С. РОУ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ С КУСКОМ БУМАГИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
• • • ПОД РЕДАКЦИЕЙ • • •
Проф. А. Р. ОРБИНСКОГО

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

MATHESIS

ОДЕССА 1923

SUNDARA ROW

GEOMETRICAL EXERCISES IN PAPER-FOLDING

СУНДАРА РОУ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ С КУСКОМ БУМАГИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
• • • ПОД РЕДАКЦИЕЙ • • •
Проф. А. Р. ОРБИНСКОГО

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

С 87 РИС. И ЧЕРТЕЖ.

ОДЕССА 1923

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стран.:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
13	2 св.	COA	COA'
„	9 св.	OC	OC'
14	4 сн.	AC', $A'B'$	$AC'A'B'$
61	5 св.	и пересечение	или пересечение
65	3 св.	$ACBD$	$ACDB$
67	4-5 св.	старого	стороны
74	7 сн.	$\frac{AB_2}{B_1B_2} =$	$\frac{AB_2}{B_1A_2} =$
77	2 сн.	OD	CD
78	13 св.	$\frac{CE}{FE} =$	$\frac{CF}{FE} =$
90	3 св.	$= CR$	$= CA$
„	5 св.	$= OR$	$= OA$
100	7 сн.	BCA' и	$BC'A'$ и
121	1 и 2 сн.	$= AD \,.\, AE$	$= AD \,.\, AF$
		$= OA \,.\, AF$	$= OA \,.\, AE$

1-ая Гостип. им. К. Маркса, № 2028—3000 экз.
Р. О. П. (Одесса) № 859.

ВВЕДЕНИЕ

1. Идея этой книги была внушена мне упражнением No. VIII Фребелевского детского сада — складыванием бумаги. Для этого упражнения детям дают сотни две различно окрашенных бумажных квадратов, нож для разглаживания бумаги и наставления для складывания. Бумага с одной стороны окрашена и глазирована. Но она, конечно, может быть прокрашена насквозь и одинакова с обеих сторон. Да и всякая бумага умеренной толщины будет годиться для нашей цели. На цветной бумаге, однако, сгибы будут виднее, и она приятней для глаз. Упражнения для детских садов продаются во всех складах учебных пособий, а цветную бумагу обоих указанных сортов можно иметь в каждом писчебумажном магазине. Из всякого листа бумаги можно получить квадрат, как указано в первых параграфах этой книги, но полезно и удобно иметь квадраты уже заготовленными заранее, в нарезанном виде.

2. Для этих упражнений не требуется чертежных инструментов, и единственными необходимыми вещами являются перочинный нож и полоски бумаги — последние

для откладывания равных длин. Сами квадраты заменяют обыкновенную прямую и Т-образную линейку.

3. При складывании бумаги некоторые важные геометрические приемы можно выполнять гораздо легче, чем при помощи циркуля и линейки, единственных инструментов, применение которых освящено Евклидовой геометрией. Примерами могут служить деление отрезков и углов на две или на большее число равных частей, проведение перпендикуляров к прямым или линий, параллельных данным. Зато при помощи складывания бумаги нельзя описать окружность, хотя известное число точек круга, а также и других кривых, можно получить различными способами. Настоящие упражнения состоят не просто в черчении геометрических фигур, обыкновенно с прямыми линиями, и в сгибании по ним, но требуют осмысленного приложения простых приемов, где складывание бумаги особенно удобно. Это будет ясно с самого начала книги.

4. Эти упражнения детских садов не только дают интересное занятие мальчикам и девочкам, но подготовляют их ум к надлежащей оценке науки и искусства. С другой стороны, связав дальнейшее обучение науке и искусству с занятиями в детском саду, можно сделать их более интересными и заложить для них более прочное основание. Это особенно применимо к геометрии, лежащей в основе всякой науки и искусства. Широко пользуясь упражнениями детских садов, можно сделать школьное изучение геометрии на плоскости очень инте-

ресным. Было бы совершенно правильно требовать от учеников складывания этих чертежей на бумаге. Это давало бы им отчетливые и точные фигуры и невольно запечатлевало бы в их умах истины предложений. Ни одного утверждения не приходилось бы принимать на веру. Что теперь должны создавать воображение и идеализация плохих чертежей, то можно видеть конкретно. Тогда была бы невозможна ошибка вроде нижеследующей.

5. *Доказать, что всякий треугольник есть равнобедренный.* Пусть *ABC*, рис. 1, будет какой-нибудь

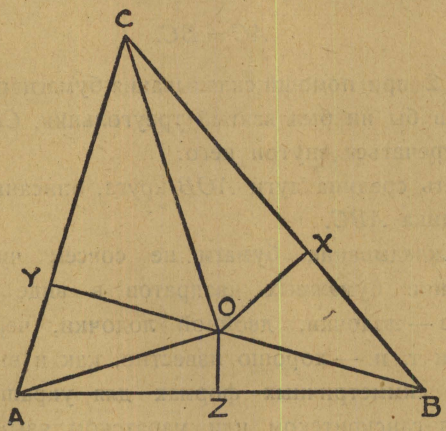

Рис. 1

треугольник. Разделите *AB* в *Z* пополам и чрез *Z* проведите *ZO* перпендикулярно к *AB*. Разделите угол *ACB* линией *CO* пополам.

1) Если CO и ZO не встречаются, они параллельны. Значит, CO перпендикулярно к AB. Поэтому $AC = BC$.

2) Пусть CO и ZO встречаются в какой-нибудь точке O. Проведите OX перпендикулярно к BC и OY перпендикулярно к AC. Соедините OA, OB. Согласно I, 26 Евклида треугольники YOC и XOC при наложении совпадают; согласно I, 47 и I, 8 Евклида треугольники AOY и BOX также при наложении совпадают. Следовательно,

$$AY + YC = BX + XC,$$

т. е.

$$AC = BC.$$

Рис. 2 при помощи складывания бумаги показывает, что, каков бы ни был взятый треугольник, CO и ZO не могут встречаться внутри него.

O есть средина дуги AOB круга, описанного около треугольника ABC.

6. Складывание бумаги не совсем чуждо нам. Складывание бумажных квадратов в виде различных предметов — лодочки, двойной лодочки, чернильницы, петушка и т. п. — хорошо известно, как и вырезывание бумаги в симметричных формах для украшений. При письме на санскритском или маратском языках бумага складывается вертикально или горизонтально, чтобы строки и столбцы выходили прямыми. При переписке бумаг в канцеляриях делают правильные поля, сгибая бумагу по вертикали. Вдвое сложенные прямоугольные

куски бумаги всегда были в употреблении для письма, и до введения обрезанной на машине почтовой бумаги и конвертов разных величин листы желаемого размера получались при помощи складывания и разрывания бо́льших листов; одна половина бумаги складывалась в

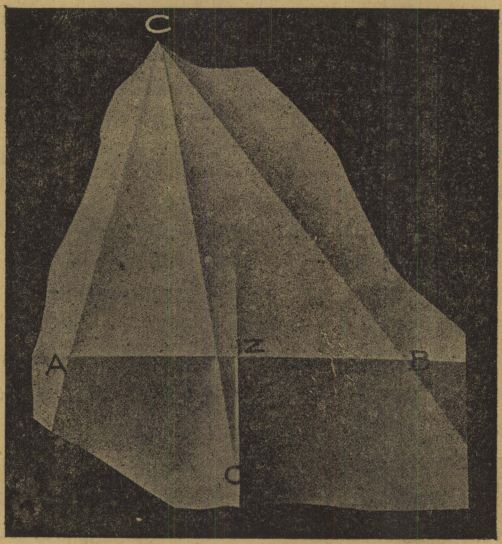

Рис. 2

конверт для другой половины. Последний прием сберегал бумагу и обладал очевидным преимуществом прикрепления почтовых знаков непосредственно к самой писанной бумаге. К складыванию бумаги прибегали и при изу-

чении XI книги Евклида, трактующей о фигурах трех измерений. Но им редко пользовались для плоских фигур.

7. Я не пытался написать полный трактат или руководство геометрии, а старался лишь показать, каким образом можно сложить или определить точками на бумаге правильные многоугольники, круги и другие кривые. Я пользовался случаем представить читателю некоторые хорошо известные задачи древней и современной геометрии и показать, как к геометрии можно с выгодой прилагать алгебру и тригонометрию; а это освещает каждый из этих предметов, обыкновенно предлагаемых отдельно.

8. Первые девять глав говорят о складывании правильных многоугольников, рассматриваемых в первых четырех книгах Евклида, и девятиугольника. В основу был положен бумажный квадрат детского сада, и при его помощи разрабатывались другие правильные многоугольники. Глава I показывает, как нужно делить основной квадрат и как можно складывать его в равные прямоугольные равнобедренные треугольники и в квадраты. Глава II занимается равносторонними треугольниками, построенными на одной из сторон квадрата. Глава III посвящена Пифагоровой теореме, предложениям второй книги Евклида и некоторым интересным задачам, связанным с ними. Здесь также показывается, каким образом на данном основании можно построить прямоугольный треугольник с заданной высотой. Это сводится к нахождению точек на некотором круге данного диаметра.

9. Глава X трактует об арифметической, геометрической и гармонической пропорции и о суммовании некоторых арифметических прогрессий. Говоря о пропорциях, мы берем отрезки, длины которых представляют возрастающую прогрессию. Прямоугольный кусок бумаги, расчерченный на квадратики, дает пример арифметической прогрессии. Для геометрической пропорции мы пользуемся теми свойствами прямоугольного треугольника, что перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу есть среднее геометрическое между отрезками гипотенузы, и что каждый из катетов есть среднее геометрическое между проекцией катета на гипотенузу и всей гипотенузой. В связи с этим излагается и Делосская задача об удвоении куба. В вопросе о гармонической пропорции прилагается свойство биссекторов внутреннего и соответственного внешнего углов треугольника делить противоположную сторону в отношении двух других сторон треугольника. Это дает интересный способ графического пояснения инволюционных систем. Суммы натуральных чисел и их кубов получаются графически и отсюда выводятся суммы некоторых других рядов.

10. В главе XI трактуется общая теория правильных многоугольников и определение числовой величины π. Предложения этой главы очень интересны.

11. Глава XII излагает некоторые общие начала, прилагавшиеся в предшествующих главах, — она касается равенства, симметрии и подобия фигур, пересечения прямых линий и коллинеарности точек.

12. Главы XIII и XIV заняты коническими сечениями и другими интересными кривыми. Между другими свойствами круга излагаются его гармонические свойства. Объясняются также теории инверсии и соосных кругов. В отношении других кривых показывается, каким образом при помощи складывания можно намечать на бумаге их точки. Дается история некоторых из кривых и показывается их приложение к решению классических задач нахождения двух геометрических средних для двух данных отрезков и деления данного плоского угла на три равные части. Хотя исследование свойств этих кривых требует более глубокого знания математики, но их получение легко понятно и интересно.

13. Я старался не только помочь изучению геометрии в школах, но и доставить математическое развлечение старому и малому в привлекательной и доступной форме. „Старые“ вроде меня найдут, может быть, эту книгу полезной для того, чтобы воскресить в памяти старые уроки и взглянуть на современное развитие того, и очень интересного, и поучительного, чем пренебрегли университетские преподаватели.

Т. Сундара Роу.

Мадрас, Индия, 1893.

I. Квадрат

1. Верхняя сторона куска бумаги, лежащего на ровном столе, есть плоская поверхность; плоскую поверхность представляет и нижняя сторона его, касающаяся стола.

2. Эти две поверхности разделены веществом бумаги. Так как вещество это очень тонко, то другие стороны бумаги не представляют заметной поверхности и практически являются линиями. Эти две поверхности, хотя и различны, неотделимы друг от друга.

3. Взгляните на кусок бумаги неправильной формы, показанный на рис. 3, и на эту страницу в форме прямоугольника. Попробуем дать первому форму последней.

4. Положите кусок бумаги неправильной формы на стол и сложите его вдвое. Пусть полученный таким образом сгиб будет $X'X$. Это прямая линия. Теперь проведите ножом по сгибу и отделите меньшую часть куска. Мы получим таким образом прямолинейный край.

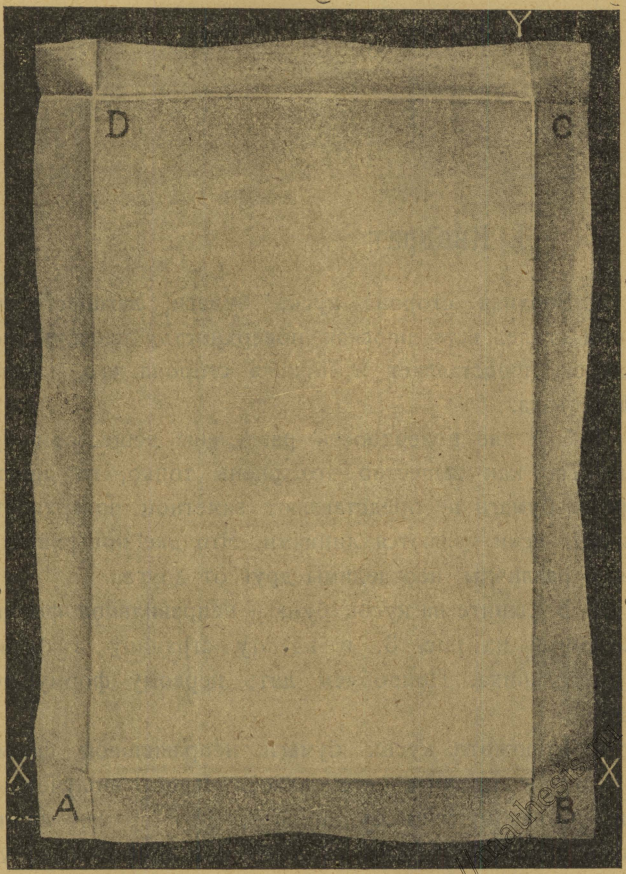

Рис. 3

5. Снова, как раньше, сложите бумагу по линии BY так, чтобы край $X'X$ накладывался на себя. Развернув бумагу, мы видим, что сгиб BY идет под прямым углом к краю $X'X$. Из наложения очевидно, что угол YBX' равен углу XBY и что каждый из этих углов равен углу страницы. Теперь, как раньше, проведите ножом по второй складке и удалите меньшую часть.

