

С. НЬЮКОМЪ.

ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ.

(Исторія и современное состояніе этого вопроса).

Докладъ, прочитанный въ общемъ собраніи IV междунагоднаго конгресса въ Римѣ.



mathesis.ru

Вѣстникъ Опытной Физики **и Элементарной Математики**

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками
не менѣе 24-хъ стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

Программа журнала: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Управл. Воен. Учебн. Зав. — для воен.-учебн. заведеній; Уч. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семин. и училищъ.

Пробный номеръ высылается **бесплатно** по **первому требованію.**

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ:

Подписная цѣна съ пересылкой за годъ 6 руб. за полгода 3 р. Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ 4 р., за полугодіе 2 руб. Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 коп., прошлыхъ семестровъ по 25 к.

Адресъ для корресп.: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**

С. НЬЮКОМЪ.

Т. Романъ.

ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ.

(Исторія и современное состояніе этого вопроса).

Докладъ, прочитанный въ общемъ собраніи IV-го международнаго
конгресса въ Римѣ.



Тип. Акц. Ю.-Р. Общ.
Печ. Дѣла, Одесса.
Пушкинская, № 18.

<http://mathesis.ru>

<http://mathesis.ru>



ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ.

(Исторія и современное состояніе этого вопроса).

Среди проблемъ небесной механики задача о движеніи луны занимаетъ особенно важное мѣсто какъ вслѣдствіе своей трудности, такъ и благодаря тѣмъ многочисленнымъ интереснымъ вопросамъ, къ которымъ она иногда приводитъ. Здѣсь мы имѣемъ передъ собой прекрасный примѣръ тѣхъ общихъ методовъ науки, при помощи которыхъ мы можемъ предсказывать явленія природы. Для достиженія этой цѣли нужно сначала путемъ наблюденій установить законы природы, а затѣмъ разобрать тѣ отдѣльныя условія, при которыхъ эти законы проявляются; наконецъ, путемъ разсужденія, посредствомъ дедукціи, нужно предсказывать результаты этихъ законовъ. Мы всегда находимся въ поискахъ истины. Послѣ того,

какъ мы сдѣлаемъ тѣ или иныя предсказанія, мы должны, при помощи новыхъ наблюденій, провѣрить, были ли они вѣрны. Если окажется различіе между результатами наблюденій и тѣмъ, что мы предсказали на основаніи теоріи, то нужно видоизмѣнить либо форму законовъ, либо тѣ данныя, на которыхъ мы основывали наше предсказаніе.

Въ небесной механикѣ эти методы изслѣдованія находятъ себѣ наиболѣе совершенное примѣненіе. Основнымъ закономъ здѣсь является законъ всемірнаго тяготѣнія, выражающійся формулой Ньютона; фактами, — точнѣе говоря, данными, — являются элементы орбитъ планетъ, ихъ массы и всѣ тѣ условія, которыя могутъ измѣнять ихъ движенія. Послѣ того, какъ былъ провозглашенъ законъ Ньютона, рядъ великихъ геометровъ, какъ Даламберъ (D'Alembert), Клеро (Clairaut), Лапласъ (Laplace), Лагранжъ (Lagrange), Эйлеръ (Euler), Плана (Plana), Дамуазо (Damoiseau), Ганзенъ (Hansen) — я не говорю о живыхъ — расширили и усовершенствовали методы дедукціи; въ то же время користи чистой астрономіи непрерывно исправляли астрономическіе элементы при помощи наблюденій. Можно сказать, что общимъ результатомъ всѣхъ этихъ трудовъ является полное согласіе опыта съ теоріей, за исключеніемъ двухъ

только случаевъ. Тѣ небольшія различія, которыя еще существуютъ между наблюденіями и выводами теоріи, будутъ, безъ сомнѣнія, уничтожены небольшими исправленіями элементовъ.

Исключенія, о которыхъ я только-что говорилъ, суть движенія планеты Меркурія и луны. Что касается Меркурія, то для объясненія этого уклоненія стоитъ только допустить существованіе неизвѣстныхъ массъ между Меркуріемъ и солнцемъ. Вопросъ о существованіи такихъ массъ не относится къ предмету настоящаго доклада. Что же касается луны, то здѣсь мы стоимъ лицомъ къ лицу съ настоящей загадкой,—явленіемъ, которое какъ бы указываетъ намъ на дѣйствіе неизвѣстной причины, достаточно могущественной для того, чтобы измѣнить либо движеніе луны, либо вращеніе земли вокругъ ея оси. Чтобы дать нѣкоторое понятіе о трудности и важности вопросовъ, затронутыхъ этимъ различіемъ между вычисленнымъ и наблюдаемымъ движеніемъ луны, нужно вкратцѣ дать общій очеркъ сущности и современнаго состоянія теоріи движенія нашего спутника.

I.

Цѣлью всякой теоріи небесныхъ движеній является построеніе алгебраическихъ формулъ, выражающихъ координаты тѣла въ функціяхъ времени. Эти формулы даютъ возможность вычи-

слить упомянутыя координаты для любого даннаго момента. Общимъ закономъ является законъ всемірнаго тяготѣнія; онъ выражается въ формѣ трехъ дифференціальныхъ уравненій, въ которыхъ время вводится, какъ независимая переменная. Весь ходъ дедукціи состоитъ въ интегрированіи этихъ уравненій, которое приводитъ къ выраженію трехъ координатъ тѣла въ функціи времени и шести произвольныхъ постоянныхъ величинъ, вводимыхъ процессомъ интегрированія. Этими послѣдними величинами являются элементы орбиты, проходимой тѣломъ. Они не даны а priori; ихъ нужно опредѣлить такъ, чтобы они удовлетворяли наблюденіямъ.

