или 10 десятков. Последние составляются из произведения $5 . 3^4 . x$, и так как 3^4 оканчивается на 1, то из $5x$; $5x = 10$; $x = 2$. Число равно 23.

Пятая степень, в противоположность третьей и седьмой степеням, имеет тот недостаток, что по ее цифре десятков еще нельзя определить десятков основания, но для этого нужно знать еще и число сотен.

9-ая задача

П.: Корень 5 степени из двенадцатизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста!

П.: 551 473 077 343.

В.: 223.

Подкоренное число лежит между $32 . 10^{10}$ и $243 . 10^{10}$; поэтому искомый корень заключается между 200 и 300. Он начинается, таким образом, цифрой 2. Оканчивается он, как это тотчас же видно, на 3. Подкоренное число при делении на 9 дает в остатке 4. Остаток от деления на девять 4^5 равен 7, таким образом, число есть 223.

Другой прием:

П.: Корень пятой степени из двенадцатизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 55...

В.: Остановитесь! Остальные цифры в любом порядке!

П.: 554 433 310 777.

В.: 223.

$$\log 55 \cdot 10^{10} = 11 \cdot 740, \ \frac{1}{5} \log 55 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 348.$$

Искомое число лежит поэтому между 220 и 230, имеет, следовательно, 2 сотни и 2 десятка. Так как подкоренное число при делении на 9 дает в остатке 4, то искомое число при делении на 9 дает в остатке 7, а потому равно 223.

Третий прием:

П.: Корень 5 степени из двенадцатизначного числа.

В.: Пожалуйста, диктуйте справа налево!

П.: ...343.

В.: Остальные цыфры в любом порядке!

По последним трем цифрам мы определяем, точь в точь, как в 8-ой задаче на стр. 21, две последние цифры искомого числа, т. е. 23. Затем, как и раньше, мы вычисляем остаток от деления на 9 искомого числа; таковой равен 7, и число есть 223.

10-ая задача

П.: Корень 5-ой степени из двадцатизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 11 576 155 017 345 132 257.

В.: 6 497.

Искомое число содержит 7 единиц. 7^5 оканчивается на 807; ...257 − 807 = ...450;

7^4 оканчивается на 01; 5.7^4 оканчивается на 05; $5.7^4.x$ должно оканчиваться на 45; таким образом, $x = 9$.

11 576 лежит между 6^5 и 7^5; искомое число поэтому содержит 6 тысяч. — Остаток от деления на 9 подкоренного числа равен 8; таким образом, остаток от деления искомого числа на 9 таков же, как и для 8^5, т. е. равен 8, и число есть 6 497.

В случае, если данное число единиц четное, так что десятки не определимы однозначно, вычислитель снова должен воспользоваться логарифмами.

Подкоренное число начинается 11-ю. Логарифм подкоренного числа поэтому больше, чем 19·041, логарифм искомого числа вследствие этого больше, чем 3·808, и соответствующее число лежит между 6 400 и 6 500. Число, таким образом, имеет 6 тысяч, 4 сотни, 7 единиц, и его остаток от деления на девять равен восьми,—следовательно, оно равно 6 497.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Другие корни

11-ая задача

П.: Корень 11 степени из пятнадцатизначного числа.

В.: Пожалуйста, цифры в любой последовательности!

П.: 012 235 577 789 999 [952 809 757 913 927].

В.: Число 23.

По числу знаков подкоренного числа можно заключить, что логарифм его лежит между 14·00 и 14·99, а потому одиннадцатая часть этого логарифма заключается между 1·272 и 1·363. Отсюда следует, что искомое число лежит вблизи 20, и именно для тех, кто знает логарифмы чисел только от 1 до 10, остается пока невыясненным, больше ли оно или меньше 20. Подкоренное число при делении на 9 дает в остатке 2; возвышая последний в 5-ую степень, получаем в остатке от деления на 9 пять; это есть остаток от деления 55-ой степени; следовательно, так как 55 есть число вида $6n+1$, это представляет остаток от деления на 9 самого искомого числа. Таким образом, число равно либо 14, либо 23. Число 14, однако, слишком мало, ибо, складывая log 3 и log 5, получим $\log 15 = 1{\cdot}176$, а так как $1{\cdot}272 > 1{\cdot}176$, то искомое число больше 15; следовательно, только 23 может быть искомым решением.

12-ая задача

П.: Корень 31 степени из тридцатипятизначного числа.

В.: Число равно 13.

Ответ вызывает большое удивление, особенно у тех, кто приложил необычайные усилия для того, чтобы возвысить число 13 в 31 степень, и теперь видит, что вычислитель не дал назвать ни одной цифры с таким трудом вычисленного результата.

И однако, стоит знать наизусть только логарифмы чисел от 1 до 10 с точностью до

2-го десятичного знака, чтобы немедленно найти требуемое решение.

Логарифм заданного числа лежит между 34·00 и 34·99, а потому 31-ая часть его заключается между 1·09 и 1·13. Но $\log 12 = \log 2 + \log 6 = 1{\cdot}07$, а $\log 14 = \log 2 + \log 7 = 1{\cdot}15$. Искомое число лежит, таким образом, между 12 и 14, т. е. оно равно 13. Тот, кто знает логарифмы двузначных чисел, естественно, прийдет к цели еще быстрее.

Ясно, что многие приемы, которыми мы пользовались в предыдущих задачах, привели бы к цели также и здесь, и чтобы дать читателю материал для упражнения, я представлю тридцатипятизначное число в правильной последовательности его цифр:

34 059 943 367 449 284 484 947 168 626 829 637.

Так можно узнать без логарифмов, что искомое число лежит между 10 и 20 и, следовательно, имеет 1 десяток. Единицы теперь можно определить либо по единицам, либо по остаткам от деления на 9 или 11 подкоренного числа, можно также только по одним остаткам от деления на 9 и 11 определить искомое число, подобно тому, как это делалось на стр. 17.

Согласно установленному нами раньше, остаток от деления 31-ой степени числа на 9 совпадает с остатком от деления на 9 основания; точно так же совпадают и остатки от деления на 11 тридцать первой степени и основания, а потому здесь нет необходимости лишний раз пересчитывать. „Я извлекаю корни 31-ой степени с особенной любовью“, так высказался предо мной однажды один вычислитель в частной беседе. Это утверждение не может более казаться парадоксальным для тех, кто знаком с этими приятными свойствами 31-ой степени. Извлечение корней 13, 17, 19, 23 и 29 степеней не сопряжено ни с какими новыми трудностями и не ведет также ни к каким новым методам.

ГЛАВА ПЯТАЯ

Особенные трудности для вычислителей

Мы занимались до сих пор только такими задачами, в которых показатель корня был простым числом. Такие задачи предпочитаются теми, кто их задает, так как считаются наиболее трудными. Это было бы верно, еслибы вычислитель всегда извлекал корни по определенному правилу.

Так, например, редко предлагают извлечь корень 4-ой степени, так как предлагающий задачу думает, что вычислителю особенно легко сначала извлечь в уме квадратный корень, а затем снова извлечь квадратный корень. А между тем, корень 4-ой степени вызывает еще бóльшие затруднения, чем те, которые встречаются в задачах, рассмотренных до сих пор. Прежде всего, единицы корня не определяются из единиц подкоренного числа, ибо 1^4, 3^4, 7^4, 9^4 оканчиваются на 1, а 2^4, 4^4, 6^4, 8^4 оканчиваются на 6.

Остатки от деления на 9 и 11 также не дают возможности однозначного определения, как это видно при одном взгляде на обе таблицы, представленные на стр. 11 и 4. Верные результаты достигаются только с помощью логарифмов, и отсюда видно, насколько вычислитель должен быть во всеоружии этого метода. Зная логарифмы чисел от 1 до 100, он в состоянии определить только 2 первые цифры слева; и если теперь оказывается, что искомое число трехзначное, то число единиц остается еще не определенным. Искусное интерполирование, допущение какого-либо значения и испытание его с помощью остатков от деления на 9 и 11, или еще лучше — с помощью того и другого, в большинстве случаев приведут его к правильному результату. Поясним это примером.

13-ая задача

П.: Корень 4-ой степени из девятизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста!

П.: 163 047 361.

В.: 113.

$\log 16 \,.\, 10^7 = 8{\cdot}204;\ \frac{1}{4} \log 16 \,.\, 10^7 = 2{\cdot}051.$

Таким образом, искомое число лежит между 110 и 120. $\log 120 = 2{\cdot}079$, $\log 110 = 2{\cdot}041$. Разность $2{\cdot}051 - 2{\cdot}041$ составляет приблизительно $\frac{1}{3}$ разности $2{\cdot}079 - 2{\cdot}041$. Таким образом, и разность между искомым числом и 110 составляет около $\frac{1}{3}$ от 10. Поэтому число равно, предположительно, 113, что подтверждается поверкой с помощью 9 и 11.

Или еще так: Искомое число лежит между 110 и 120 и, наверное, не больше 115. Само число 115 не может быть искомым, ибо его 4-ая степень должна была бы оканчиваться 5-ью; также и 111 не может им быть, так как тогда остаток от деления подкоренного числа на 9 должен был бы быть равен нулю; согласно с этим, число должно быть 113.

Губбес решает эту задачу (Тетр. II, стр. 16) следующим образом:

Искомое число имеет 1 сотню. Полученное из двух последних цифр число 61 он возвышает в 8-ую степень и получает таким образом обе последние цифры 32-ой степени искомого числа, т. е. 81. Это число он отнимает от 150 и получает 69. Согласно одной из доказанных им теорем, это есть число, составленное из двух последних цифр квадрата искомого числа. Самое же искомое число, по Губбесу, оканчивается в таком случае на 13. Но, как легко видеть, оно может быть также равно 63, так что приходится снова пользоваться поверкой с помощью 9 и 11. Если последняя цифра четная, то могут представиться даже 4 возможных случая, между тем как при употреблении логарифмов оказывается безразличным, оканчивается ли число четной или нечетной цифрой.

Если подкоренное число является 4-ой степенью четырехзначного числа, то внимание вычислителя прежде всего должно быть сосредоточено на возможно искусном интерполировании, чтобы с какой-нибудь степенью уверенности определить 3-ю цифру слева. И это можно пояснить примером.

14-ая задача

П.: Корень 4-ой степени из четырнадцатизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 29 321 456 075 041.

В.: 2 327.

Так как подкоренное число больше 29.10^{12}, то логарифм данного числа больше 13·462, а для искомого числа он больше, чем 3·365. Но $\log 2\,300 = 3{\cdot}362$; $\log 2\,700 = 3{\cdot}380$. Разность между этими обоими логарифмами содержит 18 единиц низшего разряда, разность между 3·362 и логарифмом искомого числа приблизительно 4. Отсюда можно с большой вероятностью заключить, что число будет содержаться между 2 320 и 2 330, т. е. третья цифра вероятнее всего равна 2.