6. Повторите указанный прием и образуйте края CD и DA. Из наложения очевидно, что углы при A, B, C, D суть прямые, равные друг другу, и что стороны BC, CD соответственно равны сторонам DA, AB. Этот кусок бумаги (рис. 3) по форме подобен этой странице.

7. Его можно сделать равным странице по величине, взяв больший кусок бумаги и отмерив AB и BC равными сторонам последней.

8. Такая фигура называется прямоугольником. Наложение показывает, что 1) ее четыре угла суть прямые и равные, 2) четыре стороны не все равны, но 3) две длинные стороны равны между собой, а две короткие между собой.

9. Теперь возьмите прямоугольный кусок бумаги $A'B'CD$ и сложите его наискось так, чтобы одна из коротких сторон, CD, легла на одну из длинных, DA', как на рис. 4. Теперь сложите и удалите часть $A'B'BA$, которая выдается. Развернув лист, вы найдете, что $ABCD$ теперь есть квадрат, т. е. четыре угла полученной фигуры суть прямые, и все ее стороны равны.

10. Ребро сгиба, проходящее через два противоположных угла B, D, есть диагональ этого квадрата.

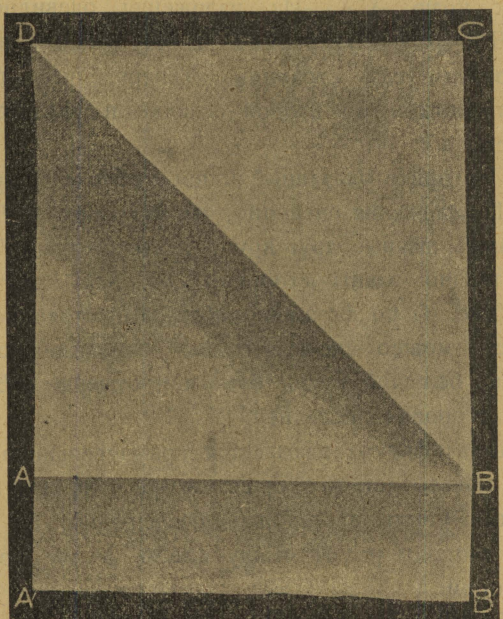

Рис. 4

Другая диагональ получится, если сложить квадрат через другую пару углов, как на рис. 5.

11. Мы видим, что диагонали пересекаются друг с

другом под прямыми углами и что они взаимно делятся пополам.

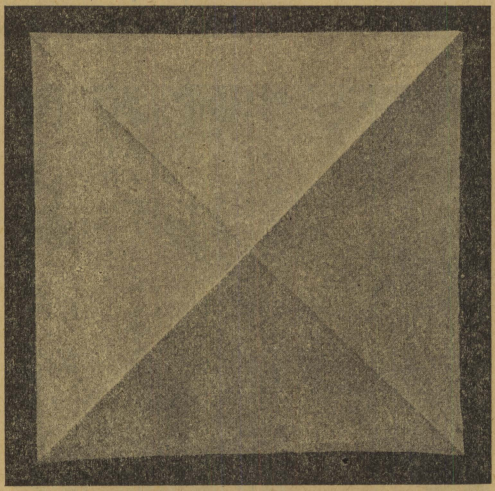

Рис. 5

12. Точка пересечения диагоналей называется центром квадрата.

13. Каждая диагональ делит квадрат на два совпадающих при наложении прямоугольных равнобедренных треугольника, вершины которых лежат в противоположных углах квадрата.

14. Две диагонали вместе разделяют квадрат на четыре совпадающих при наложении прямоугольных

равнобедренных треугольника с вершинами в центре квадрата.

15. Теперь снова сложите бумагу, как на рис. 6, наложив одну сторону квадрата на противоположную

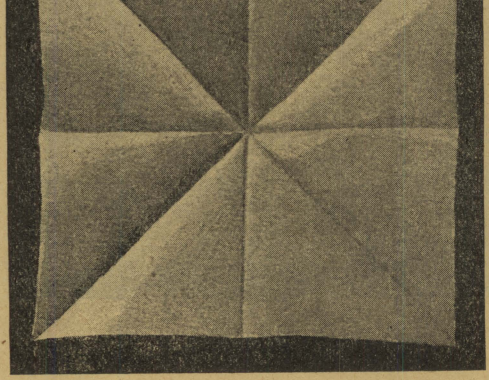

Рис. 6

ей. Мы получим сгиб, проходящий чрез центр квадрата. Он перпендикулярен к другим сторонам и 1) делит их пополам, 2) параллелен также первым двум сторонам, 3) сам делится центром пополам, 4) делит квадрат на два совпадающих при наложении прямоугольника, из которых каждый есть, следовательно, половина первого;

5) каждый из этих прямоугольников равновелик одному из треугольников, на которые квадрат делится каждой диагональю.

16. Еще раз сложим квадрат, налагая друг на друга

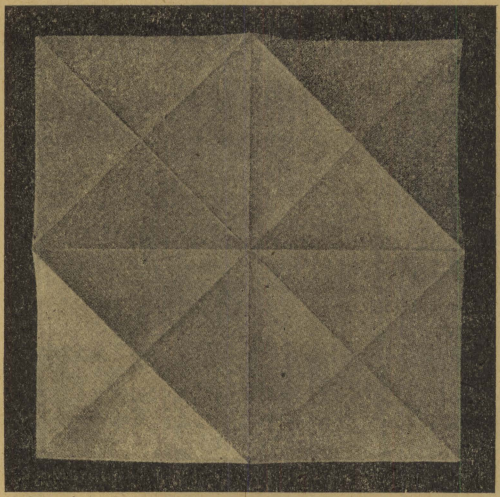

Рис. 7

две другие стороны. Получающийся теперь и упомянутый в § 15 сгибы делят квадрат на четыре совпадающих при наложении квадрата.

17. Снова сложив чрез те углы меньших квадратов, которые лежат на срединах сторон бóльшего квадрата, мы получаем квадрат, вписанный в предыдущий (рис. 7).

18. Этот квадрат равен половине большого и имеет тот же центр.

19. Соединив средины сторон внутреннего квадрата, мы получим квадрат, равный четверти первоначального

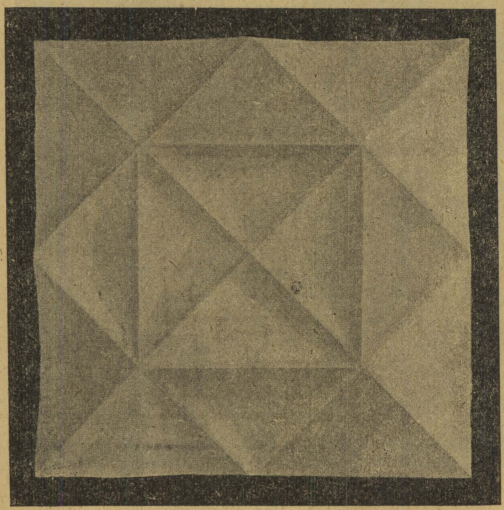

Рис. 8

(рис. 8). Повторяя этот прием, мы можем получить сколько угодно квадратов, относящихся друг к другу, как

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ и т. д., или $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$

Каждый такой квадрат равен половине ближайшего бо́льшего, т. е. четыре треугольника, остающиеся от этого бо́льшего, вместе равны половине его. Сумма всех этих треугольников, как бы мы ни увеличивали число их, не может быть больше первоначального квадрата и в конце концов составит его весь.

Следовательно,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\text{и т. д. до бесконечности}=1.$$

20. Центр квадрата есть центр его описанного и вписанного кругов. Последний круг касается сторон в их срединах, так как они ближе к центру, чем всякие другие точки на сторонах.

21. Всякий сгиб чрез центр квадрата делит его на две совпадающие при наложении трапеции. Второй сгиб чрез центр, под прямым углом к первому, разделяет его на четыре совпадающих при наложении четыреугольника, у которых два противоположных угла суть прямые. Эти четыреугольники концикличны, т. е. вершины каждого лежат на одной окружности.

II. Равносторонний треугольник

22. Теперь возьмите квадратный кусок бумаги (рис. 9) и сложите его вдвое, налагая два противоположные края один на другой. Мы получаем сгиб, проходящий чрез средины двух других сторон и перпендикулярный к

этим сторонам. Взяв какую-нибудь точку на этой линии, сложите чрез нее и два соседних, по обе стороны от нее, угла квадрата. Мы получим таким образом равнобедренный треугольник, в основании которого лежит сторона квадрата.

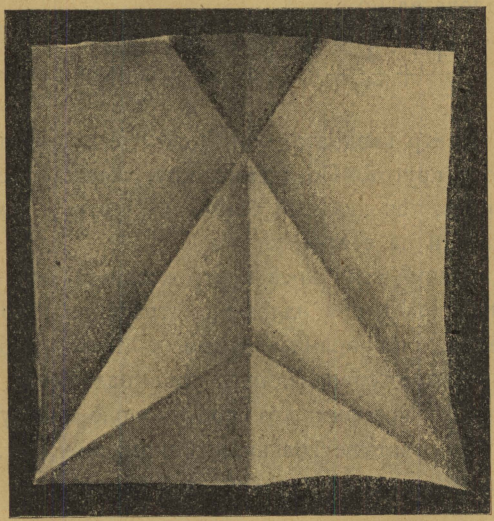

Рис. 9

23. Средняя линия разделяет равнобедренный треугольник на два совпадающих при наложении прямоугольных треугольника.

24. Угол при вершине делится пополам.

25. Если мы возьмем на средней линии такую точку, расстояния которой от двух углов квадрата равны его стороне, мы получим равносторонний треугольник (рис. 10). Эту точку легко определить, повертывая над AA' основание AB около одного из его

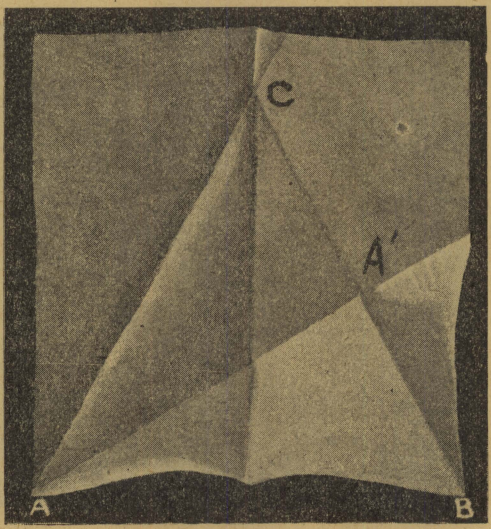

Рис. 10

концов, пока другой конец, B, не упадет на среднюю линию, в C.

26. Сложите равносторонний треугольник, накладывая каждую из сторон на основание. Мы получим

таким образом три высоты этого треугольника, именно AA', BB', CC' (рис. 11).

27. Каждая из высот разделяет треугольник на два сопадающих при наложении прямоугольных треугольника.

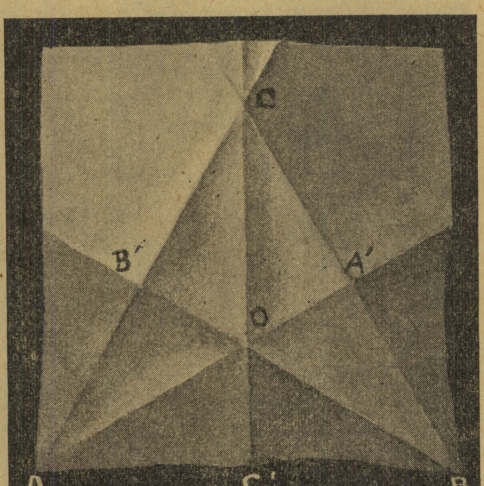

Рис. 11

28. Они делят стороны пополам и перпендикулярны к ним.

29. Они проходят чрез одну общую точку.

30. Пусть высоты AA' и CC' встречаются в O. Проведем BO и продолжим ее до встречи с AC в B'.

Теперь докажем, что BB' есть третья высота. Из треугольников $C'OA$ и COA, $OC' = OA'$. Из треугольников $OC'B$ и $A'OB$, $\angle OBC' = \angle A'BO$. Затем из треугольников ABB' и $CB'B$ следует, что $\angle AB'B = \angle BB'C$, т. е. каждый из них есть прямой угол. Значит, BOB' есть высота равностороннего треугольника ABC. Она также делит AC пополам в B'.

31. Можно, сходно с предыдущим, показать, что OA, OB и OC равны и что также равны OA', OB' и OC.

32. Поэтому из O, как центра, можно описать окружности, которые пройдут соответственно чрез A, B и C и чрез A', B' и C'. Последний круг касается сторон треугольника.