Полное интегрированіе оказывается, однако, невозможнымъ, за исключеніемъ того случая, когда идетъ вопросъ только о двухъ тѣлахъ; изъ нихъ одно служитъ центромъ притяженія, а координаты другого требуется опредѣлить. Въ этомъ случаѣ рѣшеніе даетъ движеніе по эллипсу, происходящее по законамъ Кеплера. Если же мы присоединимъ третье тѣло, то нужно слѣдовать методу послѣдовательныхъ приближеній.

Когда дѣло касается луны, то главнымъ тѣломъ, по отношенію къ которому мы разсматриваемъ движеніе, является земля; ея центръ принимается за начало координатъ. Если бы никакая возмущающая сила не оказывала на луну и на

землю различного дѣйствія, то орбита луны была бы Кеплеровымъ эллипсомъ. Но возмущающее дѣйствіе солнца настолько велико и проблема опредѣленія результатовъ его дѣйствія на положеніе луны такъ сложна и трудна, что генія всѣхъ великихъ геометровъ прошлаго не хватило на то, чтобы найти болѣе или менѣе точное рѣшеніе вопроса, которое удовлетворило бы потребностямъ современной астрономіи. Чтобы имѣть возможность оцѣнить уже найденныя рѣшенія, замѣтимъ, что они могутъ быть двухъ родовъ: одни — алгебраическаго, общаго характера, другія — численныя. Въ первомъ случаѣ координаты выражаются, какъ явныя функціи элементовъ, во второмъ — численныя значенія элементовъ вводятся до интегрированія.

Алгебраическаго рѣшенія въ конечномъ видѣ не существуетъ; малая величина нѣкоторыхъ элементовъ позволяетъ для луны дать рѣшеніе, которое можно развернуть въ бесконечный рядъ членовъ, расположенныхъ по степенямъ и произведеніямъ этихъ малыхъ элементовъ. За эти элементы можно принять: e , e' — эксцентриситеты двухъ орбитъ; $\gamma = \sin \frac{1}{2} I$ (наклонъ орбиты луны къ эклиптикѣ); m — отношеніе періода обращенія луны къ періоду земли.

Коэффициенты этого ряда суть періодическія функціи времени; задача будетъ рѣшена, если мы

вычислимъ эти коэффициенты съ достаточной степенью точности. Среди геометровъ прошлаго, занимавшихся разрѣшеніемъ этой проблемы, можно назвать Лапласа, Эйлера, Плана, де Понтекулана (de Pontécoulant), Лёббока (Lubbock), Делонэ (Delaunay). Ни одинъ изъ нихъ не довелъ задачу до конца, такъ какъ врядъ ли представляется возможнымъ, въ продолженіе человеческой жизни, вычислить всѣ коэффициенты этого ряда съ тою точностью, которой требуетъ наша астрономія.

Въ числѣ работъ этихъ ученыхъ работы Делонэ заслуживаютъ нашего особеннаго вниманія. Его методъ является развитіемъ метода, который былъ предложенъ Лагранжемъ, а именно — вариации произвольныхъ постоянныхъ. Этотъ методъ Делонэ можетъ быть охарактеризованъ, какъ такое преобразованіе дифференціальныхъ уравненій движенія, при которомъ произвольныя постоянныя перваго интегрированія, т. е. эллиптическіе элементы, становятся новыми переменными. Первые производныя этихъ переменныхъ по времени разлагаются въ бесконечные ряды, члены которыхъ, въ свою очередь, являются функціями самихъ переменныхъ и времени. Теорія этого разложенія въ ряды и интегрированія этихъ дифференціальныхъ уравненій при помощи послѣдовательныхъ приближеній хо-

рошо извѣстна еще со временъ Лагранжа. Этотъ методъ дѣйствительно примѣнимъ къ планетамъ; но, когда приходится прилагать его къ лунѣ, то мы встрѣчаемъ большія затрудненія вслѣдствіе значительнаго числа приближеній, необходимыхъ въ этомъ случаѣ.

Для поясненія идеи метода Делонэ обозначимъ чрезъ a нѣкоторый элементъ эллиптическаго движенія луны. Возмущающая сила, дѣйствующая на луну, производитъ измѣненіе этого элемента, которое можно выразить въ видѣ:

$$\frac{da}{dt} = P_0 + P_1 + P_2 \dots, \quad (1)$$

гдѣ P суть функціи элементовъ и времени, за исключеніемъ P_0 , которое не содержитъ времени въ явномъ видѣ. Идея Делонэ состоитъ въ томъ, чтобы сначала взять постоянное число P_0 и одинъ изъ перемѣнныхъ членовъ, — напри- мѣръ, P_1 , — и совершить полное интегрированіе, опуская всѣ другіе члены. Тогда нашъ элементъ a становится функціей шести новыхъ произволь- ныхъ постоянныхъ $a_1, b_1, c_1 \dots$ и времени t :

$$a = f(a_1, b_1, c_1, \dots, t) \quad (2)$$

Чтобы принять во вниманіе остальные члены, Делонэ предполагаетъ, что произвольныя по- стоянныя $a_1, b_1 \dots$ являются новыми перемѣн-

ными; первыя ихъ производныя по времени становятся функциями вида (1), но безъ члена P_1 . Новое интегрированіе, въ которомъ принимаются въ расчетъ только P_0 и P_2 , позволяетъ выразить $a_1, b_1 \dots$ въ функции t и новыхъ шести произвольныхъ постоянныхъ $a_2, b_2 \dots$. Эти послѣднія становятся, въ свою очередь, переменными, и такъ дальше; въ концѣ концовъ, остающіеся члены такъ малы, что ихъ квадратами и произведеніями можно пренебречь. Тогда уже интегрированіе оставшихся членовъ выполняется простой квадратурой.