Остаток от деления подкоренного числа на 9 равен 4. Таким образом, искомое число при делении на 9 дает в остатке или 4, или 5. Число 4 не может подойти, так как тогда последняя цифра была бы равна 6, следовательно, была бы числом четным; согласно с этим, остаток должен быть равен 5, т. е. число равно 2 327. Но чтобы быть вполне уверенным в этом, можно сделать еще поверку с помощью 11.

Губбес рассматривает также и эту задачу (Тетрадь II, стр. 17), именно следующим образом [1]).

$\sqrt{293\,214} = 541, \ldots$

$\sqrt{541} = 23$, остаток 12.

$12 < 23$, следовательно [две последние цифры искомого числа], меньше 50.

$41^8 = \ldots 21.$

Дополнение до 50-ти от $21 = 29$, стало быть, 23 или 27 (забыты 73 и 77).

Двойной остаток: $12 . 2 = 24 > 23$, следовательно, берем наибольшее дополнение: 27.

Так как, насколько мне известно, артисты-вычислители не выходят за пределы чисел, корень n-ой степени из которых есть четырехзначное число, то мы видим, что первый из примененных нами методов вполне достаточен для извлечения корня 4-ой степени. В случае корня 6-ой степени так же, как и для квадратного корня, имеются вообще два решения при определении цифры единиц, что является, таким образом, более благоприятным, чем при только что рассмотренном извлечении корня 4-ой степени. Следуя Губбесу, возвышают две последние цифры подкоренного числа в 7-ую степень и получают таким образом две последние цифры 42-ой степени, совпадающие с последними цифрами квадрата искомого числа [2]). Однако, здесь остаток от деления на 9 ни к чему не ведет; ибо, взглянув на нашу таблицу, мы увидим, что остатки

[1]) Я сохраняю его способ выражения.

[2]) Разумеется, лишь с вероятностью в 50%.

от деления на 9 шестых степеней всех не делящихся на 3 чисел равны 1. Поэтому приходится комбинировать путем искусной интерполяции два возможных значения последней цифры с двумя возможными значениями остатка от деления на 11. Я думаю, что приводить в этом случае пример излишне.

Подобно тому, как здесь неприменим остаток от деления на 9, так при извлечении корня 10-й степени оказывается непригодным остаток от деления на 11. Для корня 30-й степени не годятся даже оба эти остатка; однако, вычислителю нечего опасаться, что ему кто-нибудь предложит 30-ую степень четырехзначного числа. Против возможности такого случая говорит известный закон природы.

Мы видим, таким образом, что вычислитель не легко попадает впросак, по крайней мере, до тех пор, пока он заставляет диктовать подкоренное число полностью.

В первом издании этой книги я говорил о затруднениях, возникающих при извлечении корней из чисел, кончающихся цифрой 5. Я думал тогда, что нет простого пути для того, чтобы заключить что-нибудь о второй цифре искомого числа по последним цифрам справа заданного числа. Изучение книжки Губбеса помогло мне преодолеть и эти затруднения, и я по этому поводу отсылаю читателей к главе в прибавлении „Бином Ньютона“.

Тот, кто обладает некоторым ехидством и вследствие этого хочет затруднить работу вычислителя, ждет от меня, чтобы я составил для него подходящие для этой цели задачи.

Этого я, однако, не стану делать. Ехидства не нужно к тому же и поддерживать, и тот, кто хочет ставить такие задачи, пусть строит их по собственным соображениям. Где есть желание, там есть и путь.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Особенные свойства степеней

Во многих докладах о достижениях артистов-вычислителей отмечается, как особенно поразительное, то обстоятельство, что эти люди нередко после короткого размышления признают предложенную им задачу неправильной и что, действительно, ставящий задачу при вторичной проверке должен признаться, что он обсчитался. Репортёры непосредственно из этого заключают об особенно глубоком проникновении артистов-вычислителей в природу чисел и о безошибочной точности в извлечении корней. Но это заключение несколько поспешно, как мы сейчас покажем.

15-ая задача

П.: Корень 3 степени из семизначного числа.

В.: Пожалуйста, диктуйте справа налево!

П.: . . . 174.

В.: Остановитесь, этого достаточно. — К сожалению, вы сделали ошибку в вычислении; пожалуйста, исправьте ее теперь.

Ставящий задачу считает еще раз и находит, что на самом деле вместо 8 на втором месте написана цифра 7. — Но действительно ли это есть удивительное достижение и нужно ли отсюда заключить о безошибочной точности в вычислении или даже о сверхестественной математической одаренности? Рассмотрим этот случай ближе. Искомое число оканчивается на 4 и равно, таким образом, $10x+4$; $4^3=64$; следовательно, не хватает еще 1 десятка. Последний может быть получен только из произведения $3.4^2.x$. Но произведение $3.4^2.x$ во всяком случае число четное и не может, следовательно, никогда оканчиваться на 1; отсюда следует, что либо цифра единиц подкоренного числа вычислена неверно, либо цифра десятков, либо обе они неверны.

16-ая задача

П.: Корень 3 степени из десятизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста!

П.: 3 532 64*1* 667 (вместо *2*, см. задачу 5-ую).

В.: Ваш пример содержит ошибку. Если вы точно пересчитаете, вы безошибочно установите, что вы обсчитались.

Здесь из двух последних цифр ничего нельзя усмотреть, так как находящееся в наличности число единиц нечетное. Как я заметил выше, ошибка в 4-ом знаке. На этот раз ее можно обнаружить путем поверки девяткой. Остаток от деления подкоренного числа на 9 как раз равен 7, а никакая третья степень целого числа не может при делении на 9 давать в остатке 7. Третьи степени, как это показывает таблица на стр. 10, имеют остатками при делении на 9 только числа 0, 1 и 8. Здесь также нет ровно ничего удивительного, ибо 6-ые степени, как я это уже отметил на стр. 30, дают при делении на 9 в остатке только числа 0 и 1, что, впрочем, есть особый случай распространения малой теоремы Ферма. Следовательно, третьи степени, так как 6-ые получаются из них возвышением в квадрат, должны давать при делении на 9 в остатке 0, 1 и —1, или, что то же, 0, 1 и 8. Это также есть причина того, что при извлечении кубических корней нельзя пользоваться поверкой с помощью девятки, так как каждому остатку от деления на 9 подкоренного числа соответствуют 3 различных остатка от деления искомого числа на 9.

17-ая задача

П.: Корень 5-ой степени из двенадцатизначного числа.

В.: Прошу диктовать!

П.: 551 474 077 343 (вместо 3).

В.: Этого не может быть...

Здесь ошибка открывается поверкой с помощью 11. Остаток от деления на 11 равен 2; но никакая 5 степень не может при делении на 11 дать в остатке 2; здесь могут быть только остатки 0, 1 и 10. Так как 10-ая степень, как квадрат 5-ой, при делении на 11 дает в остатке только 0 и 1 (согласно нашей таблице, или также согласно малой теореме Ферма), то 5-ая степень при делении на то же число дает в остатке 0, 1 и —1.

18-ая задача

П.: Корень 5-ой степени из двенадцатизначного числа.

В.: Пожалуйста, диктуйте справа налево!

П.: ... 373.

В.: Стойте! -- Вы сделали ошибку...

Число равно $10x+3$; $3^5=243$ и имеет 4 десятка; остальные 3 десятка должны получиться из произведения $5 \cdot 3^4 \cdot x$. Так как это произведение может оканчиваться только на 0 или на 5, то вторая цифра может быть только 4, либо 9, но никак не 7.

19-ая задача

П.: Корень 7-ой степени из тринадцатизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста, справа налево!

П.: ...594.

В.: Остановитесь, этого достаточно. — Вы обсчитались.

Искомое число должно было бы оканчиваться четверкой. 4^7 оканчивается на 84 (04, 16, 64, 56, 24, 96, 84). Недостающий десяток должен получиться из произведения $7 \cdot 4^6 \cdot x$, что очевидно невозможно.

20-ая задача

П.: Корень 7-ой степени из двенадцатизначного числа.

В.: Диктуйте, пожалуйста!

П.: 271 818 621 107 (вместо 1).

В.: Это невозможно.

Действительно, по двум последним цифрам получается решение 43, между тем как последняя цифра и остаток от деления на 9 дают 53; следовательно, должна быть ошибка в задании.

21-ая задача

П.: Корень 17-ой степени из двадцатитрехзначного числа.

В.: Будьте добры диктовать справа налево!

П.: 75.

В.: Остановитесь! — Это не может быть верно.

Логарифм 23-значного числа лежит между 22·0 и 22·9. Логарифм искомого числа поэтому заключается между 1·29 и 1·35. Число, таким образом, наверно больше 15 и меньше 25. Так как корень должен оканчиваться цифрой 5, а между 15 и 25 не содержится ни одного числа, оканчивающегося на 5, то отсюда следует безусловно, что подкоренное число высчитано неправильно.

Число примеров легко можно было бы увеличить.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Обзор изложенного

Мы видели, что артист-вычислитель располагает следующими вспомогательными средствами:

1. Степень с показателем вида $4n+1$ оканчивается той же цифрой, что и основание; степень с показателем вида $4n+3$ — той же цифрой, что и третья степень.

2. Десятки числа могут быть определены с помощью бинома Ньютона, а также использованием свойств 21-ой, 41-ой, 61-ой, ... степеней, из цифры десятков, либо сотен подкоренного числа.

3. Остаток от деления на 9 степеней с показателем вида $6n+1$ равен остатку от деления на 9 основания (исключение: остаток равен 0).

4. Остаток от деления на 11 степеней с показателем вида $10n+1$ равен остатку от деления на то же число основания.

5. Если известны логарифмы чисел от 1 до 100 по крайней мере до трех десятичных знаков, то оказывается возможным указать две первые цифры искомого числа, и при надлежащем интерполировании с некоторой вероятностью определяется также и третья цифра.

В зависимости от числа цифр, показателя корня и цифры единиц выступает на первый план то или иное из этих 5 вспомогательных средств. Как показали наши примеры, при той же задаче к цели часто ведут многие методы.

Если теперь кто-нибудь из публики провозглашает: Корень степени α из числа, содержащего β цифр, то артист-вычислитель с быстротой молнии соображает, какое из вспомогательных средств в данном случае является наиболее целесообразным, и если применимы многие методы, то он выбирает такой, который каждый раз выставляет его искусство с новой стороны.