33. Равносторонний треугольник ABC делится на шесть совпадающих при наложении прямоугольных треугольников, углы которых при точке O все равны, и на три совпадающих при наложении, симметричных, концикличеcких четыреугольника.

34. Треугольник AOC равен удвоенному треугольнику $A'OC$; отсюда $AO = 2OA'$. Аналогично, $BO = 2OB'$ и $CO = 2OC'$. Значит, радиус круга, описанного около треугольника ABC, вдвое больше радиуса вписанного круга.

35. Прямой угол A квадрата делится линиями AO, AC на три равные части. Угол $BAC = \frac{2}{3}$ прямого угла. Углы $C'AO$ и OAB' равны $\frac{1}{3}$ прямого угла каждый. То же относится к углам при B и C.

36. Шесть углов при O равны $\frac{2}{3}$ прямого каждый.

37. Перегните бумагу по линиям $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ (рис. 12). В таком случае $A'B'C'$ есть равносторонний треугольник. Он равен четверти треугольника ABC.

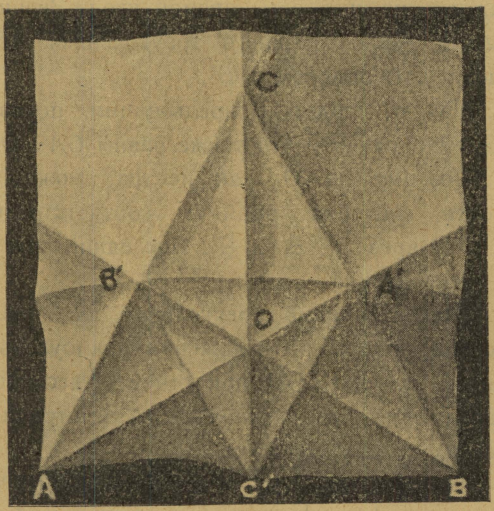

Рис. 12

38. $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ параллельны соответственно AB, BC, CA и равны половинам их.

39. AC', $A'B'$ есть ромб. $C'BA'B'$ и $CB'C'A'$ также.

40. $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ делят соответственные высоты пополам.

41. $CC'^2 + AC'^2 = CC'^2 + \frac{1}{4}AC^2 = AC^2$, следовательно, $CC'^2 = \frac{3}{4}AC^2$ и потому

$$CC' = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,AC = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,AB = 0{\cdot}866\ldots \times AB.$$

42. $\triangle ABC =$ прямоугольнику со сторонами, равными AC' и CC', т. е. $\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,AB = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,.\,AB^2 = 0{\cdot}433\ldots \times AB^2$.

43. Углы треугольника $AC'C$ относятся между собою, как $1:2:3$, а их стороны, как $\sqrt{1}:\sqrt{3}:\sqrt{4}$.

III. Квадраты и прямоугольники

44. Сложите данный квадрат, как указано на рис. 13. Это даст хорошо известное доказательство Пифагоровой теоремы. Так как FGH есть прямоугольный треугольник, то квадрат, построенный на FH, равен сумме квадратов на FG и GH.

$$\square FA + \square DB = \square FC.$$

Легко видеть, что FC есть квадрат и что треугольники FGH, HBC, KDC и FEK при наложении совпадают.

Если треугольники FGH и HBC отрезать от квадратов FA и DB и поместить на другие два треугольника, то составится квадрат $FHCK$.

Если $AB = a$, $GA = b$ и $FH = c$, то $a^2 + b^2 = c^2$.

45. Сложите данный квадрат согласно рис. 14. Здесь прямоугольники AF, BG, CH и DE при наложении

совпадают, как и треугольники, из которых они составлены. *EFGH* есть квадрат, как и *KLMN*.

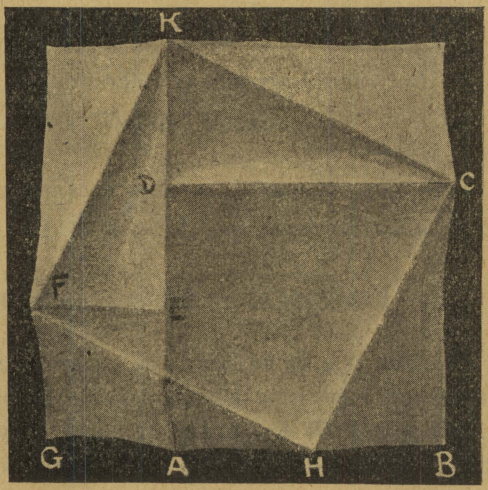

Рис. 13

Пусть

$$AK = a,\ KB = b \text{ и } NK = c;$$

в таком случае

$$a^2 + b^2 = c^2 = \square KLMN$$

и

$$\square ABCD = (a + b)^2.$$

Но квадрат *ABCD* превышает квадрат *KLMN* четырьмя треугольниками *AKN*, *BLK*, *CML* и *DNM*.

А эти четыре треугольника вместе равны двум прямоугольникам, т. е. $2ab$.

Значит,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

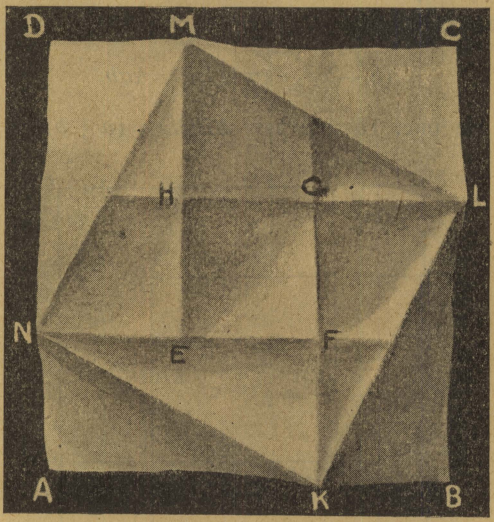

Рис. 14

46. $EF = a - b$ и $\square EFGH = (a-b)^2$.

Квадрат $EFGH$ меньше квадрата $KLMN$ на четыре треугольника FNK, GKL, HLM и EMN.

Но эти четыре треугольника составляют два прямоугольника, т. е. $2ab$.

Следовательно,

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

47. Квадрат $ABCD$ превышает квадрат $EFGH$ четырьмя прямоугольниками AF, BG, CH и DE.

Следовательно,

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

48 На рис. 15 квадрат $ABCD = (a+b)^2$ и квадрат

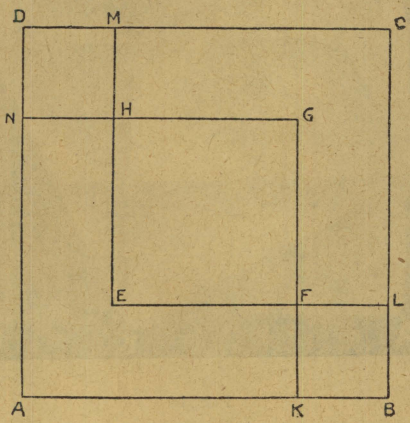

Рис. 15

$EFGH = (a-b)^2$. Также квадрат $AKGN$ = квадрату $ELCM = a^2$. Квадрат $KBLF$ = квадрату $NHMD = b^2$.

Квадраты $ABCD$ и $EFGH$ вместе равны четырем последним квадратам, сложенным вместе, или дважды

взятому квадрату $AKGN$ и дважды взятому квадрату $KBLF$, т. е. $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$.

49. На рис. 16 прямоугольник PL равен $(a+b)(a-b)$.

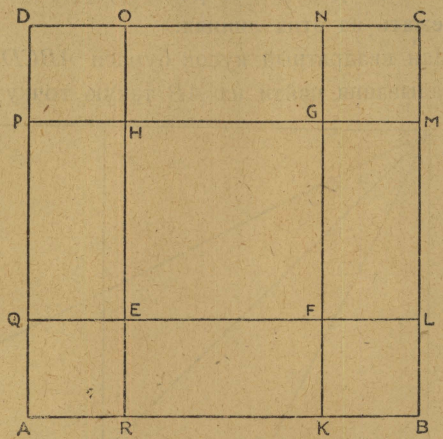

Рис. 16

Так как прямоугольник $EK=FM$, то прямоугольник $PL=$ квадрату $PK-$ квадрат AE, т. е.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

50. Если внутри данного квадрата построить квадраты, у которых был бы общим один из прямых углов данного квадрата, то линии, соединяющие вершину этого прямого угла со срединами противолежащих сторон данного квадрата, разделят соответственные стороны всех внутренних квадратов пополам (рис. 17). В самом деле, углы, образуемые этими линиями с

диагональю, равны, и их величина одна и та же для всех квадратов, в чем можно убедиться наложением. Следовательно, средины сторон внутренних квадратов должны лежать на этих линиях.

51. Дан квадратный кусок бумаги $ABCD$ (рис. 18); путем складывания найти на AB такую точку X, чтобы

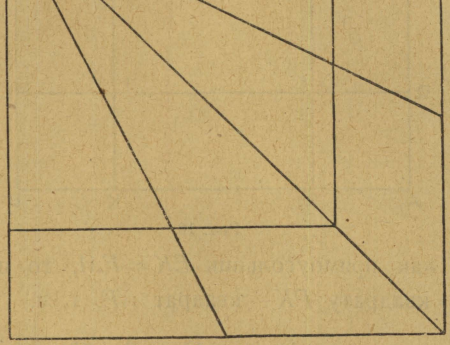

Рис. 17

прямоугольник $AB.XB$ был равновелик квадрату, построенному на AX.

Сложите BC пополам и возьмите средину E.

Наложите EB на ED и найдите EF и G такие, чтобы $EG = EB$.

Возьмите $AX = AG$.

В таком случае $AB.XB = AX^2$.

Дополните прямоугольник $BCHX$ и квадрат $AXKL$. Пусть XH пересекает EA в M. Возьмите $FY = FB$. В таком случае $FB = FG = FY = XM$ и $XM = \frac{1}{2}AX$.

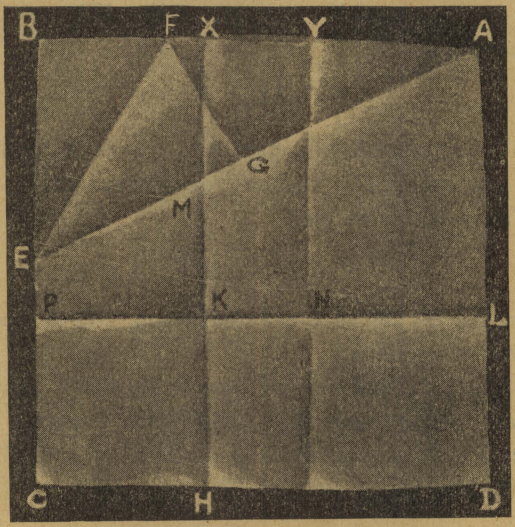

Рис. 18

Но так как BY делится точкой F пополам и точка A лежит на продолжении BY, то

$$AB.AY + FY^2 = AF^2, \text{ по § 49,}$$
$$= AG^2 + FG^2, \text{ по § 44.}$$

Следовательно,

$$AB.AY = AG^2 = AX^2.$$

Но

$$AX^2 = 4XM^2 = BY^2.$$

Следовательно,

$$AX = BY \quad \text{и} \quad AY = XB.$$

Отсюда

$$AB.XB = AX^2.$$

В этом случае говорят, что точка X делит отрезок AB в среднем и крайнем отношении[1]).

Таким же образом

$$AB.AY = BY^2,$$

т. е. точка Y также делит отрезок AB в среднем и крайнем отношении.

52. Из F, как центра, можно описать окружность, которая пройдет чрез B, G и Y. Она коснется EA в G, так как FG есть кратчайшее расстояние F от линии EGA.

53. Так как

$$BH = BN,$$

то, отнимая BK, мы получаем:
прямоугольник $XKNY$ = квадрату $CHKP$
или

$$AX.YX = AY^2,$$

---

[1]) Это деление называют также „золотым делением“, *aurea sectio*.

т. е. AX делится точкой Y в среднем и крайнем отношении.

Подобным же образом BY делится в среднем и крайнем отношении в точке X.

54. Так как

$$AB.XB = AX^2,$$

то

$$3AB.XB = AX^2 + BX.BC + CD.CP = AB^2 + BX^2.$$

55. Так как каждый из прямоугольников BH и YD равен $AB.XB$, то прямоугольник HY + квадрат $CK = AX^2 = AB.XB$.

56. Отсюда прямоугольник HY = прямоугольнику BK, т. е. $AX.XB = AB.XY$.

57. Отсюда прямоугольник $HN = AX.XB - BX^2$.

58. Пусть

$$AB = a, \quad XB = x.$$

В таком случае

$$(a - x)^2 = ax, \text{ по § 51.}$$

$$a^2 + x^2 = 3ax, \text{ по § 54;}$$

отсюда

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

и

$$x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Значит,

$$x^2 = \frac{a^2}{2}(7 - 3\sqrt{5})$$

и

$$a - x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = a \times 0{\cdot}618\,0\ldots$$

и

$$(a - x)^2 = \frac{a^2}{2}(3 - \sqrt{5}) = a^2 \times 0{\cdot}381\,9\ldots$$

Прямоугольник

$$BPKX = (a - x)x = a^2(\sqrt{5} - 2) = a^2 \times 0{\cdot}236\,0\ldots$$

$$EA^2 = 5EB^2 = \frac{5}{4}AB^2.$$

$$EA = \frac{\sqrt{5}}{2}AB = 1{\cdot}118\,0\cdots \times a.$$

59. На языке пропорций

$$AB : AX = AX : XB.$$

60. Пусть X делит AB в среднем и крайнем отношении. Постройте прямоугольник $CBXH$ (рис. 19). Разделите прямоугольник пополам линией MNO. Найдите точку N, повернув XA около X так, чтобы A упала на MO, и сделайте сгибы XN, NB и NA. Тогда BAN

есть равнобедренный треугольник, у которого углы ABN и BNA вдвое больше угла NAB.