Такимъ образомъ, задача сводится къ производству цѣлаго ряда алгебраическихъ операцій, содержащихъ въ себѣ безконечное количество повторныхъ подстановокъ; но эти операціи постоянно приближаютъ насъ все болѣе и болѣе къ точному значенію переменныхъ.

Можно только изумляться генію, который сумѣлъ сдѣлать такое примѣненіе плодотворнаго метода Лагранжа. Это примѣненіе не ограничивается теоріей луны; оно можетъ даже, какъ это показали Тиссеранъ (Tisserand), Гилль (Hill) и другіе, помочь намъ сдѣлать очень важный шагъ впередъ въ теоріи планетъ.

Великое произведеніе Желю н э „Теорія движенія луны“ представляетъ собою столь чудесный памятникъ алгебраическихъ и числовыхъ вычисленій,

что кажется даже невѣроятнымъ, чтобы одинъ человекъ былъ въ состояніи его воздвигнуть. Но, хотя результаты Делонэ по своей точности превосходятъ всѣ другія алгебраическія изысканія въ теоріи луны, тѣмъ не менѣе они не удовлетворяютъ потребностямъ современной астрономіи. Въ окончательномъ результатѣ коэффициентъ каждаго члена самъ является суммой безконечнаго ряда, члены котораго расположены по степенямъ и произведеніямъ небольшихъ чиселъ e , e' , γ и m , о которыхъ я уже говорилъ выше. Этотъ рядъ достаточно быстро сходится въ отношеніи величинъ e , e' и γ . Но сходимость членовъ по отношенію къ m вслѣдствіе большихъ значеній коэффициентовъ часто такъ медленна, что становится почти невозможнымъ вычислить всѣ члены ряда, которые могутъ стать замѣтными. Возможно даже, что разложеніе по степенямъ m для нѣкоторыхъ изъ этихъ членовъ является расходящимся. Во всякомъ случаѣ вполне ясно, что теорія Делонэ развита по отношенію къ m далеко не такъ, какъ это нужно было бы для современныхъ потребностей.

II.

Методы, о которыхъ я говорилъ до сихъ поръ, являются чисто алгебраическими и вмѣстѣ съ тѣмъ общими. Иначе говоря, e , e' , γ и m сохраняютъ свои алгебраическія и общія значенія;

задача состоитъ въ томъ, чтобы выразить координаты луны въ явныхъ функціяхъ времени. Чтобы вычислить координаты, достаточно подставить въ алгебраическія выраженія числовыя величины элементовъ, уже полученныя при помощи наблюдений. Но въ виду трудности алгебраическихъ разложеній, о которыхъ я говорилъ, пытались построить формулы движенія луны при помощи подстановки числовыхъ величинъ элементовъ до интегрированія. Такимъ образомъ, мы находимъ частную форму уравненій движенія, вмѣсто общаго рѣшенія задачи. Дамуазо первый, какъ мнѣ кажется, воспользовался этимъ методомъ. Но наиболѣе важной численной теоріей является теорія Ганзена; на ней основаны таблицы луны, которыми пользовались въ продолженіе полустолѣтія. Въ принципѣ численный методъ Ганзена довольно простъ. Во вторыхъ членахъ дифференціальныхъ уравненій движенія нужно подставлять приближенныя численные значенія; затѣмъ при помощи интегрированія можно найти значенія элементовъ и координатъ, которыя, какъ можно думать, будутъ болѣе точными, чѣмъ исходныя. Можно повторить этотъ процессъ сколько угодно разъ или, вѣрнѣе, до тѣхъ поръ, пока результаты перестанутъ измѣняться при дальнѣйшемъ повтореніи того же приѣма. Слѣдуя этому методу, Ганзенъ, вычи-

сливъ величины неравенствъ, которыми онъ пользовался въ своихъ „Таблицахъ луны“, вновь принялся за вычисленія и пришелъ къ значеніямъ нѣкоторыхъ изъ членовъ, слегка отличающимся отъ значеній „Таблицъ“. Однако, точность результатовъ, полученныхъ этимъ способомъ, не гарантируетъ еще ихъ отъ возраженій.

Кромѣ того, чисто числовой методъ не удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ теоріи, потому что производныя координатъ по элементамъ не могутъ быть вычислены при помощи подобныхъ выраженій. Слѣдовательно, ни методъ Делонэ ни методъ Ганзена нельзя считать вполне удовлетворительными.

III.

Теперь я перехожу къ ряду изслѣдованій, которыя, какъ мнѣ кажется, приводятъ къ результатамъ, по своей точности вполне удовлетворяющимъ всѣмъ требованіямъ современной астрономіи. Этотъ рядъ начинается трудомъ Леонарда Эйлера: „Теорія движенія луны, объясненная новымъ способомъ“ (*Theoria Motuum Lunae, Nova Metodo Pertractata*). Замѣчательнымъ фактомъ въ исторіи нашей науки является то обстоятельство, что прошло цѣлое столѣтіе прежде, чѣмъ кто-либо изъ геометровъ замѣтилъ превосходство метода, набросаннаго въ этомъ