Несомненно, что для этого нужны большое проворство и присутствие духа, и я отнюдь не преследую цели умалить достижения мастеров-вычислителей; я желал бы только сделать так, чтобы они не были переоценены. Многие, видевшие вычислителя или читавшие о нем отчеты в газетах, склонны считать его высшим существом, которому позволено видеть в учении о числах то, что нам, остальным смертным, остается недоступным. Не мало таких, которые придерживаются мнения, что за этим кроется плутовство. Читатель узнал из моего изложения, что это не так. Каждый проворный счетчик с достаточно хорошей памятью на числа может показывать такие фокусы.

Но все ли это вспомогательные средства, которыми пользуется артист-вычислитель?

Разумеется, этого я не знаю, и потому я предусмотрительно написал в заглавии своей книжки „Некоторые тайны", а не просто „Тайны".

Если тому или иному из моих читателей представиться случай присутствовать при выступлении артиста-вычислителя — и я настойчиво советовал бы не упускать такого случая, — и если при этом будут иметь место извлечения корней, которые нельзя будет разъяснить приведенными здесь методами, я был бы очень благодарен читателю, если бы он мне сообщил об этом. Быть может, мне удалось бы тогда открыть дальнейшие тайны, в случае, если таковые еще существуют [1]).

---

[1]) Prof. Quinton доложил в 1913 г. ученым Сорбонны о методах быстрого извлечения корней в уме (Ср. Dr. G. Rückle „Wurzelausziehen mit Schnelligkeit

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Вычисление времени празднования Пасхи

Артист-вычислитель умеет сохранить напряженное внимание своих слушателей. Едва только публика оправилась от изумления, вызванного извлечением корней из огромных чисел, как снова ее восхищение пробуждается другим, не менее загадочным фокусом.

Кто-либо называет какой-нибудь год, и спустя короткое время вычислитель дает соответствующую пасхальную дату. Таким образом, в то время как раньше он торжествовал над неповоротливыми математиками, теперь он бросает тень на столь же неповоротливых астрономов. И между тем, этот фокус так прост, что его легко может проделать всякий, упражнявшийся в вычислении в уме.

---

und Eleganz", Nr. 454 der Köln. Ztg. 1913 — „Способ быстрого и изящного вычисления корней"). Он пользуется последней цифрой, логарифмами и затем еще одним способом, который применяют также Ferrol и Hubbes, но который применим только в узко ограниченной области. Например, извлекается корень 3 степени из числа 912 673; тогда он впереди числа приписывает 2, отбрасывает 4 последние цифры, делит оставшееся еще число 291 на 3 и получает 97; это и есть искомый кубический корень. В случае n-ой степени к числу приписывают в начале $n-1$ и делят на n. Если искомое число 3-значное, то рассматриваются три первые цифры подкоренного числа; так, $\sqrt{970\,225} = \frac{1970}{2} = 975$. Если искомое число четырехзначное, то берут первые 4 цифры: $\sqrt{99\,301\,225} = \frac{19\,930}{2} = 9\,956$. Объяснение последует в главе о биноме Ньютона.

Прежде всего дадим некоторые разъяснения, относящиеся к фактической стороне дела. Пасха падает на первое воскресенье после весеннего полнолуния. Весенним полнолунием называется первое полнолуние после начала весны; оно может, следовательно, наступить не раньше 21 марта. Наша задача состоит из двух частей. Во-первых, нужно определить, на какое число приходится весеннее полнолуние и, во-вторых, какой день недели соответствует определенному таким образом числу, или, выражаясь иначе, сколько дней нужно отсчитать от дня весеннего полнолуния до ближайшего воскресенья. Мы займемся сначала первой задачей. Промежуток времени между одним полнолунием и следующим, так называемый синодический месяц, заключает, приблизительно, $29^1/_2$ дней. 12 синодических месяцев составляют поэтому 354 дня, т. е. на 11 дней меньше, нежели обыкновенный год. Таким образом, если новолуние падает на начало года, то начало следующего года придется спустя 11 дней после последнего новолуния, или, как говорят, возраст луны будет равен 11 дням. Этот „возраст“ луны в начале года называется эпактой, и легко видеть, что эта эпакта ежегодно нарастает на 11 дней. Можно, разумеется, возразить, что в високосном году эпакта должна была бы возрасти на 12 дней; однако, если и здесь причислить только 11 дней, то этим отчасти компенсируется ошибка, происходящая от того, что синодический месяц не вполне точно равен $29^1/_2$ дням.

19 лет являются, приблизительно, целым кратным синодического месяца; поэтому каждые 19 лет эпакта будет одна и та же, или, выражаясь иначе, эпакты совпадают для всех годов, дающих при делении на 19 один и тот же остаток. Если последний известен для определенного года, то можно его вычислить для произвольно заданного года.

Теперь запомним, что легко сделать один факт, а именно: 1900 год имеет эпакту — 1, т. е. к началу 1900 года не хватало до наступления новолуния еще одного дня. Следовательно, 1901 год имеет эпакту 10, 1902 эпакту 21, 1903 эпакту 32. Но число 32 слишком велико, так как оно превосходит продолжительность синодического месяца. Поэтому берут излишек сверх 30; сообразно с этим, в нашем случае эпакта равна 2.

В 1913 году луна старше на $13 \cdot 11 = 143$ дня, чем к началу 1900 г. $143 = 4 \cdot 30 + 23$. Эпакта 1913 года на 23 больше, чем таковая же 1900 года; она равна поэтому $23 - 1 = 22$.

Если теперь e—эпакта для определенного года, то к началу Марта возраст луны также равен e дням, ибо Январь и Февраль простого года составляют вместе 59 дней, т. е. удвоенный синодический месяц. Ближайшее полнолуние не может, однако, быть весенним полнолунием, если только $e < 15$; ибо, если отнять e от 15, то остаток будет < 15, следовательно, наверно < 21, так что полнолуние наступит раньше 21 Марта. В этом случае придется считать до ближайшего следующего полнолуния. Следовательно, e надо будет отсчитать от $15+29$, или, собственно, от $14\frac{3}{4}+29\frac{1}{2}$, т. е. круглым счетом от 44, чтобы получить число дней до весеннего полнолуния.

Если $e \geqslant 15$, то и в этом случае нужно e отнять от $15+29=44$, так что при всех обстоятельствах оказывается выполнимым правило: Если e есть эпакта, то весеннее полнолуние падает на $(44-e)$-ое Марта. Необходимо только пояснить, что, например, 35-ое Марта означает 4-ое Апреля.

Примеры:

1913 год имеет, как это было раньше вычислено, эпакту 22; таким образом, $(44-22)$-ое, то есть 22-ое Марта есть дата весеннего полнолуния.

1914 при делении на 19 дает в остатке 14; $14.11=154$; $154=5.30+4$; $4-1=3$; для 1914 года $e=3$; весеннее полнолуние падает на 10 Апреля.

1915; 15; 165; 15; 14; $e=14$; весеннее полнолуние 30-го Марта.

1916; 16; 176; $e=25$; $44-25=19$.

Но так как 19 Марта не может быть датой весеннего полнолуния, то нужно, согласно постановлению Никейского Собора, присчитать еще 30 дней. Если я теперь осмеливаюсь вместо 30 прибавлять только 29 дней, то это происходит только на том основании, что тогда для 20 столетия все пасхальные вычисления будут безусловно верными, между тем как в другом случае некоторые должны были бы быть еще исправлены добавочными определениями названного Собора. Для прошлых столетий все обстоит хорошо, если придерживаться старых определений. Однако, возвратимся к нашей задаче:

$19+29=48$; таким образом, весеннее полнолуние наступит 17-го (18-го) Апреля.

Теперь нужно еще решить 2-ую задачу: Сколько дней нужно считать далее от весеннего полнолуния, чтобы дойти до первого воскресенья?

Отметим себе: 1-ое Апреля 1900 г. было воскресенье. В каждом простом году следующее за Февралем число отодвигается на 1 день недели, в каждом високосном — на 2 недельных дня.

Сообразно с этим, 1-ое Апреля 1913 г. отодвинулось на $(13+3)$ недельных дня (из за 3-х високосных лет); нужно, таким образом, отсчитать обратно 16 дней, чтобы придти к воскресенью. От 22-го Марта, даты весеннего полнолуния 1913 года, до 1 Апреля 10 дней; отступая поэтому на 10 дней дальше, мы приходим к тому дню недели, на которое падает весеннее полнолуние. Поэтому находим, что весеннее полнолуние 1913 года падает на 6-ой день после воскресенья; не хватает, таким образом, еще 1 дня до воскресенья; следовательно, Пасха наступает 23-го Марта. — Вычисление, однако, протекает чрезвычайно быстро:

1913; ... Весеннее полнолуние: 22 Марта.
$13+3-10+\mathit{1}=7$; Пасха: $(22+1)$-го Марта.

1914; ... В. п.: 10 Апреля.
$14+3+9+\mathit{2}=4\cdot 7$; П.: $(10+2)$-го Апреля.

Так как в 1914 году весеннее полнолуние наступает через 9 дней после 1-го Апреля, то, чтобы придти к воскресенью от 10 Апреля, приходится отсчитать назад $(14+3+9)$ дней, т. е. 26 дней. Еслибы было на 2 дня больше, то 10 Апреля было бы в воскресенье; итак, не хватает еще 2-х дней, следовательно, Пасха приходится на 12 Апреля.

1915; . . . В. п.: 30 Марта.
$15+3-2+5=3\cdot 7$; П.: $(30+5)$-ое Марта $=$ $=4$ Апреля.

1916; . . . В. п.: 17 Апреля.
$16+4+16+6=6\cdot 7$; П.: $(17+6)$ Апреля.

Все вычисление пасхалий представляется, таким образом, в следующем виде:

1917; 17; 187; 7; 6: 38;	В. п.: 7 Апреля.
$17+4+6+1=28$;	П.: $(7+1)$-го Апреля.
1918; 18; 198; 18; 17; 27;	В. п.: 27 Марта
$18+4-5+4=21$;	П.: 31 Марта.
1919; 0; 0; -1; 45;	В. п.: 14 Апреля
$19+4+13+6=42$;	П.: 20 Апреля.
1920; 1; 11; 10; 34;	В. п.: 3 Апреля
$20+5+2+1=28$;	П.: 4 Апреля.

Этот прием доставляет мало-мальски искусному вычислителю в несколько секунд пасхальную дату.

Но действительно ли так поступает вычислитель?

Возможно, что буквально так, как это было здесь указано, это не происходит; но каждый раз его прием оказывается довольно схожим с приведенным здесь, конечно только в том случае когда он не выучил наизусть пасхальных таблиц [1]).