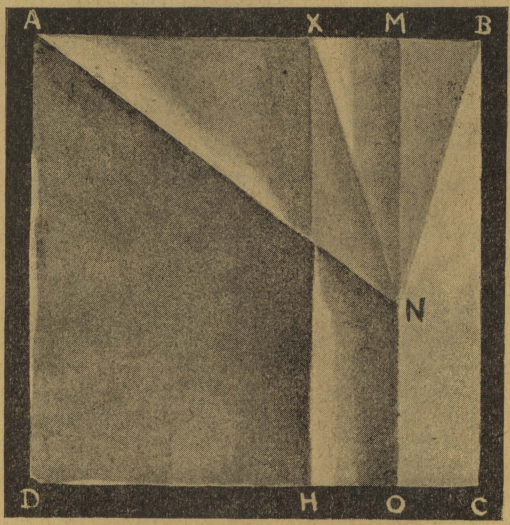

Рис. 19

$$AX = XN = NB$$

$$\angle ABN = \angle NXB$$

$$\angle NAX = \angle XNA$$

$$\angle NXB = 2 \angle NAX$$

$$\angle ABN = 2 \angle NAB.$$

$$\begin{aligned} AN^2 &= MN^2 + AM^2 \\ &= BN^2 - BM^2 + AM^2 \\ &= AX^2 + AB \,.\, AX \\ &= AB \cdot XB + AB \cdot AX \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

Отсюда

$$AN = AB$$

и

$$\angle NAB = \frac{2}{5} \text{ прямого угла.}$$

61. Прямой угол в A можно разделить на пять

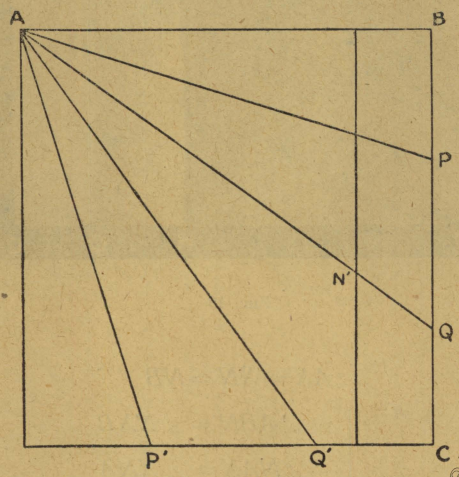

Рис. 20

равных частей, как на рис. 20. Здесь N' находится

согласно § 60. Затем сделайте сгиб $AN'Q$, разделите перегибом $\angle QAB$ пополам, сложите по диагонали AC и таким образом получите точки Q', P'.

62. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе AB и высоте.

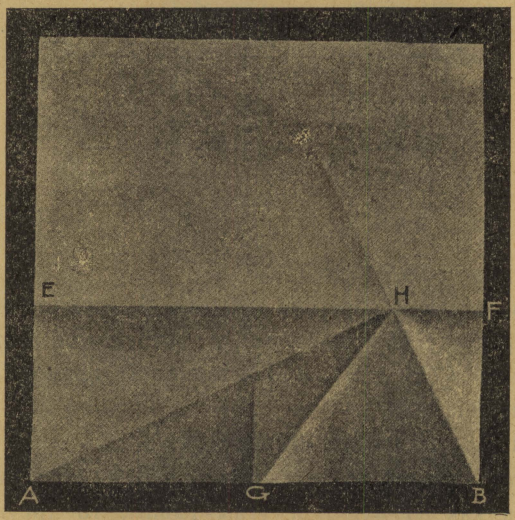

Рис. 21

Сделайте сгиб EF (рис. 21) параллельно AB на расстоянии заданной высоты.

Возьмите G, средину AB. Найдите H, перегнув GB около G так, чтобы B упало на EF.

Сделайте сгибы чрез H и A, G и B.

AHB есть искомый треугольник.

63. $ABCD$ (рис. 22) есть прямоугольник. Требуется найти равновеликий ему квадрат.

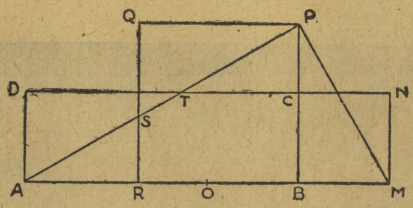

Рис. 22

Отмерьте $BM = BC$.

Посредством перегиба найдите O, средину AM.

Перегните OM около точки O так, чтобы M упала на линию BC; это даст вершину P прямоугольного треугольника AMP.

На PB постройте квадрат $BPQR$.

Этот квадрат равен данному прямоугольнику.

Так как $BP = PQ$ и углы равны, то треугольник BMP при наложении, очевидно, совпадает с треугольником QSP.

Следовательно, $QS = BM = AD$.

Значит, треугольники DAT и QSP при наложении совпадают. Поэтому $PC = SR$, и треугольники RSA и CPT при наложении совпадают.

Таким образом □ $ABCD$ можно разделить на три части, которые можно сложить вместе в квадрат $RBPQ$.

64. Возьмите четыре равных квадрата и разрежьте каждый из них на две части линией от средины одной из сторон к вершине одного из противолежащих углов. Возьмите еще один такой же квадрат. Полученные восемь частей квадратов можно расположить около целого так, чтобы все вместе составило полный квадрат,

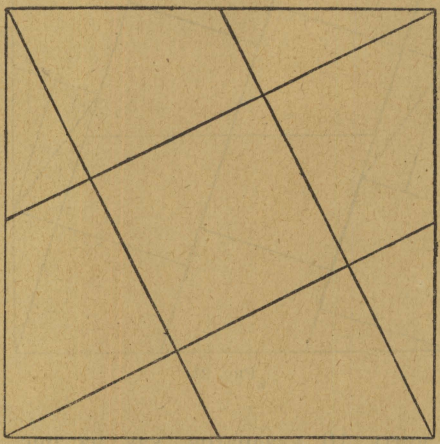

Рис. 23

как на рис. 23. Это складывание представляет интересную задачу.

Пятый квадрат также можно, конечно, разрезать на две части, что еще усложнит складывание.

65. Можно предложить сходные задачи, разрезая квадраты чрез один из углов и одну из точек, делящих противоположную сторону на три части, как на рис. 24.

66. Если брать более близкие между собою точки,

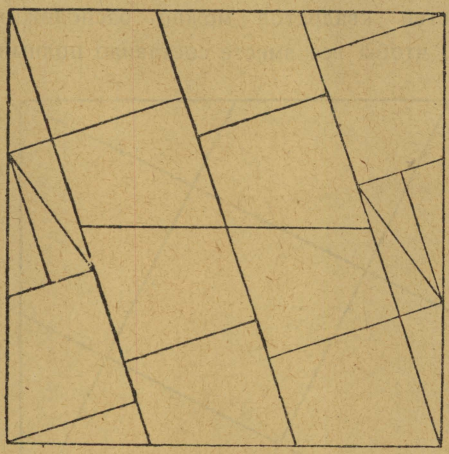

Рис. 24

то нужно взять 10 квадратов, как на рис. 24; если более дальние, то 13, как на рис. 25.

67. Задачи, предложенные в §§ 65, 66, основаны на формулах

$$1^2 + 2^2 = 5$$
$$1^2 + 3^2 = 10$$
$$2^2 + 3^2 = 13.$$

Этот прием можно продолжить дальше, но число квадратов становится слишком неудобным по своей значительности.

68. Снова рассмотрите рис. 13 в § 44. Если удалить четыре треугольника по углам данного там квадрата,

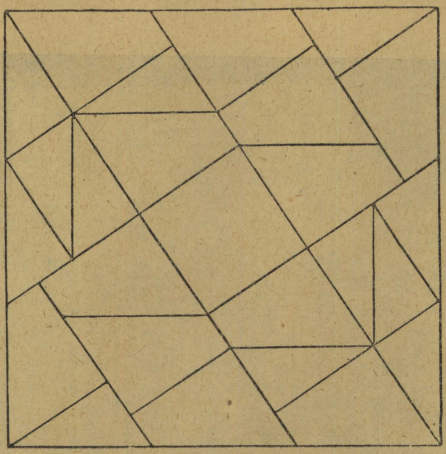

Рис. 25

то останется квадрат. Если удалить два прямоугольника FK и KC, то останутся два соприкасающихся квадрата.

69. Данный квадрат можно разрезать на части, которые можно сложить в два квадрата. Есть несколько способов для этого. Рис. 23 в § 65 наводит на следующий изящный метод: требуемые куски суть (1) квадрат в центре и (2) четыре симметричных, при

наложении совпадающих четыреугольника у углов, вместе с четырьмя треугольниками. На этом рисунке линии проходят от средин сторон к вершинам углов данного квадрата, и средний квадрат равен одной пятой его. Величину среднего квадрата можно изменять, если

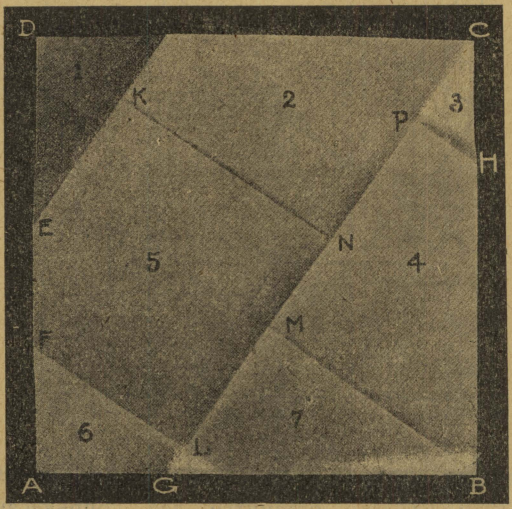

Рис. 26

вместо углов на сторонах данного квадрата брать другие точки.

70. Данный квадрат можно разделить на три равных квадрата следующим образом (рис. 26):

Возьмите BG = половине диагонали квадрата.

Сделайте сгиб чрез C и G.

Сделайте сгиб BM перпендикулярно к CG.

Возьмите MP, CN и NL каждый $= BM$.

Сделайте сгибы PH, NK, LF под прямыми углами к CG, как на рис. 26.

Возьмите $NK = BM$ и перегните по KE под прямым углом к NK.

В таком случае куски 1, 4 и 6, 3 с 5, и 2 с 7 образуют три равных квадрата.

Теперь

$$CG^2 = 3BG^2,$$

а из треугольников GBC и CMB

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{CG}.$$

Полагая $BC = a$, мы имеем

$$BM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

IV. Пятиугольник

71. Из квадрата $ABCD$ вырезать правильный пятиугольник.

Разделите BA в крайнем и среднем отношении точкой X и возьмите M посредине AX.

Тогда $AB.AX = XB^2$ и $AM = MX$.

Возьмите $BN = AM$ или MX.

Тогда $MN = XB$.

Отложите NP и MR равными MN так, чтобы P и R лежали соответственно на BC и AD.

Отложите RQ и $PQ = MR$ и NP.

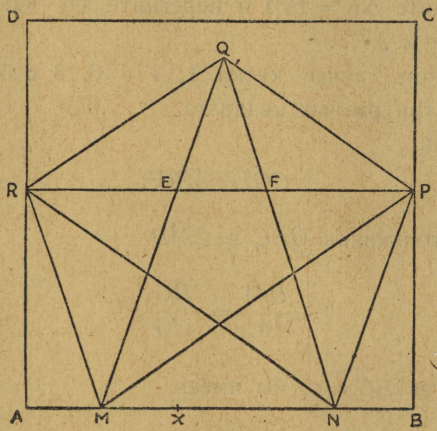

Рис. 27

$MNPQR$ есть искомый пятиугольник.

На рис. 19, стр. 25, отрезок AN, равный AB, имеет точку N на перпендикуляре MO. Если передвинуть A по AB на расстояние MB, то, очевидно, N передвинется на BC и X в M.

Поэтому, на рис. 27, $NR = AB$. Аналогично $MP = AB$. Следовательно, RP равно AB и параллельно ему.

$$\angle RMA = \tfrac{4}{5} \text{ прямого } \angle$$

и потому

$$\angle NMR = \tfrac{6}{5} \text{ прямого } \angle.$$

Аналогично

$$\angle PNM = \tfrac{6}{5} \text{ прямого } \angle.$$

Из треугольников MNR и QPR получается, что

$$\angle NMR = \angle RQP = \tfrac{6}{5} \text{ прямого } \angle.$$

Так как каждый из трех углов M, N и Q пятиугольника равен $\frac{6}{5}$ прямого угла, то остальные два угла вместе равны $^{12}/_{5}$ прямого угла, и кроме того они равны. Следовательно, каждый из них равен $\frac{6}{5}$ прямого угла.

Значит, все углы этого пятиугольника равны.

Стороны этого пятиугольника также равны, по построению.

72. Основание MN пятиугольника равно XB, т. е. равно $\frac{AB}{2}(\sqrt{5}-1) = AB \times 0 \cdot 6180\ldots$, § 58.

Наибольшая ширина пятиугольника есть AB.