трудъ Эйлера, опубликованномъ въ 1772 году. Только въ 1878 году, въ то время, когда при вычисленіяхъ еще предполагали, что наклонъ орбиты луны и эксцентриситеты орбитъ луны и земли равны нулю, Дж. В. Гилль (G. W. Hill) опубликовалъ свои труды о движеніи луны, основная идея котораго вытекаетъ изъ труда Эйлера. Въ 1888 году появился знаменитый мемуаръ Гилля о главномъ членѣ въ движеніи перигея луны. Принципъ его изслѣдованій заключается въ слѣдующемъ: считая среднія движенія земли вокругъ солнца и луны вокругъ земли данными, можно выраженіе каждой координаты луны развернуть въ рядъ по степенямъ и произведеніямъ эксцентриситетовъ e и e' этихъ двухъ орбитъ и γ , синуса половины наклона. Пусть y будетъ такая координата; тогда

$$y = P_0 + eP_1 + e'P_2 + \gamma P_3 + e\gamma P_4 + \dots, \quad (3)$$

гдѣ P суть періодическія функціи времени вида

$$P = \sum h \frac{\sin}{\cos} A + Bt. \quad (4)$$

Коэффициенты h суть функціи m , отношенія среднихъ движеній солнца и луны, A суть линейныя комбинаціи среднихъ долготъ солнца, луны, перигея и узла, а B функціи m , e , e' и γ .

Извѣстно, что Эйлеръ пытался найти значенія коэффициентовъ P въ отдельности. Но онъ встрѣтилъ затрудненіе въ томъ, что величины

m , e , e' и γ входятъ въ коэффициенты B . Въ виду этого онъ долженъ былъ разсматривать движенія аргументовъ, какъ данныя изъ наблюдений. То, что сдѣлалъ Гилль спустя столѣтіе послѣ Эйлера, можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ.

1°. Онъ нашелъ общій методъ разложенія членовъ выраженія P_0 , какъ функций среднихъ движеній, съ какой угодно степенью точности, онъ выполнилъ это разложеніе въ гораздо большей мѣрѣ, чѣмъ того могутъ требовать нужды астрономіи.

2°. Онъ развилъ новый методъ для изслѣдованія той части движенія перигея, которая не зависитъ отъ e , e' и γ .

То, что сдѣлалъ Гилль для перигея, Адамсъ (Adams) и Ковелль (Cowell) сдѣлали для движенія узла.

Конечно, идеи и методъ Гилля примѣнимы и къ самой общей формѣ проблемы, въ которую входятъ e , e' и γ . Но вотъ затрудненіе, которое встрѣчается, когда требуется опредѣлить коэффициенты P_1 , P_2 и т. д. степеней и произведеній количествъ e , e' и γ въ нашемъ рядѣ. Въ обыкновенной формѣ такого разложенія въ бесконечный рядъ коэффициенты не содержатъ этихъ элементовъ. Но, какъ я выше замѣтилъ, e , e' и γ входятъ въ значенія B , а, слѣдовательно, и въ P . Трудность состоитъ въ разложеніи B , т. е. дви-

женія перигея и узла, по степенямъ и произведеніямъ этихъ количествъ.

Е. В. Броунъ (E. W. Brown) занялся этой задачей, преодолѣлъ всѣ затрудненія одно за другимъ и пришелъ къ ея разрѣшенію. Главные пункты метода, примѣннаго Броуномъ, могутъ быть резюмированы слѣдующимъ образомъ.

1°. Въмѣсто того, чтобы разлагать коэффициенты h по степенямъ отношенія m среднихъ движеній, онъ вноситъ съ самаго начала численное значеніе m . Такимъ образомъ, его методъ состоитъ въ комбинаціи уже описанныхъ выше приѣмовъ, при чемъ по отношенію къ e и e' сохраняются алгебраическія величины, а въмѣсто m вносится численное его значеніе.

2°. Онъ открылъ новый методъ составленія производныхъ по m при помощи производныхъ, взятыхъ по другимъ элементамъ.

3°. Онъ далъ также общій методъ, который ставитъ опредѣленіе каждой изъ періодическихъ функцій P_1 , P_2 и т. д. въ зависимость отъ дифференціального уравненія второго порядка. Это рѣшеніе можетъ быть получено съ какой угодно степенью точности помощью рѣшенія системы линейныхъ уравненій.

4°. На каждой ступени этого вычисленія онъ даетъ значенія тѣхъ членовъ движенія перигея и узла, которыя необходимы для рѣшенія.

5°. Онъ выполнилъ вычисленія, соотвѣтствующія этой теоріи, такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ изъ коэффиціентовъ долготы, широты и параллакса луны ошибка была менѣе $\pm 0,01''$.

6°. Онъ далъ повѣрочныя формулы, чтобы открыть тѣ ошибки, которыя могли произойти при вычисленіи значеній членовъ.

Сравненіе коэффиціентовъ Ганзена и Делонэ съ результатами, полученными Броуномъ, приводитъ къ заключенію, что эти послѣдніе точны постольку, поскольку этого возможно желать.

Я долженъ еще указать на трудъ другого ученаго, который также работалъ надъ этой новой теоріей. Эйлеръ, Гилль и Броунъ пользовались прямоугольными координатами, которыя они потомъ преобразовывали въ полярныя. Андуайе (Andoyer) предложилъ методъ для непосредственнаго разложенія полярныхъ координатъ въ той же формѣ. Мнѣ кажется, что этотъ методъ достоинъ вниманія геометровъ, интересующихся теоріей вопроса.

IV.