Доктор И. Бах, директор Епископской Гимназии в Страссбурге, поделился со мною в письме одним придуманным им приемом, который дает ему возможность в срок около 10 секунд определить любую пасхальную дату [2]). Он является практическим упрощением Гауссовой формулы для пасхалий. Эта знаменитая формула, которую некоторые мои читатели наверное знают, была однажды опубликована Гауссом без сообщения доказательства; доказательства последовали позже в большом числе. Бах приводит также интересное и простое доказательство Гауссовой формулы в Astronomische Nachrichten 1911 г. [3]). Но я не думаю, чтобы артисты-вычислители когда-либо пользовались видоизменением Гауссовой формулы пасхалий; ибо они могут по желанию указать также возраст луны для каждой произвольной даты, что легко выводится с помощью эпакты, в то время как Гауссова формула здесь неприменима.

Для 19 го столетия необходимы два небольших изменения. 1-ое Апреля 1800 года было не в воскресенье, а во вторник, вслед-

---

[1]) Прекрасную пасхальную таблицу можно найти в книге Шуберта (Schubert) „Math. Mussestunden“. Руский перевод „Математические развлечения и игры“ в издании „Mathesis“, Одесса 1911.

[2]) См. Литературный указатель.

[3]) Очень интересным является также его простое доказательство Гауссовой формулы для определения иудейской Пасхи. „Zeit und Festrechnung der Juden“; см. Литературный указатель.

ствие чего нужно будет во всяком случае отсчитывать 2 дня назад, чтобы придти к воскресенью; тогда, вследствие так называемых скачков эпакты, эти числа для всех годов от 1800 до 1900 будут на 1 больше, чем это дает вычисление таковых для нашего столетия, согласно данному руководству. Замечая при этом еще ту выгоду, что для годов от 1800 до 1900 остаток от деления на 19 легко может быть найден, если к номеру года прибавить 100 и из легко усматриваемого теперь остатка от деления на 19 отнять 5, мы увидим, что возможно и для прошлого столетия определить пасхальную дату с большой быстротой. Я и здесь приведу несколько примеров:

1883; 2; 22; 22;	В. п.: 22 Марта.
$2+83+20-10+3=98$;	П.: 25 Марта.
1884; 3; 3; 41;	В. п.: 10 Апреля.
$2+84+21+9+3=119$;	П.: 30 Апреля.
1885; 4; 14; 30;	В. п.: 30 Марта.
$2+85+21-2+6=112$:	П.: 5 Апреля.
1886; 5; 25; $19+29\frac{1}{2}$	В. п.: 18 Апреля.
$2+86+21+17+7=133$.	П.: 25 Апреля.

Ради бо́льшей отчетливости я применил здесь еще не все сокращения, которыми пользуется искусный вычислитель; так, я не заменил во 2-ой части каждого определения Пасхи слагаемых их остатками от деления на 7, что могло бы еще более упростить вычисления.

Я хочу упомянуть еще об одном упрощении. Если остаток от деления на 19 есть число, кратное 3-х, то нет надобности, как раньше, умножать его на 11 и находить остаток от деления на 30 этого произведения, но для годов от 1800 до 1899 остаток от деления на 19 есть уже искомая эпакта, для периода же от 1900 до 1999 нужно только отсчитать 1 от остатка от деления на 19. Тогда, если обозначить остаток от деления на 19 через $r = 3u$, нужно для нашего столетия уменьшить на 1 остаток от деления на тридцать $11r$. Итак, $11r = 33u$; остаток от деления на тридцать есть $3u = r$; таким образом, $e = r - 1$, как утверждалось выше.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

Вычисление фазы луны для заданной даты

Здесь также исходят из эпакты. Ибо ясно, что можно вычислить возраст луны для какого-нибудь дня года, если известно, каков был возраст луны к началу соответствующего года. Я прежде всего укажу на некоторых примерах, как это производится на практике.

1. Луна 13 Марта 1915 года. $e = 24$; к началу 1 Марта возраст луны был также равен 24 дням; 13 Марта он равнялся 37 дням, т. е. $7\frac{1}{2}$ дням (здесь берут излишек сверх $29\frac{1}{2}$). Таким образом, в этот день луна была в 1-ой четверти.

2. Луна 23 Декабря 1897 года. Здесь лучше определить эпакту 1898 года и отсчитать 8 дней назад: 98; 3; 17; 7; $e = 7$. Следо-

вательно, возраст луны 23 Декабря 1897 г. был равен 29 дням, вместе с тем в этот день наступило новолуние.

3. Кольцеобразное солнечное затмение в Апреле 1912 г., вероятно, еще у многих в памяти. В какой день, однако, оно было? Это значит, в какой день Апреля 1912 г. наступило новолуние? 12; $e = 11$; возраст луны к 1-му Марта равен 12 дням (вследствие високосного года); 1-го Апреля возраст луны $13\frac{1}{2}$ дней. 16 дней спустя закончился синодический месяц, следовательно, через 16 дней после 1 Апреля снова было новолуние, а вместе с тем, упомянутое солнечное затмение было 17 Апреля.

Не мешает запомнить этот маленький фокус. Случай для его применения может часто представиться. Вот, например, в некотором обществе передаются рассказы о приключениях, которые, уже конечно, правдивы от первого слова до последнего. Один из гостей как раз рассказывает об ужаснейшем происшествии в своей жизни. Это событие неизгладимо запечатлелось в его памяти со всеми подробностями. Он даже помнит точно день и час. Это было 26 Мая 1892 г. в 10 часов вечера, и он только потому спасся от верной смерти, что полная луна, некоторое время скрывавшаяся за тучами, выступив из за них, своим ярким светом дала ему возможность в один миг заметить угрожавшую ему опасность, от которой он был на волосок.

Во время этого расказа производятся вычисления: 92; 16; 11; 121; 1; $e = 1$; 1 Мая

1892 г. возраст луны был равен $1+1+2=4$ дням. 26 Мая, таким образом, этот возраст равнялся 30 дням, т. е. было как раз *ново*луние.

При этом чрезвычайно интересно наблюдать, какое действие производит на рассказчика и на слушателей разоблачение, что в ту ночь луна совсем не светила.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

„Мыслящие" лошади в Эльберфельде

Хотя я охотно допускаю, что большинство моих читателей уже знакомы с замечательными достижениями „мыслящих" лошадей, тем не менее, я в общих чертах расскажу в чем дело. После того, как „умный Ганс" фон-Остена в Берлине был предан забвению, а его достижения были признаны (Pfungst „Das Pferd des Herrn von-Osten [der kluge Hans]", Leipzig 1907) бездоказательными в отношении существования мыслительной деятельности у лошадей, в 1912 году появился труд некоего Кралля, владельца ювелирного предприятия в Эльберфельде, в котором снова делается попытка дать утвердительный ответ на вопрос о мыслительной способности лошадей. („Denkende Tiere" Beiträge zur Tierseelenkunde auf Grund eigener Versuche. Der kluge Hans und meine Pferde Muhamed und Zarif, Leipzig, Fr. Engelmann, 1912). Взгляды на это сочинение, так же как и на достижения мыслящих лошадей, резко расходятся. Комиссия психологов произвела испытание и дала чрезвычайно благоприятный отзыв, к которому восторженно присоединилось несколько других представителей той же специальности. С другой стороны, появилось разъяснение („Протест по делу Эльберфельдских мыслящих лошадей“), доложенное профессором Декслером из Праги на состоявшемся в Монако Международном Конгрессе Зоологов. Под этим протестом подписались и люди с громким именем, например, Вильгельм Вундт.

Я очень далек от того, чтобы занять определенную позицию в этом споре; я не специалист по психологии животных, а потому не могу высказываться по этому вопросу; меня интересует здесь только математическая сторона дела. Что вычисляют эти лошади? Минуя более легкие задачи, хотя именно эти задачи являются наиболее интересными для психологов, я перейду непосредственно к „очень трудным задачам“, как их называет Л. Плате (L. Plate) (Naturwissenschaftl. Wochenschrift, N. F. XII. Nr 17). Речь идет в данном случае об извлечении корней 2, 3 и 4-ой степеней такого рода, что результат при этом является обыкновенно либо двузначным, либо трехзначным. Вот несколько примеров в том виде, как их запротоколировал Плате: $\sqrt{99\,225}$; Мухамед: 315, т. е. сразу правильный ответ. $\sqrt[4]{83\,521}$; М.: 23 (не верно), 17 (верно). $\sqrt{582\,169}$; М.: 523, 347, 177, 132, 747; 787; 773; 873; 783; 363; и, наконец, на 11-й раз правильно—763. Сообщают также и о корне 5-й степени

(Саразин): $\sqrt[5]{147\,008\,443}$; М.: 23, 24, 32, 22, 63, 33, наконец, правильно — 43.

Решением задач такого рода лошади внезапно ставятся почти на один уровень с мастерами вычислительного искусства, деятельность которых мы здесь рассматриваем. Правда, вычислитель не может гадать десять раз подряд, так как этим он подрывает свой престиж. Но верность искусства растет благодаря постоянному упражнению. Да и кто станет осуждать лошадей за то, что они ищут для себя новый промысел? Пар, бензин и электричество почти совершенно вытеснили их из прежнего круга деятельности. И так как уже скоро не останется ни одной повозки, ни одного экипажа, ни одного плуга, которые они могли бы таскать за собой, то вот и приходится им заняться вытаскиванием—корней и врываться, со своей стороны, в область, в которой до сих пор существовала лишь незначительная конкуренция [1]). Как считают лошади? Можно ли их научить тем искусственным приемам, которые описаны в предыдущих главах? На эти вопросы я отказываюсь отвечать. Моя книжка написана для мыслящих людей, а не для мыслящих лошадей.

Возникает, однако, вопрос, от ответа на который я не могу уклониться. Благодаря этому глава эта выйдет длиннее, чем некоторые другие. Этот вопрос гласит: является ли

[1]) У лошадей появились в свою очередь конкуренты—обезьяны. Ср. K. Marbe. „Die Rechenkunst der Schimpansin Basso im Frankfurter Zoologischen Garten“. Leipzig 1916, B. G. Teubner.

указанное извлечение корней действительно признаком разума, будь то у человека или у лошади? Этот вопрос, правда, носит скорее психологический характер, и я мог бы предоставить разрешение его психологам и философам, однако, опыт показал, что, если философы начинают судить о математических вопросах, то математикам при этом зачастую приходится плохо. Я напомню только о Шопенгауэре, который отрицал какое бы то ни было образовательное значение математики и наличие какого бы то ни было разума у математиков. Разве отсюда далеко до того, чтобы вопрос о мыслящих лошадях разрешить просто по Шопенгауэру? Даже не нужно идти так далеко, как этот философ; достаточно, ведь, отрицать присутствие разума у артистов-вычислителей и тогда даже не придется портить отношений с математиками.