73. Если p будет высота, то

$$AB^2 = p^2 + \left[\frac{AB}{4}(\sqrt{5}-1)\right]^2 = p^2 + AB^2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

Отсюда

$$p^2 = AB^2\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right) = AB^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

И

$$p = AB \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = AB \times 0.951\,0\ldots = AB \cos 18^0.$$

74. Если R будет радиус описанного круга, то

$$R = \frac{AB}{2\cos 18^0} = \frac{2AB}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$$

$$= AB\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = AB \times 0 \cdot 525\,7\ldots$$

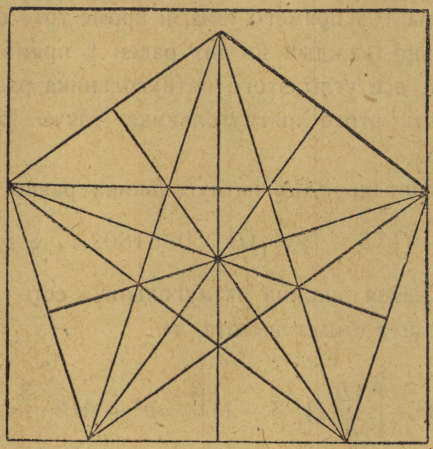

Рис. 28

75. Если через r обозначить радиус вписанного круга, то из рис. 28 можно будет вывести следующие

соотношения:

$$r = p - R = AB\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} - AB\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} =$$

$$= AB.\sqrt{5+\sqrt{5}}\left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{20}}\right) =$$

$$= AB.\sqrt{5+\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{40}}\right] =$$

$$= AB.\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}} = AB \times 0 \cdot 425\,3\ldots$$

76. Площадь пятиугольника есть $5r \times \frac{1}{2}$ основания пятиугольника, т. е.

$$5AB.\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}} \cdot \frac{AB}{4} \cdot (\sqrt{5}-1) =$$

$$= AB^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = AB^2 \times 0 \cdot 657\,1\ldots$$

77. Пусть точки пересечения PR с MQ и NQ будут, на рис. 27, E и F.

Но так как

$$MN = \frac{AB}{2} \cdot (\sqrt{5}-1)\ldots, \text{ § } 72,$$

и

$$\cos 36^0 = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AB.(\sqrt{5}-1)}$$

то

$$RE = FP = \frac{MN}{2} \cdot \frac{1}{\cos 36^0} = AB \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \tag{1}$$

$$= AB \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$$EF = AB - 2RE = AB - AB(3-\sqrt{5}) = \tag{2}$$

$$= AB(\sqrt{5}-2).$$

$$RF = MN.$$

$$RF : RE = RE : EF \text{ (по § 51).} \tag{3}$$

$$(\sqrt{5}-1) : (3-\sqrt{5}) = (3-\sqrt{5}) : 2(\sqrt{5}-2) \tag{4}$$

По § 76 площадь пятиугольника

$$= AB^2 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} =$$

$$= MN^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} =$$

$$= MN^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{25+10\sqrt{5}},$$

так как

$$AB = MN \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Значит, площадь внутреннего пятиугольника

$$= EF^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} =$$

$$= AB^2 \cdot (\sqrt{5} - 2)^2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

Больший пятиугольник относится к меньшему, как

$$MN^2 : EF^2 = 2 : (7 - 3\sqrt{5}) = 1 : 0 \cdot 145\,898\ldots$$

78. Если на рис. 27 взять углы QEK и LFQ равными углам ERQ или FQP, причем точки K, L лежат на сторонах QR и QP соответственно, то $EFLQK$ будет правильный пятиугольник, при наложении совпадающий с внутренним пятиугольником. Таким же образом можно построить пятиугольники и на остальных сторонах внутреннего пятиугольника. Получающаяся фигура из шести пятиугольников очень интересна.

V. Шестиугольник

79. Вырезать из данного квадрата правильный шестиугольник.

Сложите квадрат чрез средины противоположных сторон и получите линии AOB и COD.

На двух отрезках AO и OB постройте равносторонние треугольники (§ 25) AOE, AHO; BFO и BOG.

Проведите EF и HG.

$AHGBFE$ будет правильный шестиугольник.

Нет необходимости приводить доказательство этого. Наибольшая ширина шестиугольника будет AB.

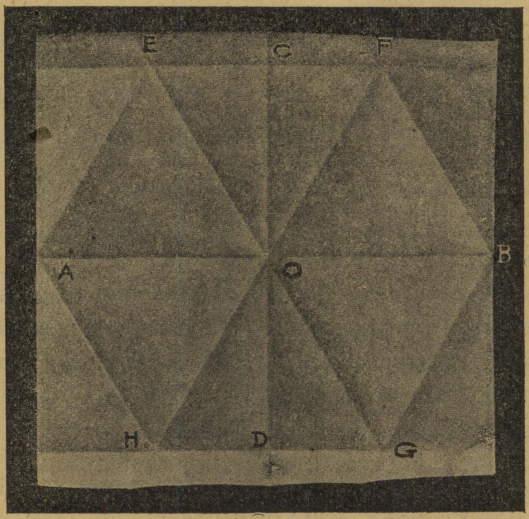

Рис. 29

80. Высота шестиугольника будет

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = 0 \cdot 866 \ldots \times AB.$$

81. Если R есть радиус описанного круга, то

$$R = \frac{1}{2} AB.$$

82. Если r есть радиус вписанного круга, то

$$r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB = 0 \cdot 433 \ldots \times AB.$$

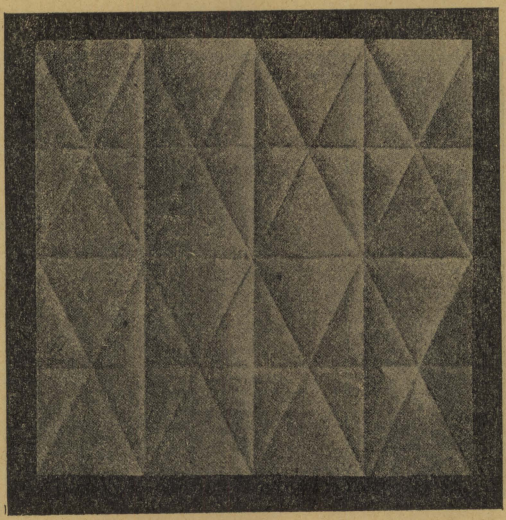

Рис. 30

83. Площадь шестиугольника равна 6 площадям треугольника HGO:

$$6 \cdot \frac{AB}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} AB = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot AB^2 = 0 \cdot 6495 \ldots \times AB^2.$$

Следовательно, шестиугольник $= \frac{3}{4} AB \cdot CD$ или в $1\frac{1}{2}$ раза больше равностороннего треугольника, построенного на AB.

84. Рис. 30 представляет пример орнамента из равносторонних треугольников и шестиугольников.

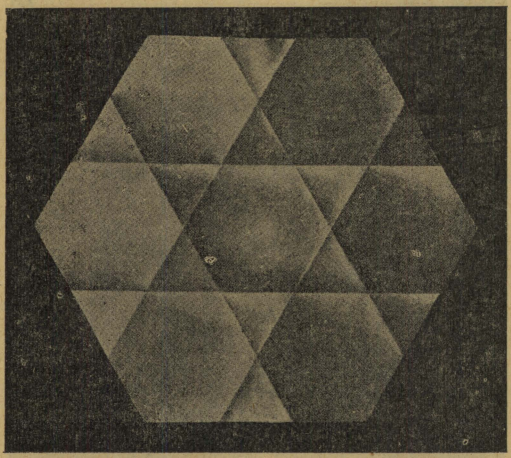

Рис. 31

85. Образуйте шестиугольник из равностороннего треугольника, перегнув его так, чтобы вершины сошлись в центре.

Сторона этого шестиугольника равна $\frac{1}{3}$ стороны взятого равностороннего треугольника.

Площадь этого шестиугольника $= \frac{2}{3}$ площади взятого треугольника.

86. Шестиугольник можно разделить на равные правильные шестиугольники и равносторонние треугольники, как показывает рис. 31, делая перегибы чрез точки, делящие стороны на три равные части.

VI. Восьмиугольник

87. В данном квадрате построить правильный восьмиугольник.

В данный квадрат впишите другой квадрат, соединив средины A, B, C, D сторон данного.

Разделите пополам углы между сторонами данного и вписанного квадратов. Пусть эти биссектрисы пересекаются в E, F, G и H.

$AEBFCGDH$ будет правильный восьмиугольник.

Треугольники AEB, BFC, CGD и DHA равнобедренные и при наложении совпадают. Следовательно, стороны полученного восьмиугольника равны.

Каждый из углов при вершинах E, F, G, H тех же треугольников равен полутора прямым углам, так как их углы при основании равны четверти прямого угла каждый.

Следовательно, каждый из углов восьмиугольника при точках A, B, C, D равен полутора прямым углам.

Значит, все углы нашего восьмиугольника равны между собою.

Наибольшую ширину восьмиугольника представляет сторона данного квадрата a.

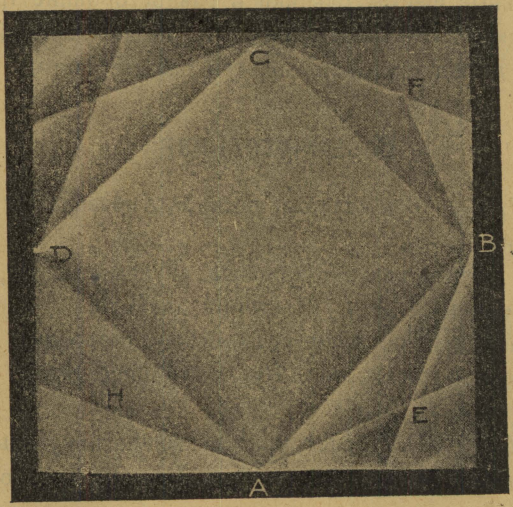

Рис. 32

88. Если R есть радиус описанного круга, а a сторона взятого квадрата, то

$$R = \frac{a}{2}.$$

89. Каждая сторона стягивает угол при центре равный половине прямого.

90. Проведите радиус OE; пусть он пересекает AB в точке K (рис. 33). Тогда

$$AK = OK = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

$$KE = OA - OK = \frac{a}{2} - \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{4} \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

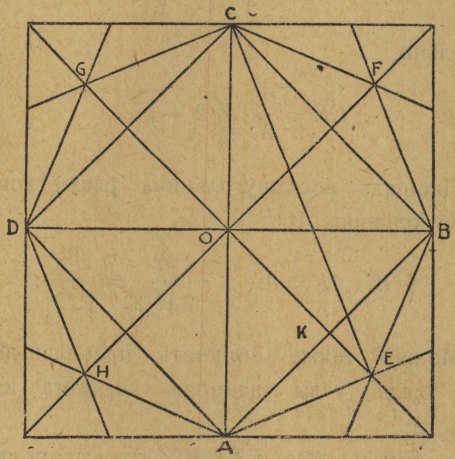

Рис. 33

Но из треугольника AEK имеем:

$$AE^2 = AK^2 + KE^2 = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} \cdot (3 - 2\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{a^2}{8} \cdot (4 - 2\sqrt{2}) = \frac{a^2}{4} \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

Следовательно,

$$AE = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

91. Высота восьмиугольника есть CE (рис. 33). Но

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \cdot (2 - \sqrt{2}) = \frac{a^2}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}).$$

Следовательно,

$$CE = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

92. Площадь восьмиугольника равна восьми площадям треугольника AOE и

$$4OE \,.\, AK = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

93. Можно также получить правильный восьмиугольник, деля углы данного квадрата на четыре равные части.

Легко видеть, что $EZ = WZ = a$, стороне данного квадрата.

$$XZ = a\sqrt{2};$$

$$XE = a(\sqrt{2} - 1);$$

$$XE = WH = WK;$$

$$KX = a - a(\sqrt{2} - 1) = a(2 - \sqrt{2}).$$

Но

$$KZ^2 = a^2 + a^2(\sqrt{2}-1)^2 = a^2(4-2\sqrt{2}).$$

Следовательно,

$$KZ = a\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$GE = XZ - 2XE = a\sqrt{2} - 2a(\sqrt{2}-1) = a(2-\sqrt{2}).$$

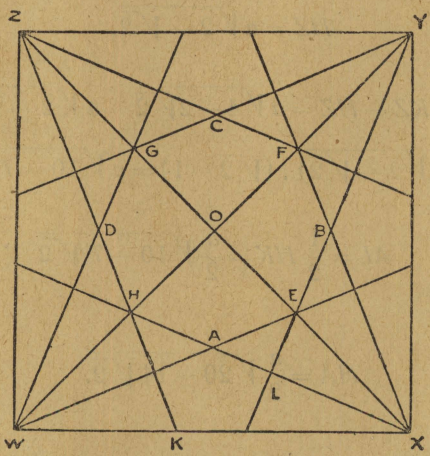

Рис. 34

Следовательно,

$$HO = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2}).$$

Затем

$$OZ = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

и

$$HZ^2 = HO^2 + OZ^2 = \frac{a^2}{4}(6 - 4\sqrt{2} + 2) = a^2(2 - \sqrt{2}).$$

Следовательно,

$$HZ = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$HK = KZ - HZ = a\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - a\sqrt{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= a\,.\,(\sqrt{2 - \sqrt{2}})\,.\,(\sqrt{2} - 1) = a\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}.$$

$$AL = \frac{1}{2}HK = \frac{a}{2}\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$$

и

$$HA = \frac{a}{2}\sqrt{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Деля стороны восьмиугольника пополам и соединяя полученные таким образом точки с центром, мы разделим перигон (= 4 прямым) на шестнадцать равных частей. Таким образом можно легко построить 16-угольник, затем 32-угольник и вообще правильный 2^n-угольник.