До сихъ поръ я говорилъ только о дѣйствіи солнца, какъ возмущающей силѣ, измѣняющей эллиптическое движеніе луны вокругъ земли. До тѣхъ поръ, пока орбита земли не измѣнится, неравенства въ движеніи луны, производимыя дѣй-

ствіемъ солнца, будутъ строго періодичны. Среднія движенія луны, ея перигея и ея узла оставались бы равномѣрными изъ столѣтія въ столѣтіе, и неравенства луны получали бы свое первоначальное значеніе каждый разъ, какъ луна, перигей и узелъ возвращались бы въ свое первоначальное положеніе. Но дѣйствіе планетъ также должно производить небольшія измѣненія въ движеніи луны, при чемъ дѣйствіе это должно выразиться двояко: во-первыхъ, въ различномъ притяженіи планетами этихъ двухъ тѣлъ и, во вторыхъ, въ измѣненіи движенія земли вокругъ солнца, что, въ свою очередь, измѣняетъ дѣйствіе солнца на луну. Въ общемъ, дѣйствіе планетъ меньше дѣйствія солнца во столько же разъ, во сколько массы планетъ меньше массы солнца. Такимъ образомъ, казалось бы, что этими дѣйствіями можно бы пренебречь. Но какъ наблюденія, такъ и теорія показали, что результаты этого дѣйствія важны. Прежде всего сравненіе современныхъ наблюденій съ затменіями луны, о которыхъ сообщаетъ Птолемей, дали Галлею (Halley) указаніе, что среднее движеніе луны ускорилося. Позднѣе это ускореніе опънили въ 10" въ столѣтіе. Причина этого явленія была открыта Лапласомъ; она заключается въ вѣковомъ уменьшеніи эксцентриситета орбиты земли, производимомъ дѣйствіемъ планетъ. Вычисленія Ла-

пласа показали, что это вѣковое ускореніе равно $10''$; такимъ образомъ обнаружилось какъ бы полное согласіе наблюденія съ теоріей. Около 1850 года Ганзенъ вновь принялся за вычисленіе „таблицъ луны“, и на этотъ разъ получился результатъ въ $12,18''$. Позднѣйшія вычисленія, опубликованныя въ его „Darlegung“, дали разницу, еще большую на $0,35''$, т. е. $12,53''$. Онъ пытался удостовѣрить это число не только теоріей, но и наблюденіемъ, рассматривая нѣсколько полныхъ солнечныхъ затменій, упоминающихся у древнихъ историковъ. Но это согласіе было разрушено глубокими изслѣдованіями Адамса (J. C. Adams), который, проведя приближеніе дальше, нашелъ, что величина ускоренія равняется только половинѣ величины, вычисленной Ганзеномъ. Этотъ результатъ былъ тотчасъ же подтвержденъ Делонэ. Дѣйствительно, Ганзенъ, подобно Лапласу и другимъ геометрамъ, занимавшимся этой проблемой, ограничился членами перваго порядка по отношенію къ возмущающему дѣйствию солнца; между тѣмъ члены высшихъ порядковъ тоже имѣютъ довольно важное значеніе. Послѣднія вычисленія проф. Броуна привели его къ цифрѣ $5,31''$, результату, который мы можемъ въ теоріи принять точнымъ до сотыхъ долей секунды.

Такимъ образомъ получилось явное несогласіе между теоріей и наблюденіемъ, vera causa кото-

раго была найдена Вилліамомъ Феррелемъ (William Ferrel) и позднѣ Делонэ въ дѣйстви луны на приливы и отливы. Вслѣдствіе тренія приливы и отливы не вполнѣ симметричны относительно направленія луны; дѣйствіе луны на море даетъ пару силъ, которая постоянно стремится замедлить движеніе земли вокругъ оси и произвести небольшое увеличеніе продолжительности нашихъ сутокъ; въ результатѣ наша мѣра времени всегда опаздываетъ изъ столѣтія въ столѣтіе. Достаточно уже опозданія въ 12 секундъ, чтобы произвести видимое измѣненіе въ 6" въ среднемъ движеніи луны. Послѣдующія изслѣдованія даютъ видимую величину ускоренія только въ 8", такъ что разногласіе между теоретической и наблюдаемой величинами, т. е. дѣйствіе тренія составляетъ не болѣе 2" въ столѣтіе.

Интересенъ тотъ фактъ, что замедленіе во вращеніи земли, производимое дѣйствіемъ приливовъ и отливовъ, было предположено Кантомъ, хотя его доказательство такого явленія не правильно. Лапласъ показалъ, что дѣйствіе, предположеннаго Кантомъ, не существуетъ; но его выводъ, что не существуетъ никакого замедленія, не достаточно обоснованъ.

Лапласъ путемъ сравненія движенія луны съ таблицами Лаланда (Lalande) обнаружилъ

существованіе въ этомъ движеніи нѣкоторыхъ неравенствъ длиннаго періода. Ганзенъ первый указаль на существованіе такого неравенства и въ теоріи. Въ своихъ „Таблицахъ луны“ онъ ввелъ два неравенства, обусловливаемыя дѣйствіемъ Венеры, одно съ періодомъ въ 273 года, другое въ 239 лѣтъ. Первое изъ нихъ по теоріи дѣйствительно существуетъ, а второе слишкомъ мало, всего около $0,24''$, какъ это показали Делонэ и Радо (Radau). Величина, найденная Ганзеномъ, почти въ 100 разъ больше, и, что всего хуже, ни величина, указанная Ганзеномъ, ни истинная величина не совпадаютъ съ наблюденіями. Этому загадочному разногласію я и посвящу конецъ статьи.

Разсмотримъ сначала теоретическое выраженіе нашего разногласія. Мы можемъ себѣ представить только три возмущающія дѣйствія на движеніе луны. Это дѣйствія: солнца, планетъ и уклоненіе земли отъ сферической формы. Последнее обстоятельство не можетъ произвести никакого неравенства съ періодомъ болѣе продолжительнымъ, чѣмъ періодъ движенія узла лунной орбиты, потому что, вслѣдствіе суточного вращенія, дѣйствіе всякаго неравенства по долготѣ въ фигурѣ земли сводится къ нулю въ теченіе сутокъ. Дѣйствіе солнца вполне выяснено. Остается только дѣйствіе планетъ.