К такому решению проблемы действительно пришел один из специалистов. Профессор доктор фон-Буттель-Реепен [von Buttel-Reepen] (Meine Erfahrungen mit den „denkenden" Pferden, Naturw. Wochenschrift, N. F. XII, Nr. 17) приводит по этому поводу, приблизительно, следующее: „Согласно имеющимся вообще по этому поводу данным, существовал целый ряд артистов-вычислителей, и существуют до настоящего времени некоторые из них, которые, будучи с одной стороны совершенно неразвитыми,—это крестьянские дети—уже в возрасте 6-ти лет втечение нескольких секунд могли решать труднейшие вычислительные задачи, извлекать квадратные корни и т. д., разумеется, в уме, ибо в этом возрасте они не умели ни читать, ни писать. Я назову здесь 8-летнего в настоящее время Мигуэля Мантилле (Miguel Mantille), затем Тома Фуллера (Tom Fuller), который так никогда и не научился читать и писать, Анри Мондё (Henri Mondeux), Ферроля (Ferrol), Иноди (Inaudi) и т. д., наконец, слепого от рождения и несколько слабоумного Флёри (Fleury), который в настоящее время, в возрасте 18 лет, живет в Институте для слепых г. Армантриера, но в извлечении квадратных корней и т. п. достигает самых невероятных результатов и притом своим собственным совершенно своеобразным способом, ибо обычный метод ему не известен... Из этих примеров можно смело заключить, что решение труднейших вычислительных задач, при известных обстоятельствах, не требует высокого умственного развития и, очевидно, легко дается и при исключительно слабом развитии. Если принять еще во внимание, что удивительный вычислительный талант детского возраста может даже совершенно исчезнуть с повышением развития при прогрессирующем общем образовании, как это было, например, с Ричардом Уотли (Richard Whately) (до 1863 г. Архиепископ гор. Дублина), и, таким образом, в известной мере противополагается в этом случае умственному развитию, то, как мне кажется, нет никакой безусловно принудительной причины, которая могла бы заставить нас принять наличие высокого развития и у Эльберфельдских лошадей, ибо во всем остальном их поведение этому не соответствует".

Если я пытаюсь возражать на эти рассуждения, то это происходит отнюдь не в интересах мыслящих лошадей, а только в интересах мастеров вычислительного искусства, по крайней мере, в отношении особой категории их. Я говорю о тех, „тайны" которых я изложил в предыдущих главах. Нужно строго различать механический счет, основанный на хорошей от рождения числовой памяти, от разумного производства вычислений, при котором используются преимущества всех, случайно возникающих обстоятельств. Я не буду возражать на то, что в первом случае малое развитие является вполне достаточным. Однако, те вычислители, которых я имею в виду, вычисляют разумно и, сверх того, собственным размышлением доходят и до самых методов, которыми они пользуются. Неужели же здесь справедливы слова Писания, что детской натуре доступно то, что скрыто от мудрых мира сего. Мне возразят, что речь шла о первой группе механических вычислителей. Я так бы и думал, если бы не был назван мастер вычислительного искусства, который уж во всяком случае не может быть причислен к этой группе. Этот человек — Ферроль. Ему я посвящу следующую главу, и пусть читатели сами решат, к какой из двух групп принадлежит этот вычислитель. Реабилитацию Иноди можно найти у Бинэ (см. Литературный указатель, стр. 84). По поводу Мондё высказывается не кто иной, как

Коши в своем „Rapport sur les procédés de calcul imaginés et mis en pratique par un jeune pâtre de la Touraine“, который кончается словами „...редкие способности, которые позволяют надеяться, что этот необыкновенный ребенок впоследствии отличится на научном поприще“. Это предсказание, во всяком случае, не исполнилось.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

Вычислительные приемы Ферроля

Во время своих публичных выступлений Ферроль имеет обыкновение знакомить слушателей с методом умножения, которым он пользуется, чтобы немедленно написать произведение двух многозначных сомножителей. Этот метод, таким образом, не принадлежит к „тайнам“, тем более также и потому, что недавно появилась статья, посвященная этому же методу (E. Jancke, Das Ferrolsche Rechenverfahren und seine Anwendung in der Schule. Städt. Oberrealschule Königsberg i. Pr. Prog. 1911 Nr. 24 — Способ вычисления Ферроля и его применение в школе).

Во всяком случае, как я хотел бы заметить заранее, и как высказался также В. Литцманн в реферате выше названной работы, этот способ умножения не только не нов, но история его берет начало у индусов. Естественно, что этим заслуга Ферроля никоим образом не уменьшается; если он при этом пришел и не к новым результатам, то несомненно, что этот прием был им самим вновь найден и разработан.

Прием основан на следующей теореме: Чтобы перемножить два многочлена нужно все члены первого умножить последовательно на каждый член второго. Таким образом, если имеют:

$$(a_0+10a_1+100a_2+1000a_3)\,(b_0+10b_1+100b_2+1000b_3),$$

то получается, если вместе с тем расположить результат надлежащим образом:

$$a_0b_0+10(a_1b_0+a_0b_1)+100(a_0b_2+a_2b_0+a_1b_1)+$$
$$+1000\,(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2+a_2b_1)+10\,000\,(a_1b_3+$$
$$+a_3b_1+a_2b_2)+100\,000(a_2b_3+a_3b_2)+1\,000\,000\,a_3b_3.$$

Отсюда выводим, что можно показать непосредственно также на числовых примерах, следующее:

Единицы получаются только умножением единиц на единицы.

Десятки: единицы на десятки + десятки на единицы + излишек от умножения единиц.

Сотни: единицы на сотни + сотни на единицы + десятки на десятки + излишек от умножения десятков.

Тысячи: единицы на тысячи + тысячи на единицы + десятки на сотни + сотни на десятки + излишек от умножения сотен.

Десятки тысяч: десятки на тысячи + тысячи на десятки + сотни на сотни + излишек от умножения тысяч.

Сотни тысяч: сотни на тысячи + тысячи на сотни + излишек от умножения десятков тысяч.

Миллионы: тысячи на тысячи + излишек от умножения сотен тысяч.

Здесь виден симметрический порядок. Чтобы показать его еще отчетливее, я буду писать буквы в порядке цифр, и именно, чтобы предотвратить ошибки, каждый знак буду отделять от другого вертикальной черточкой.

$a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$

единицы;

$b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0$

$a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$

десятки;

$b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0$

$a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$

сотни;

$b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0$

$a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$

тысячи;

$b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0$

$a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$

десятки тысяч;

$b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0$

$a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$

сотни тысяч;

$b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0$

$a_3 \mid a_2 \mid a_1 \mid a_0$

миллионы.

$b_3 \mid b_2 \mid b_1 \mid b_0$

Практическое приложение этого интересного умножения, дающего вполне пригодный метод для упражнения в умножении много-членов, поясним на некоторых примерах. Я выбираю сначала трехзначные множители:

$$\frac{326}{476}$$

6.6=3*6*; 3+12+42=5*7*; 5+18+24+14=6*1*; 6+21+8=3*5*; 2+12=*15*; Результат: 155 176.

Разумеется, все вычисление ведется в уме, отпечатанные курсивом цифры записываются справа налево, в то время как рядом стоящие, как излишек, „удерживаются в уме“.

Приведем теперь пример умножения двух 4-хзначных чисел:

$$\begin{array}{r} 2\,529 \\ 7\,565 \\ \hline \end{array}$$

4*5*; 4+10+54=6*8*; 6+25+45+12=8*8*; 8+10+63+30+10=12*1*; 12+12+14+25=6*3*; 6+10+35=5*1*; 5+14=*19*; Результат: 19 131 885.

Кто затратит на это достаточно времени и необходимую энергию, тот сможет достичь в применении этого приема необычайной ловкости и наконец записывать быстро и уверенно результат умножения даже и для сомножителей, содержащих 5 и более знаков. Если сомножители содержат не одинаковое число знаков, то недостающие цифры меньшего множителя представляют себе замещенными нулями. Если сомножители стоят рядом друг с другом, то выполнение умножения затрудняется, ибо нет симметрического порядка. Артист-вычислитель должен быть наготове также и для этого случая; остальные люди могут обойтись без этих упражнений.

Если, в частности, сомножители равны, то мы получаем квадрат. На месте a_0b_0 получаем a_0^2; $a_0b_1+a_1b_0$ обращается в $2a_0a_1$ и т. д. Таким образом, имеются только квадраты и удвоенные произведения. Пример:

$$\mathit{7358}^2 = 54\,140\,164$$

$8^2 = 6\mathit{4}$; $6+80 = 8\mathit{6}$; $8+48+25 = 8\mathit{1}$; $8+112+$ $+30=15\mathit{0}$; $15+70+9=9\mathit{4}$; $9+42=5\mathit{1}$; $5+49=\mathit{54}$.

Этот способ возвышения в квадрат я считаю действительно ценным, ибо, пользуясь им, мало-мальски опытный счетчик может быстро и уверенно вычислить квадраты чисел, содержащих до 5 знаков. Кроме того, это прекрасная иллюстрация к теореме: Чтобы возвысить в квадрат многочлен, нужно составить сумму всех возможных квадратов и всех возможных удвоенных произведений его членов.

Из этого приема умножения Ферроль получил метод деления, который во всяком случае был выведен задолго до него Фурье. Он опирается на то, что стараются определять цифры частного слева направо и последовательно перемножать согласно выше указанному способу, но так, что это умножение производится слева направо.

Пример: 23 038 047 : 7 168.

I. 23 038 047

$$\frac{}{7\,168}$$

$\downarrow$

$\mathit{3}$ $\quad$ $7\cdot\mathit{3} = 21$; Остаток 2; 20.

II. $\dfrac{23\,038\,047}{7\,168}$

3*2* $20-3.1=17$; 7 в 17 содержится *2* раза; остаток 3; 33.

III. $\dfrac{23\,038\,047}{7\,168}$

32*1* $33-3.6-2.1=13$; 7 в 13 содержится *1* раз, остаток 6; 68.

IV. $\dfrac{23\,038\,047}{7\,168}$

321*4* $68-8.3-6.2-1.1=31$; 7 в 31 содержится *4* раза; остаток 3; 30.

V. $\dfrac{23\,038\,047}{7\,168}$

3 214 $30-1.4-2.8-6.1=4$; 44.

VI. $\dfrac{23\,038\,047}{7\,168}$

3214 $44-6.4-8.1=12$; 127.

$$\begin{array}{l} \text{VII.}\ \underline{23\,038\,047} \\ \qquad\quad 7\,168 \\ \qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\quad 3\,214 \quad 127 - 8\cdot 4 = 95. \end{array}$$

Результат: 3 214, остаток 95.