94. Площадь восьмиугольника равна восьми площадям треугольника HOA, т. е. равна

$$8 \cdot \tfrac{1}{2} HO \cdot \frac{HO}{\sqrt{2}} = HO^2 . 2\sqrt{2} = \left[\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})\right]^2 2\sqrt{2} =$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot 2\sqrt{2} . (6 - 4\sqrt{2}) = a^2 . (3\sqrt{2} - 4) =$$

$$= a^2 . \sqrt{2} \ (\sqrt{2} - 1)^2.$$

95. Отношение этого восьмиугольника к восьмиугольнику § 92

$$= (2-\sqrt{2})^2 : 1 \text{ или } 2 : (\sqrt{2}+1)^2;$$

их основания относятся между собою, как

$$\sqrt{2} : (\sqrt{2}+1).$$

VII. Девятиугольник

96. При помощи складывания бумаги можно довольно точно разделить угол на три равные части и таким путем построить приблизительно правильный девятиугольник.

Получите три равных угла при центре равностороннего треугольника (§ 25).

Для удобства складывания вырежьте эти три угла AOF, FOC и COA.

Разделите каждый из них на три части, как на рис. 35, и отложите на их сторонах отрезки $= OA$.

97. Каждый из углов девятиугольника равен $^{14}/_{9}$ прямого угла или 140^0.

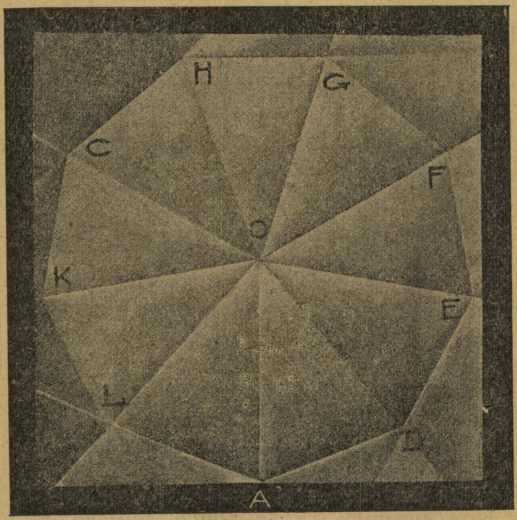

Рис. 35

Каждая сторона девятиугольника стягивает угол при центре в $\frac{4}{9}$ прямого угла или 40^0.

Половина этого угла есть $\frac{1}{7}$ угла девятиугольника.

98. $OA = a : 2$, где a есть сторона квадрата; она есть также радиус описанного круга R.

Радиус вписанного круга

$$R.\cos 20^0 = \tfrac{1}{2}a.\cos 20^0 = \frac{a}{2} \times 0\cdot 9396926 = a \times 0\cdot 4698463.$$

Площадь девятиугольника равна девяти площадям треугольника AOL и $= 9.R.\tfrac{1}{2}R.\sin 40^0 = \tfrac{9}{2}R^2.\sin 40^0 =$

$$= \frac{9a^2}{8} \times 0\cdot 642\,787\,6 = a^2 \times 0\cdot 723\,136.$$

VIII. Десятиугольник и двенадцатиугольник

99. Рис. 36, 37 показывают, как можно получить

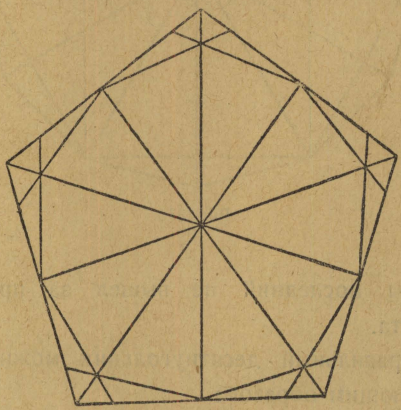

Рис. 36

правильные десятиугольник и двенадцатиугольник из пятиугольника и шестиугольника соответственно.

Главную часть работы составит получение углов при центре.

На рис. 36 радиус вписанного в пятиугольник круга принят за радиус круга, описанного около десятиуголь-

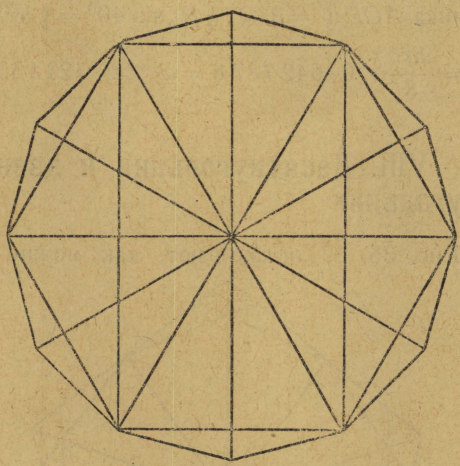

Рис. 37

ника, чтобы последний не вышел за пределы взятого квадрата.

100. Правильный десятиугольник можно получить также следующим образом:

Найдите точки X, Y (рис. 38), как в § 51, разделив AB в среднем и крайнем отношении.

Возьмите M посредине AB.

Сделайте перегибы XC, MO, YD под прямыми углами к AB.

Возьмите точку O на MO так, чтобы $YO = AY$ или $YO = XB$.

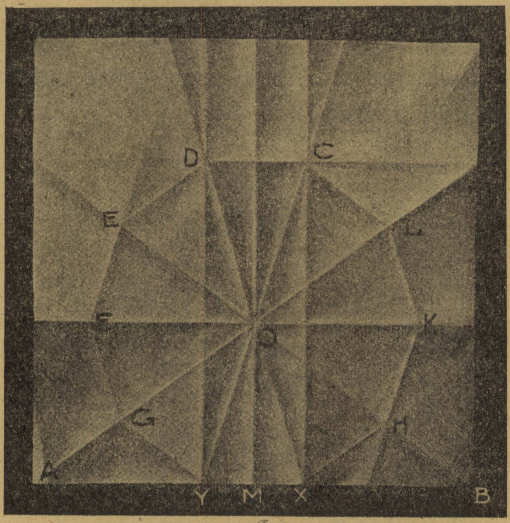

Рис. 38

Продолжите YO и XO до пересечения с XC и YD в точках C и D.

Разделите углы XOC и DOY на четыре равные части линиями HOE, KOF и LOG.

Отложите OH, OK, OL, OE, OF и OG равными OY или OX.

Соедините последовательно точки X, H, K, L, C, D, E, F, G и Y. Как в § 60, $\angle YOX = \frac{2}{5}$ прямого угла $= 36^0$.

IX. Пятнадцатиугольник

101. Рис. 39 показывает получение пятнадцатиугольника из пятиугольника.

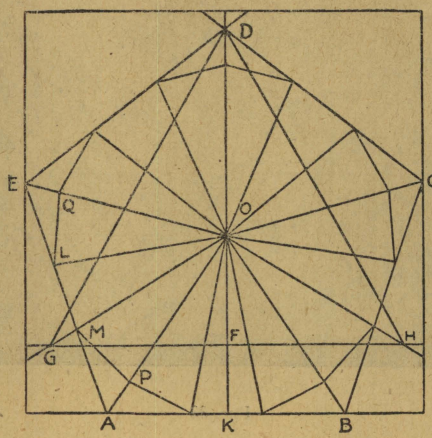

Рис. 39

Пусть $ABCDE$ будет пятиугольник и O его центр.

Проведите OA, OB, OC, OD и OE. Продолжите DO до пересечения с AB в точке K.

Возьмите $OF = OD/2$.

Сделайте перегиб GFH под прямым углом к OF. Отложите $OG = OH = OD$.

В таком случае GDH есть равносторонний треугольник и углы DOG и HOD равны 120^0 каждый.

Но угол DOA равен 144^0; следовательно, угол GOA равен 24^0.

Значит, от угла EOA, равного 72^0, линия OG отделяет третью часть.

Разделите угол EOG пополам линией OL, пересекающей EA в точке L, и пусть OG пересекает EA в точке M; тогда

$$OL = OM.$$

На OA и OE отложите OP и OQ равными OL или OM.

В таком случае PM, ML и LQ будут сторонами пятнадцатиугольника.

Поступая подобным же образом с углами AOB, BOC, COD и DOE, мы получим и все остальные стороны пятнадцатиугольника.

X. Ряды

Арифметическая прогрессия

102. Рис. 40 иллюстрирует арифметическую прогрессию. Горизонтальные линии влево от диагонали, включая верхний и нижний края, образуют арифметическую прогрессию. Если первый отрезок будет a,

а разность между двумя соседними d, то ряд будет a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ и т. д.

103. Части горизонтальных линий вправо от диагонали также образуют арифметическую прогрессию, но

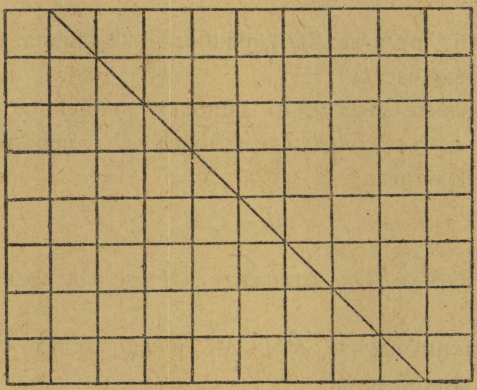

Рис. 40

они идут в обратном порядке, постепенно уменьшаясь от одного члена к другому на ту же самую величину.

104. Вообще, если l есть последний член прогрессии, s ее сумма, то предыдущий чертеж графически доказывает формулу

$$s=\frac{n}{2}(a+l).$$

105. Если между a и c в прогрессии есть еще один член, то этот средний член равен

$$\frac{a+c}{2}.$$

106. Для того, чтобы между a и l вставить n средних членов, вертикальную линию нужно перегибами разделить на $n+1$ равных частей. Разность между двумя соседними членами будет

$$\frac{l-a}{n+1}.$$

107. Обращаясь к обратному ряду и переставляя a и l одно на место другого, мы получим прогрессию

$$a,\ a-d,\ a-2d, \ldots,\ l.$$

Ее члены положительны, пока $a>(n-1)d$, после чего они будут нулем или отрицательным числом.

Геометрическая прогрессия

108. В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое между отрезками гипотенузы. Отсюда, если длины двух отрезков представляют собою два соседних или соседних через один члена геометрической прогрессии, то эту прогрессию можно определить согласно рис. 41. Здесь OP_1, OP_2, OP_3, OP_4

и OP_5 составляют геометрическую прогрессию, знаменатель отношения которой равен $OP_1 : OP_2$.

Если OP_1 есть единица длины, то данная прогрессия состоит из степеней отношения, показатели которых представляют ряд натуральных чисел.

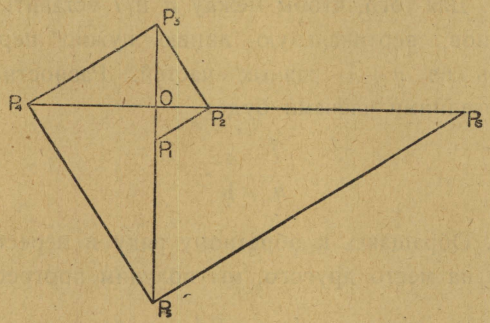

Рис. 41

109. Если представить данную прогрессию в виде a, ar, $ar^2, \ldots$, то

$$P_1P_2 = a\sqrt{1+r^2}.$$

$$P_2P_3 = ar\sqrt{1+r^2}.$$

$$P_3P_4 = ar^2\sqrt{1+r^2}.$$

. . . . . .

Значит, эти отрезки также образуют геометрическую прогрессию с знаменателем отношения r.

110. Члены указанной прогрессии можно взять в обратном порядке, причем отношение будет правильной дробью. Сумма такой прогрессии, продолженной до бесконечности, будет

$$\frac{OP_5}{OP_5 - OP_4}.$$

111. Поступая согласно указанию § 108, можно найти геометрическое среднее между двумя данными отрезками; продолжая этот прием, можно найти 3, 7, 15 и т. д. средних членов. Вообще можно найти $2^n - 1$ средних, где n есть целое положительное число.

112. Простым перегибанием бумаги чрез известные точки нельзя найти два геометрических средних между двумя данными отрезками. Это можно выполнить, однако, следующим образом: на рис. 41 даны OP_1 и OP_4, требуется найти P_2 и P_3. Возьмите два прямых угла из бумаги и положите их так, чтобы один из них вершиной лежал на прямой OP_2 и одна сторона его проходила чрез P_1, а другой лежал вершиной на прямой OP_3 и одна сторона его проходила чрез P_4; затем перемещайте их, сохраняя указанное условие, так, чтобы направления двух других сторон их совпали. Вершины углов тогда определят положение P_2 и P_3.

113. Этот прием даст кубический корень из данного числа, так как, если OP_1 есть единица, то наш ряд есть 1, r, r^2, r^3.