Проблема дѣйствія планетъ на луну является наиболѣе сложной изъ всѣхъ ясно поставленныхъ проблемъ небесной механики. Но со временъ Ганзена методы вычисленія этого дѣйствія настолько усовершенствованы глубокими изслѣдованіями Делонэ, Радо, Гилля и Броуна, что результаты, полученные этими методами, могутъ стоять внѣ всякаго сомнѣнія. Первое неравенство, указанное Ганзеномъ, является единственнымъ въ теоріи, которое имѣетъ длинный періодъ и большую амплитуду.

Важной особенностью этихъ наблюденныхъ уклоненій является то обстоятельство, что они кажутся скорѣе неправильными, чѣмъ періодическими. Говоря точнѣе, они не могутъ быть представлены однимъ или даже двумя періодическими членами. Правда, вводя членъ съ періодомъ приблизительно въ 250 лѣтъ, можно представить большую часть отклоненія, остальное же представляется совершенно неправильнымъ. Наиболѣе замѣчательныя колебанія происходятъ, начиная съ 1850 года. Начиная съ этой эпохи, среднее движеніе было ускоренное, и ускореніе продолжалось до 1864 года. Затѣмъ движеніе внезапно замедлилось такимъ образомъ, что въ періодъ 1864 — 1890 годовъ годовое движеніе по долготѣ было меньше на $1,5''$, чѣмъ оно было въ періодъ 1850 — 1864 г. Линейная скорость луны измѣнялась, соотвѣт-

ственно, на 2 — 3 километра въ годъ. Съ 1890 года направленіе этого движенія снова стало обратное.

Можно указать двѣ гипотезы для объясненія этихъ измѣненій; либо они реальны, либо же это только кажущіяся измѣненія, обусловливаемые, въ свою очередь, измѣненіемъ въ вращеніи земли. Точно такимъ же образомъ и замедленіе этого вращенія производитъ кажущееся увеличеніе вѣкового ускоренія. Чтобы окончательно остановиться на одной изъ этихъ гипотезъ, нужно имѣть вполнѣ независимое доказательство равномерности нашего измѣренія времени. Къ несчастью, мы не имѣемъ одного точнаго доказательства; лучшее изъ нихъ ни можетъ быть дано движеніемъ Меркурія. Прохожденія этой планеты по диску солнца, наблюденныя съ 1677 по 1907 гг., дѣйствительно указываютъ намъ на подобныя измѣненія, но ихъ величина меньше половины той, которая необходима для объясненія нашего явленія. Такимъ образомъ, можетъ казаться, что часть измѣненія реальна, а другая обязана своимъ существованіемъ измѣненіямъ во вращеніи земли. Не указываетъ ли это обстоятельство на то, что дѣйствіе луны на приливы и отливы измѣняется, и что совокупность этого дѣйствія съ противодѣйствіемъ, оказываемымъ приливами и отливами на луну, можетъ служить для объясненія нашего явленія? Оказывается,

однако, что это противодѣйствіе скорѣе должно замедлять, а не ускорять дѣйствительное движеніе луны. Мы вкратцѣ изложимъ теоріи этого дѣйствія и противодѣйствія.

1°. Если оставить въ сторонѣ дѣйствіе солнца, то движеніе приливовъ и отливовъ объясняется дѣйствіемъ луны.

2°. Это движеніе необходимо должно сопровождаться треніемъ.

3°. Это треніе влечетъ за собой уменьшеніе общей энергіи, кинетической и потенціальной, всей системы земля - луна.

4°. Моментъ количества движенія этой системы, или же количество

$$\int m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

остаётся неизмѣннымъ. Онъ дѣлится на двѣ рѣзкія части: моментъ земли и моментъ луны, обусловленный обращеніемъ вокругъ земли.

5°. Моментъ земли не можетъ быть измѣненъ никакими взаимодействіями ея частей, даже треніемъ. Для того, чтобы произошло измѣненіе, необходимо дѣйствіе пары силъ, происходящей отъ луны, а это можетъ быть только въ томъ случаѣ,

если приливы и отливы не симметричны по отношенію къ радіусу-вектору луны.

6°. Та же пара дѣйствуетъ и на луну такъ, что увеличеніе ея момента равняется уменьшенію момента земли.

7°. Вслѣдствіе того же противодѣйствія измѣняются среднее разстояніе и среднее движеніе луны такъ, что при неизмѣнности ихъ отношенія сумма кинетической и потенціальной энергій системы уменьшается на величину, равную тренію.

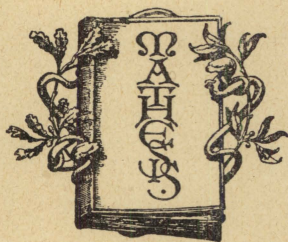
8°. Результатомъ всего вышеизложеннаго будетъ, по сѣру Дж. Дарвину (George Darwin), замедленіе на 3,6" нашего измѣренія времени на каждую 1" видимаго ускоренія средняго движенія луны, и обратно.

Эти теоретическія разсужденія, приложенныя къ нашей проблемѣ, не даютъ намъ тѣхъ измѣненій, которыя уже подмѣчены. Иначе говоря, для объясненія измѣненія средняго движенія луны дѣйствіемъ приливовъ и отливовъ нужно предположить измѣненіе почти въ 1' въ нашемъ измѣреніи времени за два столѣтія, слѣдующія за 1700 годомъ. Между тѣмъ прохожденія Меркурія указываютъ, что эти измѣненія не могутъ превысить нѣсколькихъ секундъ.