При достаточном навыке можно все эти отдельные вычисления быстро производить в уме и записывать только цифры частного.

Ферроль обратил затем свой метод возвышения в квадрат и вывел, как это уже сделал до него Фурье, способ извлечения корня. Им он наверное воспользуется, если ему когда либо случится извлекать квадратный корень. Выше я разъяснил, почему этот случай не слишком часто имеет место.

Для пояснения этого приема я также приведу пример:

$\sqrt{10\,745\,284} = 3\,278.$
$10 = \mathit{3}^2 + 1;\ 17.$
$17 : 6 = \mathit{2}$, остаток $5;\ 54.$
$54 - 2^2 = 50;\ 50 : 6 = \mathit{7}$, остаток $8;\ 85.$
$85 - 4.7 = 57;\ 57 : 6 = \mathit{8}$, остаток $9;\ 92.$
$92 - 4.8 - 7^2 = 11;\ 118.$
$118 - 14\cdot 8 = 6;\ 64.$
$64 - 8^2 = 0.$

Но при этом извлечении корня неизбежно, так же как при делении, новая цифра результата может быть выбрана слишком большой, что, как известно, происходит и при обычном делении и извлечении квадратного корня, а тем более кубического корня. Как помогает себе в этом случае Ферроль? Он вводит в рассмотрение так называемые „отрицательные“ цифры, так что он спокойно может считать дальше, если он даже когда-нибудь и выбрал какую-либо цифру на единицу больше. В нашем рассмотренном только что примере есть большое искушение вместо 7 десятков взять 8. В дальнейшем оказывается, что 8 слишком велико. Это исправляется тем, что приписываются 2 отрицательных единицы. Знак „—“ ставят над цифрой и получают:

$$3\,28\bar{2} = 3\,280 - 2 = 3\,278.$$

Разумеется, и в употреблении отрицательных цифр нет ничего нового. Если следить за историческим развитием некоторых предложений теории чисел, то можно иногда встретить авторов, употребляющих отрицательные цифры для придания более удобной формулировки предложениям, которые в ином виде представляются более громоздкими. Как предполагает Литцманн в цитированном выше реферате работы о способе Ферроля, употребление отрицательных цифр встречается еще у Коши.

Я хотел бы здесь привести пример, в котором употребление отрицательных цифр приводит к такому решению вопроса, которое наверно лучше всего связано с сущностью дела. Речь идет о так называемой задаче Баше о гирях, т. е. об определении, каковы должны быть разновески для того, чтобы на весах можно было взвесить любое целое число фунтов, не превышающее 40, если требуется, чтобы число таких разновесок было возможно меньшим. При этом разрешается пользоваться обеими чашками весов для накладывания разновесок, так что тот или иной вес может встречаться также и в виде вычитаемого. Таким образом, каждый из весов (соответствующих отдельным разновескам), может встретиться только один раз, как слагаемое, либо один раз, как вычитаемое, или может совсем не встречаться; другими словами, веса могут иметь только коэффициенты: $+1$, -1 и 0. Теперь мы задаемся вопросом: в какой системе счисления встречаются лишь цифры 0, $+1$ и -1? Так как имеются только 3 цифры, то речь может идти только о троичной системе, т. е. о такой, в которой разрядные единицы суть последовательные степени числа 3, совершенно так же, как в нашей десятичной системе это суть последовательные степени числа 10. Но ведь в троичной системе у нас имеются цифры 0, 1 и 2, однако употребления цифры 2 можно избежать введением цифры -1, ибо

$$2.3^n = 3.3^n - 1.3^n = 1.3^{n+1} - 1.3^n,$$

т. е. вместо 2 на $(n+1)$-ом месте следует поставить единицу в следующем высшем разряде и -1 на том месте, где стояло 2. Мы приходим, таким образом, к заключению, что за веса разновесок следует выбрать степени числа 3, именно: 1, 3, 9, 27. При этом нам не приходится доказывать особо, что поставленное выше условие удовлетворено, ибо число 40 в троичной системе записывается: 1|1|1|1, и всякое число от 1 до 40 в этой системе изображается по большей мере четырьмя цифрами, причем цифры 2 можно избегнуть с помощью цифры -1.

Вернемся, однако, опять к нашей первоначальной теме. Я упомяну, отсылая снова к работе Янке, и о том, что Ферроль еще глубже разработал свой метод, приспособив его к вычислению логарифмов, по заброшенному, вообще, методу Лонга, так что он в состоянии решать квадратные и кубические уравнения с неудобными коэффициентами и т. д. и проявил, коротко говоря, замечательную разносторонность.

Пусть читатель решит теперь поставленный в конце предыдущей главы вопрос.

ПРИБАВЛЕНИЕ

I. Поверки с помощью девяти и одиннадцати

При ходе наших исследований мы неоднократно пользовались этими поверками, и на стр. 4 и 5 я изложил также их математическое обоснование. Для тех, для которых эти поверки являются новыми, здесь приведены некоторые исторические сведения и элементарные приложения. Уже на стр. 5 Главы I я доказал теорему: Остаток от деления на 9 произведения равен остатку от деления на 9 произведения остатков от деления на то же число обоих сомножителей. Поверка с помощью девяти в случае умножения поэтому производится следующим образом: Определяют остатки от деления на 9 сомножителей и результата, перемножают оба первых, определяют остаток от деления на 9 этого произведения и приравнивают его остатку от деления на 9 результата. Если они не совпадают, то результат не верен. Если же вычисление выдерживает это испытание, то либо задача решена верно, либо ошибка представляет число, кратное 9.

Как пример, я приведу оба случая умножения из последней главы.

$$\begin{array}{r l}
326 & \left.\begin{array}{l}2\\8\end{array}\right\}7 \\
476 & \\
\hline
155176 & 7
\end{array}$$

Справа от каждого из трех чисел я написал их остатки от деления на 9. Произведение $8.2 = 16$ дает при делении на 9 остаток 7, который совпадает с остатком результата; таким образом, проба выдержана.

Адам Ризе при поверке девяткой пользовался четырьмя углами креста. Слева и справа он писал остатки от деления на 9 множителей, сверху остаток от деления на 9 произведения остатков от деления на 9 множителей, внизу—остаток от деления на 9 результата. Таким образом, в нашем примере поверка девяткой имела бы следующий вид:

$$\begin{array}{ccc} \diagdown & 7 & \diagup \\ 2 & \times & 8 \\ \diagup & 7 & \diagdown \end{array}$$

И если мы теперь узнаём[1]), что Адам Ризе изобразил на своем портрете символ

$$\begin{array}{ccc} \diagdown & 4 & \diagup \\ 2 & \times & 2 \\ \diagup & 4 & \diagdown \end{array}$$

то мы поймем, какое важное значение этот великий мастер вычислительного искусства придавал этой поверке.

---

[1]) Lietzmann, Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. S. 59.

Наш второй пример гласит:

$$\begin{array}{r} 2\,529 \\ 7\,565 \\ \hline 19\,131\,885 \end{array} \quad \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} 0 \\ 5 \end{matrix}\right\} 0 \text{ или} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \diagdown & 0 & \diagup \\ 0 & \times & 5 \\ \diagup & 0 & \diagdown \end{array}$$

Третий пример:

$$\begin{array}{r} 7\,358^2 \\ \hline 54\,140\,164 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5;\ 5;\ 7 \text{ или} \\ 7\qquad \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \diagdown & 7 & \diagup \\ 5 & \times & 5 \\ \diagup & 7 & \diagdown \end{array}$$

Четвертый пример:

$$23\,038\,047 : 7\,168 = 3\,214, \text{ остаток } 95.$$

Отсюда следует: $\underset{4}{7168} . \underset{1}{3214} + \underset{5}{95} = \underset{0}{23\,038\,047}.$

Под числами я написал их остатки от деления на девять. С ними я произведу теперь те же операции, что и с данными числами. $4 . 1 + 5 = 9$, остаток от деления на 9 есть 0. Остаток от деления на 9 правой части точно так же равен 0, проба девяткой выдержана. Таким образом, правило можно кратко выразить так: Чтобы подвергнуть поверке девяткой решение задачи на деление, нужно применить этот способ к результатам поверки, произведенной при делении.

Я уже говорил раньше, что если решение выдерживает испытание 9-ю, то это не есть еще верный признак его правильности. Если ошибка есть число, кратное 9, то естественно она не может быть открыта поверкой с помощью девятки. Среди ошибок от 1 до 100 есть 11 чисел, кратных 9, следовательно, вероятность того, что задача решена неправильно, несмотря на то, что выдержано испытание девяткой, составляет 11%, вероятность же того, что она решена правильно, составляет 89%.

Применим теперь к тем же задачам метод поверки с помощью 11, основание которого точно так же изложено на стр. 5.

$$\begin{array}{r} 326 \\ 476 \\ \hline 155\,176 \end{array} \quad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 7 \\ 3 \end{array}\right\} 10 \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\,529 \\ 7\,565 \\ \hline 19\,131\,885 \end{array} \quad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 10 \\ 8 \end{array}\right\} 3 \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ 7\,358^2 \\ \hline 54\,140\,164 \end{array} \quad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 10 \\ 10 \end{array}\right\} 1 \\ 1 \end{array}$$

$23\,038\,047 : 7\,168 = 3\,214$, остаток 95 или

$$\begin{array}{ccccccc} 7\,168 & . & 3\,214 & + & 95 & = & 23\,038\,047 \\ 7 & & 2 & & 7 & & 10 \end{array}$$

$7 \cdot 2 + 7 = 21$, остаток от деления на 11 равен 10, как и у результата.

Если испытание с помощью 11 не выдерживается, то опять-таки решение несомненно неверно, если же оно выдерживается, то или задача решена правильно, или же ошибка представляет число, кратное 11. Среди ошибок, размеры которых заключаются от 1 до 100, есть 9 кратных 11, таким образом, вероятность того, что задача решена неверно, несмотря на то, что испытание с помощью 11 выдерживается, составляет 9%, вероятность же того, что задача решена верно, составляет 91%.

Если выдерживаются оба испытания, то либо задача решена правильно, либо ошибка представляет число, кратное 99. Среди ошибок от 1 до 100 содержится только одно число, кратное 99, следовательно, вероятность того, что задача неправильно решена, несмотря на то, что оба испытания выдерживаются, составляет только 1%; вероятность же того, что решение правильное, составляет 99%.