114. С этой задачей связана любопытная легенда: „Афиняне, страдая в 430 г. до Р. Х. от сильной эпидемии сыпного тифа, обратились к Делосскому оракулу с просьбой указать, как им избавиться от беды. Аполлон ответил, что они должны *удвоить величину* его алтаря, имевшего форму *куба*. Ничего не могло быть легче, казалось, и был сооружен новый алтарь, каждая *сторона* которого была вдвое больше, чем у старого. Справедливо разгневанный бог усилил эпидемию еще больше. На Делос отправили новую депутацию, которой он ответил, что с ним шутить нельзя и что его алтарь должен быть ровно вдвое больше. Подозревая тайну, афиняне обратились к геометрам. Самый знаменитый из них, Платон, уклонился от этой задачи и послал их к Евклиду, который и изучил специально весь этот вопрос". (Имя Евклида было поставлено вместо имени Гиппократа). Гиппократ свел вопрос к нахождению двух геометрических средних между двумя данными отрезками, из которых один вдвое длиннее другого. Если члены этого ряда обозначим чрез a, x, y и $2a$, то $x^3 = 2a^3$. Ему однако не удалось найти эти средние. Ученик Платона Менэхм, живший между 375 и 325 г. до Р. Х., дал три следующих уравнения:

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Это соотношение дает три следующих уравнения:

$$x^2 = ay \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y^2 = 2ax \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$xy = 2a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(1) и (2) представляют уравнения парабол, а (3) уравнение равносторонней гиперболы. Уравнения (1) и (2) или уравнения (1) и (3) дают $x^3 = 2a^3$. Для решения задачи надо было взять пересечение (α) двух парабол (1) и (2) и пересечение (β) параболы (1) с равносторонней гиперболой (3).

Гармонический ряд

115. Перегните бумагу по каким-нибудь линиям AR, PB, как на рис. 42, где P есть точка на AR,

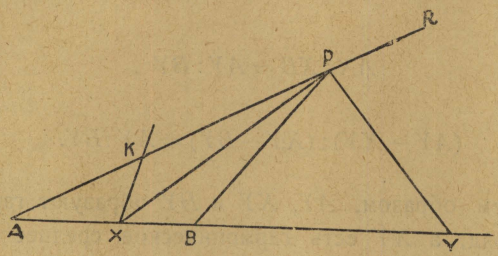

Рис. 42

а B на краю бумаги. Перегните еще раз так, чтобы AP и PR обе совпали с линией PB. Пусть полученные сгибы будут PX, PY, а точки X, Y лежат на AB.

В таком случае точки A, X, B, Y составят гармонический ряд. Это означает, что отрезок AB делится внутренне в точке X и внешне в точке Y так, что

$$AX : XB = AY : BY.$$

Очевидно, что всякая линия, пересекающая PA, PX, PB и PY, делится ими гармонически.

116. Найдите Y по данным A, B и X. Для этого перегните бумагу по произвольной линии XP и отметьте на ней точку K, соответствующую точке B. Сложите по линиям $AKPR$ и BP. Разделите угол BPR пополам линией PY, сделав сгиб чрез точку P так, чтобы PB и PR совпали.

Так как XP делит угол APB пополам, то

$$AX : XB = AP : BP = AY : BY.$$

117.

$$AX : XB = AY : BY$$

или

$$(AY - XY) : (XY - BY) = AY : BY.$$

Таким образом, AY, XY и BY образуют гармонический ряд, а XY есть гармоническое среднее между AY и BY.

Подобным же образом AB есть гармоническое среднее между AX и AY.

118. Если даны BY и XY, то для того, чтобы найти третий член AY, нам нужно только построить какой-нибудь прямоугольный треугольник на XY, как гипотенузе, и взять угол APX = углу XPB.

119. Пусть

$$AX = a,\ AB = b \text{ и } AY = c,$$

Тогда

$$b = \frac{2ac}{a+c},$$

или

$$ab + bc = 2ac,$$

или

$$c = \frac{ab}{2a-b} = \frac{b}{2-\frac{b}{a}}.$$

Когда

$$a = b, \ c = b.$$

Когда

$$b = 2a, \ c = \infty.$$

Поэтому, когда X есть средина BA, Y лежит на бесконечном расстоянии справа от B. Y приближается к B по мере приближения X к этой точке, и наконец все эти точки совпадают.

При перемещении X от средины AB влево, Y перемещается с бесконечного расстояния слева к точке A и наконец X, A и Y совпадают.

120. Если E есть средина AB, то

$$EX \,.\, EY = EA^2 = EB^2$$

для всех положений X и Y относительно A и B.

Каждая из двух систем пар точек X и Y называется системой в инволюции; точка E носит название

центра, а A или B фокуса системы. Эти две системы вместе можно рассматривать, как одну.

121. По данным AX и AY можно найти B следующим образом:

Продолжите XA и возьмите $AC = XA$.

Найдите средину D отрезка AY.

Возьмите $CE = DA$ или $AE = DC$.

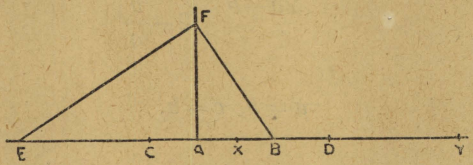

Рис. 43

Перегните бумагу чрез A так, чтобы прямая AF была перпендикулярна к CAY.

Найдите F так, чтобы $DF = DC$.

Сложите по EF и проведите FB так, чтобы FB была перпендикулярна к EF.

CD есть среднее арифметическое между AX и AY.

AF есть среднее геометрическое между AX и AY.

AF есть также среднее геометрическое между CD или AE и AB.

Значит, AB есть среднее гармоническое между AX и AY.

122. Вот очень простой способ найти среднее гармоническое между двумя данными отрезками.

Возьмите на сторонах квадрата отрезки AB, CD, равные данным. Получите диагонали AD, BC и стороны AC, BD трапеции $ACBD$. Сделайте сгиб чрез E, точку пересечения диагоналей, так, чтобы прямая FEG была перпендикулярна к другим сторонам квадрата или параллельна AB и CD. Пусть FEG пересекает AC и BD в F и G. В таком случае FG есть среднее гармоническое между AB и CD.

Так как

$$\frac{FE}{AB}=\frac{CE}{CB}$$

и

$$\frac{EG}{CD}=\frac{FE}{CD}=\frac{EB}{CB},$$

то

$$\frac{FE}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{CE}{CB}+\frac{EB}{CB}=1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{FE}=\frac{2}{FG}.$$

123. Отрезок HK, соединяющий средины AC и BD, есть арифметическое среднее между AB и CD.

124. Для того, чтобы найти геометрическое среднее, возьмите на HK отрезок $HL=FG$. Проведите сгиб LM под прямым углом к HK. Возьмите O, середину HK, и найдите на LM такую точку M,

чтобы $OM = OH$. Отрезок HM есть геометрическо среднее между AB и CD, а рáвно и между FG и HK Таким образом, мы видим, что геометрическое средне

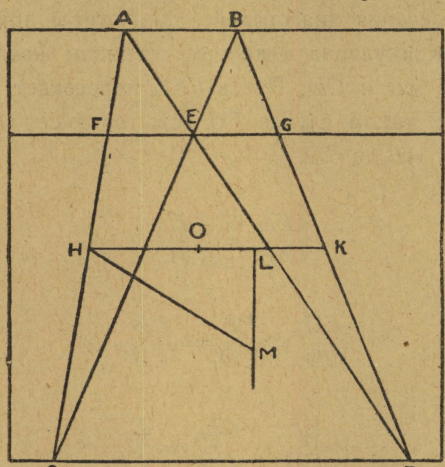

Рис. 44

двух количеств есть геометрическое среднее их арифме тического и гармонического средних.

Суммование некоторых рядов

125. Найти сумму ряда

$$1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1).$$

Разделите данный квадрат на некоторое числ равных квадратов, как на рис. 45. На нем взят

49 квадратов, но их число можно увеличить по произволу.

Число квадратов будет очевидно квадратом некоторого числа, а именно, квадратом числа делений старого данного квадрата.

O	A	B	C	D	E	F
a						
b						
c						
d						
e						
f						

Рис. 45

Каждый из малых квадратов будем считать единицей; фигуру, образованную единицами $A+O+a$, будем называть гномоном.

Числа квадратов единиц в каждом из гномонов AOa, BOb и т. д. будут соответственно 3, 5, 7, 9, 11, 13.

Следовательно, сумма ряда 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 есть 7^2.

Вообще $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

126. Найти сумму кубов n первых натуральных чисел.

Разбейте квадрат перегибами на 49 равных квадратов, как в предыдущем параграфе, и отметьте буквами

O 1	A 2	B 3	C 4	D 5	E 6	F 7
a 2	4	6	8	10	12	14
b 3	6	9	12	15	18	21
c 4	8	12	16	20	24	28
d 5	10	15	20	25	30	35
e 6	12	18	24	30	36	42
f 7	14	21	28	35	42	49

Рис. 46

гномоны. Заполните эти квадраты числами таблицы умножения.

Число в начальном квадрате есть $1 = 1^3$.

Суммы чисел в гномонах Aa, Bb и т. д. суть $2 + 4 + 2 = 2^3$, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3 и 7^3.

Сумма чисел в первом горизонтальном ряду есть сумма семи первых чисел натурального ряда. Назовем ее s.

Тогда суммы чисел в рядах a, b, c, d и т. д. суть

$$2s,\ 3s,\ 4s,\ 5s,\ 6s \text{ и } 7s.$$

Поэтому сумма всех этих чисел есть

$$s(1+2+3+4+5+6+7)=s^2.$$

Значит, сумма кубов первых семи чисел натурального ряда равна квадрату суммы этих чисел.

Вообще,

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots n)^2.$$

Следовательно,

$$\Sigma n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

А также

$$[n.(n+1)]^2-[(n-1).n]^2=(n^2+n)^2-(n^2-n)^2=4n^3.$$

Полагая $n=1, 2, 3\ldots$ по порядку, имеем

$$\begin{aligned}
4\,.\,1^3&=(1\,.\,2)^2-(0\,.\,1)^2\\
4\,.\,2^3&=(2\,.\,3)^2-(1\,.\,2)^2\\
4\,.\,3^3&=(3\,.\,4)^2-(2\,.\,3)^2\\
\ldots\ldots&=\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots&=\ldots\ldots\ldots\\
4\,.\,n^3&=[n\,.\,(n+1)]^2-[(n-1)\,.\,n]^2.
\end{aligned}$$

Складывая, мы получаем

$$4\,\Sigma n^3=[n(n+1)]^2,$$

откуда

$$\Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

127. Если s_n есть сумма первых n натуральных чисел, то

$$s_n^2 - s_{n-1}^2 = n^3.$$

128. Найти сумму ряда

$$1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + \cdots + (n-1) \,.\, n.$$

На рис. 46 числа, расположенные по диагонали, начиная с 1, представляют квадраты натуральных чисел по порядку.

Числа одного гномона можно вычесть из соответственных чисел следующего гномона. Этот прием дает:

$$\begin{gathered} n^3 - (n-1)^3 = n^2 + (n-1)^2 + \\ + 2[(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 1] = \\ = n^2 + (n-1)^2 + 2[1 + 2 + \cdots + (n-1)] = \\ = n^2 + (n-1)^2 + n(n-1) = [n-(n-1)]^2 + 3(n-1)n = \\ = 1 + 3(n-1)n. \end{gathered}$$

Но

$$n^3 - (n-1)^3 = 1 + 3(n-1)n$$

и

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 1 + 3(n-2)(n-1)$$

. . . . . .

$$2^3 - 1^3 = 1 + 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

$$1^3 - 0^3 = 1 + 0.$$

Сложение этих равенств дает

$$n^3 = n + 3[1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + \cdots + (n-1) \,.\, n].$$

Значит,

$$1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + \cdots + (n-1) \,.\, n = \frac{n^3 - n}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

129. Найти сумму квадратов первых n натуральных чисел. Мы имеем

$$1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + \cdots + (n-1) \,.\, n =$$
$$= 2^2 - 2 + 3^2 - 3 + \cdots + n^2 - n =$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 - (1 + 2 + 3 + \cdots + n) =$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Поэтому

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{(n-1)\,n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= n(n+1)\left[\frac{n-1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

130. Найти сумму ряда

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2.$$

Так как

$$n^3 - (n-1)^3 = n^2 + (n-1)^2 + n(n-1),$$

по § 128, $= (2n-1)^2 - (n-1) \,.\, n,$

то, полагая

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

мы найдем

$$1^3 - 0^3 = 1^2 - 0 \,.\, 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3^2 - 1 \,.\, 2$$
$$3^3 - 2^3 = 5^2 - 2 \,.\, 3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = (2n-1)^2 - (n-1) \,.\, n.$$

Складывая, мы имеем

$$n^3 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 -$$
$$- [1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + \cdots + (n-1) \,.\, n].$$

Отсюда

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n^3 + \frac{n^3 - n}{3} =$$
$$= \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

XI. Многоугольники

131. Найдите центр O квадрата, перегибая его по диагоналям. Разделите пополам прямые углы при центре, затем эти половины прямых углов и т. д. Таким образом вы получите при центре 2^n равных углов; каждый из них будет равен $\frac{4}{2^n}$ прямого угла (n целое положи-

тельное число). На каждой из линий, идущих из центра, отложите по равному отрезку. Соединяя затем концы этих радиусов в последовательном порядке, вы получите правильный многоугольник о 2^n сторонах.