Послѣ всего приведеннаго кажется, что объясненіе лежащей передъ нами тайны является наиболѣе важной и интересной задачей небесной механики. Но это уже вопросъ, лежащій скорѣе въ границахъ небесной физики, чѣмъ математики въ виду этого я воздержусь отъ дальнѣйшаго его разъясненія.



<http://mathesis.ru>



<http://mathesis.ru>

Матезисъ

Книгоиздательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

Одесса, ул. Новосельскаго, 66.

Вышли въ свѣтъ слѣдующія изданія:

1 и 2. **Абрагамъ**, проф. СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ, составл. при участ. мног. проф. и преподав. физики. Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга*.

Часть I: XVI+272 стр. Со мног. (свыше 300) рис. Ц. 1 р. 50 к. *)

Часть II: LXXV+434 стр. со мног. (свыше 400) рис. Ц. 2 р. 75 к.

3. **С. Аррениусъ**, проф. ФИЗИКА НЕБА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. VIII+250 стр. Съ 68 рис. и 1 черн. и 1 цвѣтн. табл. Ц. 2 р. *)

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборн. статей о важн. откр. послѣдн. лѣтъ въ общедоступн. изд., подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физ. и Элемент. Матем.“. IV+144 стр. Съ 41 рис. и 2 табл. Изд. 2-е. Ц. 75 к. *)

5. **Ф. Ауэрбахъ**, проф. ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ. Общедоступн. изд. основаній ученія объ *энергіи и энтропії*. Пер. съ нѣм. Съ предисл. *Ш. Э. Гильома*. VIII+56 стр. Изд. 4-е. Ц. 40 к. *)

6. **С. Ньюкомъ**, проф. АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ. Пер. съ англ. Съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. XXIV+285 стр. Съ портр. автора, 64 рис. и 6 табл. Ц. 1 р. 50 к. *)

7. **Г. Веберъ и І. Вельштейнъ**. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. **Томъ I** ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ, обработ. проф. *Веберомъ*. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана*. Книга I.

*) Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

ОСНОВАНІЯ АРИѦМЕТИКИ. Книга II. АЛГЕБРА. Книга III. АНАЛИЗЪ. 650 стр. Ц. 3 р. 50 к. *)

8. **Дж. Перри**, проф. ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧЕКЪ. Публ. лекція. Пер. съ англ. VII+96 стр. 63 рис. Изд. 2-е. Ц. 60 к. *)

9. **Р. Дедекинлъ**, проф. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА. Пер. прив.-доц. *С. Шатуновскаго*, съ прил. его статьи: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНІЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ. Изд. 2-е. 40 стр. Ц. 40 к. *).

10. **К. Шейдъ**, проф. ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ ДЛЯ ЮНОШЕСТВА. Пер. съ нѣм. п. ред. лаб. Новорос. унив. *Е. С. Ельчанинова*. 192 стр. Съ 79 рис. Ц. 1 р. 20 к.

11. **Э. Вихертъ**, проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗИЮ. Лекціи для преподав. средн. учебн. заведеній. Пер. съ нѣм. 80 стр. Съ 41 рис. Ц. 35 к. *).

12. **В. Шмидъ**. ФИЛОСОФСКАЯ ХРИСТОМАТІЯ. Пособіе для средн. учебн. зав. и для самообраз. Пер. съ нѣм. п. ред. проф. *Н. Н. Ланге*. 170 стр. Ц. 1 р. *).

13. **С. Тромгольтъ**. ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. Со мн. рис. Ц. 50 к.

14. **А. Риги**, проф. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ. (Радиоактивность, іоны, электроны). Пер. съ 3-го (1907) итал. изд. XII+156 стр. 21 рис. Ц. 1 р. *).

15. **В. Ветгзмъ**, проф. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТІЕ ФИЗИКИ. Пер. съ англ. п. ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга* и *А. Р. Орбинскаго*. Съ прилож. рѣчи перваго-министра Англіи *A. J. Balfour*: НѢСКОЛЬКО МЫСЛЕЙ О НОВОЙ ТЕОРІИ ВЕЩЕСТВА. VIII+319 стр. Съ портр., 6 отд. табл. и 33 рис. Ц. 2 р. *).

16. **П. Лакуръ** и **Я. Аппель**. ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Матем.“. Въ двухъ томахъ. 880 стр. Съ 799 рис. и 6 отд. табл. Ц. 7 р. 50 к. *).

*) Учен. Ком. *М. Н. П.* признана заслуживающей вниманія при пополн. учен. библ. средн. учебн. заведеній.

17. **А. В. Клоссовскій**, проф. ФИЗИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ Изд. 2-е, испр. и доп. 45 стр. Ц. 40 к.

18. **С. А. Аррениусъ**. ОБРАЗОВАНИЕ МИРОВЪ. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. Имп. Юрьев. Унив. *К. Д. Покровскаго*. VIII+200 стр. Съ 60 рис. Ц. 1 р. 75 к.*).

19. **Н. Г. Ушинскій**, проф. ЛЕКЦИИ ПО БАКТЕРИОЛОГИИ. VIII+136 стр. Съ 34 рис. на 15 отд. табл. Ц. 1 р. 50 к.

20. **В. Ф. Каганъ**, прив.-доц. ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ. 35 стр. Съ 11 рис. Ц. 35 к.

21. **В. Циммерманъ**, проф. ОБЪЕМЪ ШАРА ШАРОВОГО СЕГМЕНТА и ШАРОВОГО СЛОЯ. 34 стр. Ц. 25 к.