В то время, как эти вещи были известны несколько столетий тому назад и забыты только благодаря незаслуженному небрежению, существует еще другое применение поверки с помощью девятки, которое, как я думаю, менее знакомо. Это есть применение поверки девяткой к частному случаю большой теоремы Ферма, а именно к теореме: Уравнение $a^3 + b^3 = c^3$ никогда не может быть решено в целых числах. Если бы такие числа существовали, то a^3, b^3, c^3 при делении на 9 не могли бы давать других остатков, кроме 0, 1 и 8 (см. стр. 10).

a, b и c предполагаются взаимно-простыми,—требование, которое посредством надлежащего сокращения всегда оказывается выполнимым. Поэтому исключена возможность того, что a^3, b^3 и c^3 одновременно дают при делении на 9 в остатке 0. Мы будем теперь предполагать, что ни одна из этих величин не дает при делении на 9 в остатке 0. Тогда были бы мыслимы только следующие случаи:

1) a^3 при делении на 9 дает в остатке 1, b^3 также; тогда c^3 имело бы при делении на 9 остатком 2, что невозможно.

2) a^3 дает при делении на 9 в остатке 1, b^3—в остатке 8; тогда c^3 при делении на 9 имело бы остатком 0, что противоречит нашему допущению.

3) a^3 при делении на 9 дает в остатке 8, b^3—в остатке 1; тогда c^3 давало бы при делении на 9 в остатке 0, что опять-таки противоречит нашему допущению.

4) a^3 при делении на 9 дает в остатке 8, b^3 также; тогда c^3 давало бы при делении на 9 в остатке 7, что невозможно.

Отсюда следует: Требование найти 3 целых числа a, b, c такого рода, что $a^3+b^3=c^3$, невыполнимо, если ни одно из трех чисел не делится на 3.

Этим, разумеется, для $n=3$ проблема далеко еще не разрешена; мы рассмотрели только один из главных случаев, и нужно еще заняться вторым главным случаем, когда одно из трех чисел делится на 3. С помощью дальнейшего применения поверки девяткой, о чем я, однако, здесь не буду распространяться, можно показать, что это число должно делиться не только на 3, но и на 9.

Результат есть частный случай более общей теоремы, которую еще нужно доказать. Для определенных групп числовых значений n доказательство можно найти еще у Лежандра [1]).

II. Применения бинома Ньютона

Я привел на стр. 11 прием Губбеса, на основании которого можно очень удобно определять цифры единиц и десятков искомого корня. Доказательство правильности этого приема есть интересное применение бинома Ньютона, и я рекомендовал бы математикам, преподающим в старших классах, при изложении бинома Ньютона не полениться познакомить своих учеников с этой маленькой главой; она наверно поучительнее, чем надуманные примеры, которыми обычно тяготятся ученики старших классов.

Двузначное число, вообще, представляется в виде $10a+b$, причем здесь a обозначает любую цифру, b — одну из цифр 1, 3, 7, 9.

1) $b=1$. Тогда $(10a+1)^{10}=\ldots\ldots+10.10a+1$, оканчивается, таким образом, на 01, а потому также и $(10a+1)^{20}$ оканчивается на 01.

2) $b=9$. Тогда
$(10a+9)^{10}=[10(a+1)-1]^{10}=\ldots\ldots-10.10(a+1)+1$, оканчивается, таким образом, на 01, поэтому также $(10a+9)^{20}$ оканчивается на 01.

3) $b=3$. Имеем:
$(10a+3)^{20}=[(10a+3)^2]^{10}=[\ldots 60a+9]^{10}=(10k+9)^{10}$, следовательно, согласно доказательству 2), оканчивается на 01.

---

[1]) См. Maennchen, Lösungen und Löser des grossen Fermatschen Problems, Z. f. math. und naturw. Unt., 45. Jahrg., 2 Heft, 1914.

4) $b=7$. Тогда $(10a+7)^{20}=(10l+49)^{10}=$ $=(10c+9)^{10}$, следовательно, согласно доказательству 2), оканчивается на 01.

Этим самым, как я надеюсь, дано строгое, краткое и удобопонятное доказательство нашего утверждения на стр. 12.

Если подкоренное число оканчивается на 5, то должно воспользоваться также еще и цифрой сотен. 5^{10} оканчивается, что легко проверить, на 625; поэтому также 5^{20} оканчивается этими тремя цифрами. Составляя теперь $(10a+5)^{20}$, получаем: $5^{20}+20.5^{19}.10a=$ $=5^{20}+1000.k.a$, т. е. двадцатая степень каждого оканчивающегося на 5 двузначного числа оканчивается на 625. Чтобы найти теперь, на какие 3 цифры оканчивается 21-ая степень, нужно перемножить 625 и $10a+5$. Умножение на 5 дает 3 последние цифры 125; умножение на $10a$ доставляет еще $25a$ десятков, так что в общем получаем $25a+12$ десятков. Таким образом, выводится простое правило: Вычитают 12 из сотен и десятков 21-ой (41-ой, 61-ой, ...) степени подкоренного числа и остаток делят на 25. Полученное частное есть число десятков искомого корня.

Прием Губбеса-Квинтона-Ферроля, описанный в примечании на стр. 38, также находит свое простое объяснение при помощи бинома Ньютона.

Подкоренное число есть n-ая степень $10^k-\varepsilon$, следовательно, равно $10^{kn}-n.10^{kn-1}.\varepsilon$, и здесь можно остановиться в случае, когда ε достаточно мало. Приписывая теперь перед подкоренным числом цифру $n-1$, мы прибавляем $(n-1).10^{kn}$. Рассматривая теперь только первые n знаков слева, как все число, мы тем самым делим на 10^{kn-1}. Таким образом, мы получаем:

$$\frac{(n-1)10^{kn}+10^{kn}-n.10^{kn-1}.\varepsilon}{10^{kn-1}}=n.10-n.\varepsilon.$$

Если мы теперь еще разделим на n, как этого требует указание на стр. 39, то мы получим на самом деле искомый корень $10-\varepsilon$.

Здесь можно было бы присоединить еще многие приложения бинома Ньютона, но я не хотел бы сделать эту главу черезчур большой. Я хотел бы только предложить моим читателям раскусить еще один орех: Какая степень каждого оканчивающегося на 1, 3, 7, 9 числа оканчивается на 001? Каким образом можно, следовательно, надлежащим возвышением в степень, найти 3 последних цифры корня 3-ей, 7-ой, 11-ой, 13-ой... степеней по трем последним цифрам подкоренного числа? Как можно просто вывести следствие?

III. Малая теорема Ферма

В различных местах я ссылался на то, что известные искусственные приемы, которыми пользуются артисты-вычислители, находят свое глубокое основание в малой теореме Ферма. Быть может, я пойду навстречу желанию многих из моих читателей, если я посвящу этой теореме маленькую главу, возможно элементарнее докажу эту теорему и вдобавок изложу еще некоторые ее применения.

Я не премину, к тому же, обратить внимание на то, что в Математической Библиотеке издания Тейбнера в последнее время появилась книжка, в которой эта теорема интересным образом освещена с другой стороны [1]).

Теорема гласит: Если p простое число и a какое-нибудь целое число (только не кратное p), то a^{p-1} при делении на p дает в остатке 1. Или еще так: $a^p - a$ всегда делится на p. В этой форме теорема справедлива также тогда, когда a есть кратное p.

Доказательство: Согласно формуле бинома Ньютона, имеем:

$$(a+1)^p = a^p + p \,.\, a^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} \cdot a^{p-2} +$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \cdot a^{p-3} + \cdots + p.a + 1.$$

Все члены в правой части, кроме первого и последнего, делятся на p; ибо p — число простое и не может поэтому сократиться ни с одним множителем знаменателя, так как таковые не превосходят $p-1$.

Следовательно, $(a+1)^p$ при делении на p дает тот же самый остаток, что и $a^p + 1$, или:

p-ая степень увеличенного на 1 числа при делении на p дает остаток, на единицу больший того, который дает p-ая степень первоначального числа.

---

[1]) Leman, Vom periodischen Dezimalbruch, zur Zahlentheorie. Math.-Phys. Bibl. Nr. 19.

Исходя теперь из значения $a=1$, получим:

1^p при делении на p, само собой разумеется, дает в остатке 1;
2^p при дел. на p, дает остаток на 1 больший. . 2;
3^p „ „ „ „ „ „ „ „ „ 3;
4^p „ „ „ „ „ „ „ „ „ 4.

Для каждого следующего числа, таким образом, n-ая степень дает остаток на 1 больший; отсюда вытекает наше утверждение, и именно в такой форме:

a^p при делении на p дает в остатке a,

или

a^p-a „ „ „ „ „ „ „ 0,

или

$a(a^{p-1}-1)$ „ „ „ „ „ „ „ 0.

Если a делится на p, то эта теорема очевидна сама собой; в противном случае, второй множитель должен делиться на p; и так мы получаем теорему в первой предложенной нами форме.

Если мы выберем простое число p за основание системы счисления таким образом, чтобы поместные значения цифр возрастали соответственно степеням этого простого числа, то, согласно доказанной выше теореме, $(p-1)$-ая степень каждого числа, не кратного p, должна в этой системе оканчиваться цифрой 1, а каждая без исключения p-ая степень должна оканчиваться тою же цифрой, что и ее основание.

Основание нашей системы счисления, число 10, есть удвоенное простое число. Согласно теореме Ферма, a^4 должно при делении на 5 давать в остатке 1 и, следовательно, при делении на 10 дает в остатке 1 или 6. 4-ые степени нечетных чисел оканчиваются на 1, четных оканчиваются на 6, и 5-ые степени все без исключения оканчиваются на ту же цифру, что и основание.

Этим доказана теорема, высказанная на стр. 9: 1-ая, 5-ая, 9-ая,..., $(4n+1)$-ая степени оканчиваются на одну и ту же цифру. Что 3-я, 7-ая, 11-ая,..., $(4n+3)$-я степени оканчиваются также на одну и ту же цифру, легко можно заключить отсюда, и вообще для того, чтобы доказать эту теорему, нет по существу безусловной необходимости пользоваться малой теоремой Ферма; вполне достаточно было бы привести таблицу. Я выбрал этот ход доказательства только для того, чтобы дать возможность читателю бросить взгляд вглубь этих свойств, которые, разумеется, давно известны.

Чтобы читатель еще больше ознакомился с этой прекрасной теоремой, я представлю ему особенно интересное применение ее.

Результат, как я хочу заранее отметить, не является чем-то новым, но встречается еще в „Теории чисел“ Лежандра. Но, кажется, он был самостоятельно найден Ламе, как об этом между прочим упоминает Коши в отзыве об одной из работ Ламе по теории чисел. Речь идет о большой теореме Ферма, которая в настоящее время по своему интересу стоит на первом плане[1]), и мы рассмотрим отчасти один специальный случай ее.