22. **О. Леманъ**, проф. ЖИДКІЕ КРИСТАЛЛЫ и ТЕОРИИ ЖИЗНИ. Пер. съ нѣм. 48 стр. Съ 30 рис. Ц. 40 к.

23. **Г. Гейбергъ**, проф. НОВОЕ СОЧИНЕНИЕ АРХИМЕДА. Пер. съ нѣм. 44 стр. Ц. 40 к.*).

24. **А. Риги**, проф. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МАТЕРІИ. Пер. съ ит. 28 стр. Ц. 30 к.*).

25. **Г. Ковалевскій**, проф. ВВЕДЕНИЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНИЕ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. пр.-доц. *С. Шатуновскаго*. 8+140 стр. Съ 18 черт. Ц. 1 руб.*).

26. **Б. Вейнбергъ**, прив.-доц. СНѢГЪ, ИНЕИ, ГРАДЪ, ЛЕДЪ, и ЛЕДНИКИ IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. Ц. 1 руб.*).

27. **Томпсонъ Сильванусъ**. ДОБЫВАНІЕ СВѢТА. Общедоступная лекція. VIII+88 стр. Съ 28 рис. Ц. 60 к.*).

28. **А. Слаби**, проф. РЕЗОНАНСЪ и ЗАТУХАНІЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ. 42 стр. Съ 36 рис. Ц. 40 к

*) Учен. Ком. М. Н. П. признала заслуживающей вниманія при пополн. учен. библ. средн. учебн. заведеній.

29. **К. Снайдеръ**, КАРТИНА МИРА ВЪ СВѢТѢ СОВРЕМЕННАГО ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова*. VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отд. портрет. Ц. 1 р. 50 к.

30. **В. Рамзай**, проф. БЛАГОРОДНЫЕ и РАДИОАКТИВНЫЕ ГАЗЫ. Пер. подъ ред. *Вьстн Опытн Физ и Эл Мат* 37 стр. 16°. Съ 16 рис. Ц. 25 к.

31. **К Бруни**, проф. ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ. Пер. съ итал. подъ ред. *Вьстн. Опытн. Физ. и Эл. Матем.* 37 стр. 16°. Ц. 25 к.

32. **Р. С ВОЛЛЪ**, проф. ВѢКА и ПРИЛИВЫ, Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго* 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. Ц. 75 к.

33. **А. Слаби**, проф. БЕЗПРОВОЛОЧНЫЙ ТЕЛЕФОНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *Вьстн. Оп. Физ. и Эл. Матем.* 28 стр. 8°. Съ 23 рис. Ц. 30 к.

34. **Л. Кутюра**, АЛГЕБРА ЛОГИКИ. Пер. съ фр. съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго*. 128 стр. 8° Ц. 90 к.

Веберъ и Вельштейнъ, проф. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ. Т. II, кн. I. Основанія геометріи. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Ф. Кагана*. VIII+366 стр. 8°. Съ 144 черт. и 6 рис. Ц. 3 р.

36. **Ф. Линдеманъ**. ФОРМА и СПЕКТРЪ АТОМОВЪ. Рѣчь ректора Мюнхенск. унив. Перев. съ нѣм. 25 стр. 16°. Изд. 2-е. Ц. 15 коп.

37. **Г. Лоренцъ**, проф. КУРСЪ ФИЗИКИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина* Т. I. VIII+348 стр. Съ 236 рис. Ц. 2 р. 75 к. (Т. II печатается).

Имѣются на складѣ:

Д. Ефремовъ. НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. 334+XIII стр. Ц. 2 руб.

Ф. Мультонъ, проф. ЭВОЛЮЦІЯ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. 90 стр. съ 12 рис. Ц. 50 коп.

П Е Ч А Т А Ю Т С Я :

Ф. Неджори, проф. ИСТОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Переводъ. съ англійск. подъ ред. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко*.

А. Клоссовскій, проф. ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГИИ (учебникъ). Около 35 печатн. лист. больш. формата.

Сундара Роу. ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ СЪ КУСКОМЪ БУМАГИ Пер. съ англійскаго.

Дж. Дж. Томсонъ, проф. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ англ. подъ ред. *В. О. Ф. и Эл. Мат.*

Г. Пуанкаре, проф. НАУКА и МЕТОДЪ. Перев. съ франц. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана*.

Г. Ковалевскій, проф. КУРСЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЙ. Съ нѣм. подъ ред. *С. Шатуновскаго*.

В. Рамзай. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ФИЗИЧЕСКУЮ ХИМИЮ. Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова*.

Оствальдъ В., проф. НАТУРФИЛОСОФІЯ. Съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Л. Мандельштама*.

Веберъ и Вельштейнъ, проф. ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. **Томъ II**. кн. 2 и 3. ТРИГОНОМЕТРИЯ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ и СТЕРЕОМЕТРИЯ.

Г. Лоренцъ, проф. КУРСЪ ФИЗИКИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*. Т. II.

Подробный каталогъ изданій высылается по требованію бесплатно.

Выписывающіе изъ главнаго склада изданій „МАТЕЗИСЪ“ (Одесса, Новосельск., 66) на сумму 5 р. и болѣе за пересылку не платятъ.

Отдѣленіе склада для Москвы: Книжный магазинъ „Образованіе“, Москва, Кузнецкій мостъ, 11. Отдѣленіе склада для С-Петербурга: Книжный магазинъ **Г. С. Цукермана**, С-Петербургъ, Александр. пл., 5.

МАТ. 28
1 Р.

6128/8



Тип. Акц. Ю.-Р. Общ.
Печ. Дѣла. Одесса,
Пушкинская, № 18.

<http://mathesis.ru>
Цѣна 20 коп.