Мы допускаем, что уравнение

$$a^n + b^n = c^n$$

разрешимо в целых числах, причем пусть n простое число, а a, b и c взаимно-простые. Пусть $2n+1$ равным образом простое число. Тогда, согласно малой теореме Ферма, a^{2n}, b^{2n}, c^{2n} при делении на $2n+1$ дают в остатке 0 и 1, следовательно, a^n, b^n ,c^n дают в остатке 0, $+1$ и -1.

Как теперь легко показать с помощью рассуждений, которые мы представили при применении поверки 9 на стр. 69, уравнение $a^n + b^n = c^n$ неразрешимо в целых числах, если ни одно из трех чисел не делится без остатка на $2n+1$. Таким образом, получается теорема:

Еслибы для простого числа n уравнение $a^n + b^n = c^n$ (a, b, c целые и взаимно-простые числа) было разрешимо, то одно из трех чисел a, b, c должно было бы делиться на $2n+1$, в случае, если $2n+1$ также простое число. Поэтому одно из Пифагоровых чисел также всегда делится на 5, и $1.2+1=3$ есть простое число, и поэтому a^2, b^2, c^2 при делении на 3 дают в остатке только 0 и 1; таким образом, отсюда вытекает еще и то предложение, что одно из чисел Пифагоровой тройки всегда должно быть кратным 3.

Дальнейшее исследование, которого я не хочу здесь приводить, дает тот же результат

[1]) Решения я получал даже из окопов.

для $4n+1$, в случае, если это простое число и >2, затем, при тех же допущениях, то же имеет место также для $8n+1$, $16n+1$. Для $n=3$, таким образом, одно из чисел a, b, c должно было бы делиться на $2.3+1=7$ и одно на $4.3+1=13$; для $n=5$, одно из чисел должно было бы делиться на 11, одно на 41; для $n=7$ одно на 29, одно на 113 и т. д.

Уже в первые десятилетия 19-го столетия был произведен стремительный натиск на большую теорему Ферма, с тою только разницей, что этот натиск был предпринят ради самой теоремы, в то время как теперь это делается преимущественно ради 100 000 марок, которые являются приманкой для победителей. В то время для решения проблемы между прочим несколько раз предлагался следующий путь:

Одно из трех чисел всегда делится на $2n+1$, $4n+1$, $8n+1$, $16n+1$, в случаях, когда рассматриваемые выражения представляют простые числа; однако, это можно еще распространить. Ибо, одно из трех чисел должно, во всяком случае, делиться на $32n+1$, $64n+1$, $128n+1, \ldots, 2^m.n+1$, если только рассматриваемые числа суть простые. Так как эта группа чисел бесконечна, то среди ее членов найдется бесконечное множество простых чисел, которые должны были бы тогда входить множителями в состав a, b или c. Таким образом, число и величина простых множителей a, b, c безгранично возрастают, в конечных пределах не существует поэтому ни одного числа a, b, c, удовлетворяющего упомянутым условиям, и, таким образом, появляется иллюзия, что знаменитая проблема решена.

Но еслибы и было даже приведено доказательство того, что существует бесконечно много простых чисел вида $2^m.n+1$, то все же нужно было бы еще доказать, что теорема, справедливая для чисел от $2n+1$ до $16n+1$, имеет место также для $32n+1$, $64n+1$, $128n+1$,... К сожалению, это не так. Уже для $32n+1$ теорема теряет силу, в чем легче всего убедиться, изучая пример $32.3+1=97$.

Почему упомянутые математики так не поступили? Почему они охотнее подвергали себя мучениям, стараясь придти к мнимому доказательству того, что все простые числа вида $2^m.n+1$ должны были бы быть делителями a, b, c?

Ответ, опять-таки, должен дать психолог, так как все зависит от разъяснения того поразительного явления, что многие выдающиеся математики испытывают странный страх перед числовыми выкладками, особенно, если вычисление представляется несколько запутанным и длительным. Один из моих знакомых психологов уже неоднократно, хотя и наполовину в шутку, выражался так: „Кто хочет правильно произвести вычисление, тот отнюдь не должен этого поручать математику". В своей статье „Психология и обучение математике" Д. Кац говорит: „Существуют математики, выдающиеся деятели науки, которые, однако, не особенно блещут искусством производства более механических числовых выкладок". Эти явления рассматривает он —

и я держусь того же мнения,— как противоположность тем артистам-вычислителям, которых я причислил к первой группе (механические счетчики) и которые часто располагают очень небольшим запасом умственных способностей. К этой группе принадлежал также Дазе, которого я в первом издании ошибочно причислил к совсем иной группе. Разъяснением этого факта я обязан Аренсу, установившему на основании переписки Гаусса с Шумахером, что Дазе в математических вещах... „был так глуп, что им можно было прошибить каменную стену“ [1]). При этом он обладал во всяком случае сверхчеловеческой вычислительной сноровкой, основанной на феноменальной числовой памяти.

Кто же, как это обычно не раз случалось, высказывает просто предложение: „Математики плохие счетчики“, тот пребывает в большом заблуждении. Существовали гениальные математики, которые в то же время были выдающимися счетчиками. „Князь математиков“ — princeps mathematicorum — К.-Ф. Гаусс, в этом отношении стоит на недосягаемой высоте, несмотря на то, что, по его собственному выражению, „никогда не заботился специально о воспитании в себе искусства в вычислении“. Однако, Гаусс большей частью вычислял не механически, но, как он сам говорит, применяя, где приходилось, „специаль-

---

[1]) Даже с логарифмами он не умел производить вычислений, так что мое утверждение на стр. 48 первого издания к нему неприменимо.

ные искусственные приемы" — „artificia specialia". Собрание наиболее интересных искусственных приемов из тех, которые я нашел в рукописном наследии великого вычислителя, я в самом непродолжительном времени обнародую.

Кроме Гаусса, я упомяну еще об Эйлере и Гордане; можно было бы привести еще примеры, но я намеренно ограничусь этими тремя.

Отдельную группу составляет, наконец, замечательнейший вычислитель нашего времени — д-р. Г. Рюкле. С беспримерной числовой памятью — и даже без каких бы то ни было мнемонических приемов — соединяет он чудесную способность при каждой числовой задаче с быстротой молнии уловить то благоприятное обстоятельство, опираясь на которое он мгновенно получает требуемый результат. Он тотчас же разъясняет своим слушателям особые благоприятные условия решенной задачи, так что тут не приходится открывать никаких „тайн". Приемов для извлечения корней, изложенных в нашей книжке, он не применяет и в этом не нуждается, ибо он может с величайшей быстротой возвысить 3-значное число в 6-ую, 7-ую и высшие степени и, таким образом, легко проверить пригодность допущенного им предположительного значения корня. Поэтому он не должен при решении поставленной ему задачи о корне заботиться о возможности извлечения такового: он дает и корень и остаток. Умножение двух трехзначных чисел он производит во мгновение ока в уме, и едва ли больше времени нужно ему для получения результата перемножения 4-значных чисел. При корнях высших степеней он, во всяком случае, пользуется логарифмами, которые он, конечно, также знает наизусть. Далее, он разлагает каждое данное ему число в пределах первого миллиона на сумму 2 или 3 квадратов и в удивительно короткий промежуток времени разлагает на простых сомножителей число, содержащее несколько миллионов. Это—достижения, которых мы напрасно стали бы искать у профессиональных артистов-вычислителей и которые возможны только при соединении в одном лице памяти, присутствия духа и знаний по теории чисел. Из теории чисел применяет он двояким образом разложение исследуемого числа на сумму двух квадратов—способ, восходящий еще к Эйлеру и которому Гаусс придал замечательную форму, воспользовавшсь им с удивительным мастерством. Рюкле с таким же мастерством, и опираясь на тот же принцип, что и Гаусс, обращается с числами, а именно индивидуализирует их. Чтобы выяснить нашу мысль, приведем пример, разумеется, не с такими большими числами, какие доступны мастерству Рюкле; мы изучим только на малых числах то, что он производит в увеличенном масштабе.

Нужно вычислить 159.119. Вычисление: $119 = 7.17$; $17.59 = 1\,003$. Поэтому $159.119 = 100.119 + (59.17).7 = 11\,900 + 7\,021 = 18\,921$. Каждый быстро вычисляющий в уме знает, что $119 = 7.17$; наоборот, $17.59 = 1\,003$ принадлежит к области специальных знаний индивидуального вычислителя, который сохраняет в своей памяти невероятно большой запас подобного рода числовых соотношений. Это индивидуализирование помогает ему, при случае, укрепить в памяти многозначные числа, служа единственным подкреплением уже и по природе мощной способности запоминать числа. Однако, к сожалению, я не должен более распространяться о Рюкле, потому что он, в сущности, не принадлежит к числу „артистов-вычислителей“ в обыкновенном смысле этого слова, но является, как я уже только что сказал, вычислителем без „тайн“. При каждом решении какой-нибудь задачи он тотчас же объясняет, каким путем он пришел к этому решению, причем каждый раз решение поражает, озадачивает своей простотой. Конечно, и здесь есть тайны, но они лежат в области психологии, и для раскрытия их пусть читатель обратится к Кацу и Г. Е. Мюллеру.

Заключительное замечание

В некоторых местах своей книжки я указал на то, что ту или иную задачу можно хорошо приспособить к преподаванию в школе. В частности, я надеюсь, что мне удалось обогатить собрание задач на бином Ньютона. Но я, право, не хочу требовать, чтобы все, что я здесь изложил, необходимо вошло в состав преподавания математики. Преподавание математики совсем не имеет целью подготовку артистов-вычислителей.

Если, однако, когда-нибудь при случае будут рассмотрены отдельные примеры, которые откроют глаза ученикам, позволив им распознать какую-нибудь уловку и не окружать ореолом сверхестественного основанные на ней достижения, то это несомненно послужит к некоторому оживлению преподавания и будет способствовать его успеху.

Литературный указатель

Bach, Dr. J., Osterberechnung in alter und neuer Zeit. Herder, Freiburg, 1907.

Его же, Zeit- und Festrechnung der Juden. Ebda. 1908.

Его же, Kalenderbuch für Schule und Haus. Strassburg, L. Beust. 1910.

Hubbes, I., Einführung in ein eigenartiges, leichtes und rasches Wurzelziehen. 1. Heft: Ungerade Wurzelexponenten. 2. Heft: Gerade Wurzelexponenten. Im Eigenverlag. Kronstadt-Brassó, Buchdruckerei Brüder Schneider & Feminger, 1915.

Binet, Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs. Paris, Hachette et Cie, 1894.

Katz, D., Psychologie und mathematischer Unterricht. (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Bd. III, Heft 8). Leipzig 1913, B. G. Teubner.

СКЛАД ИЗДАНИЯ:
Одесское Отделение
Гос. Изд. Украины
Одесса, Пушкинск. 1