132. Найдем величины периметров и площадей таких многоугольников. На рис. 47 пусть OA и OA_1

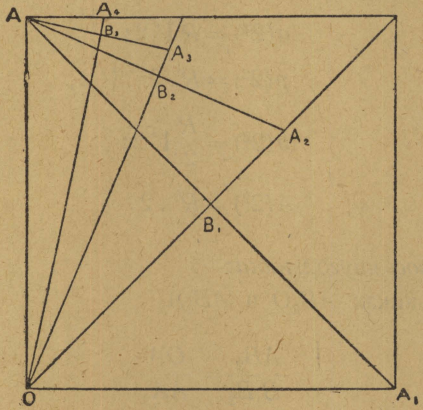

Рис. 47

будут два взаимно перпендикулярных радиуса. Пусть радиусы OA_2, OA_3, OA_4 и т. д. делят прямой угол A_1OA на 2, 4, 8,... частей. Проведите прямые AA_1, AA_2, AA_3,..., встречающие радиусы OA_2, OA_3, OA_4,... под прямыми углами в точках B_1, B_2, B_3,... В таком случае B_1, B_2, B_3,... суть средины соответствующих хорд; AA_1, AA_2, AA_3, AA_4,... будут стороны вписанных многоугольников о

2^2, 2^3, 2^4, ... сторонах, а OB_1, OB_2, ... будут соответствующие апофемы.

Пусть $OA = R$.

Пусть $a(2^n)$ обозначает *сторону* вписанного многоугольника о 2^n сторонах, $b(2^n)$ соответственную *апофему*, $p(2^n)$ его *периметр* и $A(2^n)$ его *площадь*.

Для *квадрата*

$$a(2^2) = R\sqrt{2};$$

$$p(2^2) = R \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2};$$

$$b(2^2) = \frac{R}{2}\sqrt{2};$$

$$A(2^2) = R^2 \cdot 2.$$

Для *восьмиугольника*:
в треугольниках AB_2O и AB_1A_2

$$\frac{AB_2}{B_1B_2} = \frac{OA}{AA_2}.$$

Поэтому

$$\tfrac{1}{2}AA^2{}_2 = R \cdot B_1A_2 = R[R - b(2^2)] =$$

$$= R\left(R - \frac{R}{2}\sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{2}R^2 \cdot (2 - \sqrt{2}),$$

или

$$AA_2 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} = a(2^3) \qquad (1)$$

$$p(2^3) = R \cdot 2^3\sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad (2)$$

$$b(2^3) = OB_2 = \sqrt{OA^2 - AB_2{}^2} = \sqrt{R^2\left(1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{R^2(2+\sqrt{2})}{4}} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad (3)$$

$A(2^3) = \frac{1}{2}$ периметра $\times$ апофему

$$= R \,.\, 2^2 \,.\, \sqrt{2-\sqrt{2}} \,.\, \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}} = R^2 \,.\, 2\sqrt{2}.$$

Подобным образом для многоугольника о 16 сторонах мы имеем:

$$a(2^4) = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$

$$p(2^4) = R \,.\, 2^4 \,.\, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$

$$b(2^4) = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$

$$A(2^4) = R^2 \,.\, 2^2 \,.\, \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

а для многоугольника о 32 сторонах:

$$a(2^5) = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

$$p(2^5) = R \,.\, 2^5 \,.\, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

$$b(2^5) = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

$$A(2^5) = R^2 \,.\, 2^3 \,.\, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Таким образом, общий закон здесь ясен.

Итак,

$$A(2^n) = \frac{R}{2} \cdot p(2^{n-1}).$$

При неопределенном возрастании числа сторон апофема, очевидно, приближается к своему пределу, радиусу. Таким образом, предел выражения

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\ldots}$$

есть 2; в самом деле, если обозначить этот предел чрез x, то $x=\sqrt{2+x}$; это квадратное уравнение дает: $x=2$ или -1; но второе значение, конечно, недопустимо.

133. Если чрез концы радиусов провести перпендикулярные к ним прямые, то мы получим правильные многоугольники, описанные около круга, а также около полученных в предыдущем параграфе многоугольников, с тем же числом сторон.

На рис. 48 пусть AE будет сторона вписанного, а FG сторона описанного многоугольника.

Тогда, из треугольников FIE и EIO

$$\frac{OE}{OI} = \frac{FE}{EI} = \frac{FG}{AE};$$

следовательно,

$$FG = R\frac{AE}{OI}.$$

Величины AE и OI известны из предыдущего §, а FG находится помощью простой подстановки.

Площади этих двух многоугольников относятся друг к другу, как $FG^2 : AE^2$, т. е. как $R^2 : OI^2$.

134. В предыдущих параграфах было показано, как можно получить правильные многоугольники о 2^2, $2^3 \ldots 2^n$ сторонах. Если же дан многоугольник о m сторонах, то легко получить многоугольник о $2^n . m$ сторонах.

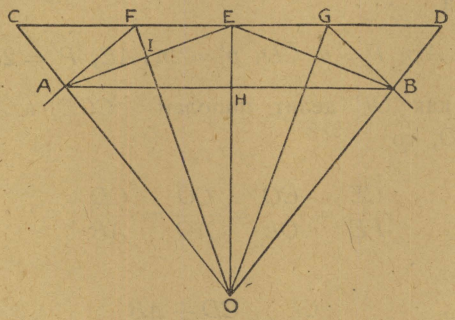

Рис 48

135. На рис. 48 отрезки AB и CD суть стороны вписанного и описанного многоугольника о n сторонах. Чрез середину E стороны CD проведите прямые AE и BE. Отрезки AE и BE представляют стороны вписанного многоугольника о $2n$ сторонах.

Перегните бумагу по AF и BG под прямыми углами к AC и BD; эти перпендикуляры встретят OD в точках F и G.

Тогда FG представит сторону описанного многоугольника о $2n$ сторонах.

Проведите OF, OG и OE.

Пусть p, P будут периметры вписанного и описанного многоугольника о n сторонах, A, B их площади; чрез p', P' обозначим периметры вписанного и описанного многоугольника о $2n$ сторонах, чрез A', B' их площади.

Тогда

$$p = n \,.\, AB,\ P = n \,.\, CD,\ p' = 2n \,.\, AE,\ P' = 2n \,.\, FG.$$

Так как OF делит пополам $\angle COE$, а AB параллельна CD, то

$$\frac{CE}{FE} = \frac{CO}{OE} = \frac{CO}{AO} = \frac{CD}{AB};$$

значит,

$$\frac{CE}{FE} = \frac{CD + AB}{AB},$$

или

$$\frac{4n \,.\, CE}{4n \,.\, FE} = \frac{n \,.\, CD + n \,.\, AB}{n \,.\, AB}$$

откуда

$$\frac{2P}{P'} = \frac{P + p}{p}$$

и

$$P' = \frac{2Pp}{P + p}.$$

Далее, из подобия треугольников EIF и AHE

$$\frac{EI}{AH} = \frac{EF}{AE}$$

или

$$AE^2 = 2AH \cdot EF;$$

значит,

$$4n^2 \cdot AE^2 = 4n^2 \cdot AB \cdot EF,$$

или

$$p' = \sqrt{P'p}.$$

С другой стороны,

$$A = 2n \triangle AOH, \quad B = 2n \triangle COE,$$
$$A' = 2n \triangle AOE, \quad B' = 2n \triangle FOE.$$

Так как треугольники AOH и AOE имеют одну и ту же высоту AH, то

$$\frac{\triangle AOH}{\triangle AOE} = \frac{OH}{OE}.$$

Подобным же образом

$$\frac{\triangle AOE}{\triangle COE} = \frac{OA}{OC}.$$

Затем, так как $AB \parallel CD$, то

$$\frac{\triangle AOH}{\triangle AOE} = \frac{\triangle AOE}{\triangle COE}.$$

Поэтому

$$\frac{A}{A'} = \frac{A'}{B} \text{ или } A' = \sqrt{AB}.$$

Теперь найдем B'. Так как у треугольников COE и FOE высота общая, а OF делит угол EOC пополам, то

$$\frac{\triangle COE}{\triangle FOE} = \frac{CE}{FE} = \frac{OC + OE}{OE};$$

затем

$$OE = OA$$

и

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OE}{OH} = \frac{\triangle AOE}{\triangle AOH};$$

поэтому

$$\frac{\triangle COE}{\triangle FOE} = \frac{\triangle AOE + AOH}{\triangle AOH}.$$

Из этого уравнения легко получаем, что

$$\frac{2B}{B'} = \frac{A' + A}{A};$$

следовательно,

$$B' = \frac{2AB}{A + A'}.$$

136. По данным радиусу R и апофеме r правильного многоугольника найти радиус R' и апофему r'

правильного многоугольника *того же периметра*, но с *двойным числом сторон*.

Пусть AB будет сторона первого многоугольника, O его центр, OA радиус описанного круга, OD его апофема. На продолжении апофемы OD отложите $OC = OA$ или OB. Проведите AC, BC. Перегните по OA' и OB' перпендикулярно к AC и BC, определяя таким образом точки A', B'.

Проведите прямую $A'B'$, пересекающую OC в D'. Хорда $A'B'$ будет равна половине AB, а угол $B'OA'$

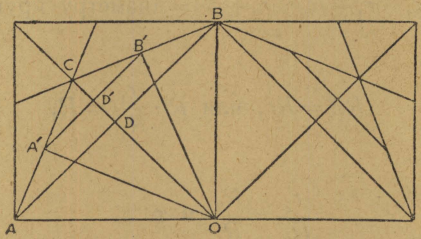

Рис. 49

равен половине угла BOA. OA' и OD' представляют радиус R' и апофему r' второго многоугольника.

Но OD' есть среднее арифметическое между OC и OD, а OA' есть среднее геометрическое между OC и OD'. Поэтому

$$r' = \tfrac{1}{2}(R + r), \quad R' = \sqrt{Rr'}.$$

137. Теперь на OC отложите $OE = OA'$ и проведите $A'E$.

Тогда, так как $A'D'$ меньше $A'C$, а $\angle D'A'C$ делится пополам прямою $A'E$, то ED' меньше, чем $\frac{1}{2}CD'$, т. е. меньше $\frac{1}{4}CD$; следовательно,

$$R_1 - r_1 \text{ меньше, чем } \tfrac{1}{4}(R - r).$$

С увеличением числа сторон многоугольник будет приближаться к кругу того же периметра, а R и r будут приближаться к радиусу круга.

Другими словами,

$$R + r + R_1 - r_1 + R_2 - r_2 + \cdots = \text{диаметру круга} = \frac{p}{\pi}.$$

Далее,

$$R_1^2 = Rr_1 \text{ или } R \cdot \frac{r_1}{R_1} = R_1$$

и

$$\frac{r_2}{R_2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ и т. д.}$$

Перемножая эти два ряда равенств, находим:

$$R \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdots = \text{радиусу круга} = \frac{p}{2\pi}.$$

138. Радиус круга заключается между R_n и r_n, а число сторон многоугольника равно 4.2^n; величина π заключается между $\frac{2}{r_n}$ и $\frac{2}{R_n}$. Поэтому, беря достаточно

большое число сторон, можно вычислить π с любой степенью точности.

Радиусы и апофемы правильных многоугольников о 4, 8, 16,..., 2048 сторонах имеют следующие величины:

4-угольник: $r = 0 \cdot 500000$, $R = r\sqrt{2} = 0 \cdot 707107$

8-угольник: $r_1 = 0 \cdot 603553$, $R_1 = 0 \cdot 653281$

. . . . . .

2048-угольник: $r_9 = 0 \cdot 636620$, $R_9 = 0 \cdot 636620$.

Отсюда

$$\pi = \frac{2}{0 \cdot 636620} = 3 \cdot 14159\ldots$$

139. Если R'' есть радиус правильного многоугольника того же периметра о $4n$ сторонах, то

$$R''^2 = \frac{R'^2(R + R')}{2R}$$

или вообще

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \sqrt{\frac{1 + \frac{R_k}{R_{k-1}}}{2}}.$$

140. Радиусы R_1, R_2,... последовательно уменьшаются; поэтому отношение $\frac{R_2}{R_1}$ меньше единицы и

может быть приравнено косинусу некоторого угла α;

$$\frac{R_3}{R_2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Вообще

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}.$$

Перемножая почленно такие равенства, получаем:

$$R_{k+1} = R_1 . \cos\alpha . \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}.$$

Предел произведения $\cos\alpha . \cos\frac{\alpha}{2} \cdots \cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}$ при $k=\infty$ равен $\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$; этот результат известен под именем *формулы Эйлера*.

141. Карл Фридрих *Гаусс* (Gauss, 1777—1855) доказал, что кроме правильных многоугольников о 2^n, 3.2^n, 5.2^n, 15.2^n сторонах с помощью элементарной геометрии могут быть построены только такие правильные многоугольники, у которых число сторон представляет произведение 2^n и одного или нескольких различных чисел вида 2^m+1. Мы здесь укажем, как могут быть построены многоугольники о 5 и 17 сторонах.

Нам понадобятся следующие теоремы[1]:

---

[1]) Доказательство этих теорем можно найти у *Catalan*, Théorèmes et Problèmes de Géométrie Elémentaire.

(1) Если C и D суть две точки полуокружности $ACDB$, если C' симметрично с C по отношению к диаметру AB, а R обозначает радиус круга, то

$$AC \,.\, BD = R \,.\, (C'D - CD) \qquad \text{I}$$

$$AD \,.\, BC = R \,.\, (C'D + CD) \qquad \text{II}$$

$$AC \,.\, BC = R \,.\, CC' \qquad \text{III}$$

(2) Пусть окружность некоторого круга разделена на нечетное число равных частей, пусть AO будет диаметр, проходящий чрез одну из точек деления A и чрез средину O противоположной дуги. Обозначим буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ точки деления по обе стороны этого диаметра, начиная с ближайших к A.

В таком случае

$$OA_1 \,.\, OA_2 \,.\, OA_3 \ldots OA_n = R^n \qquad \text{IV}$$

и

$$OA_1 \,.\, OA_2 \,.\, OA_4 \,.\, OA_8 \ldots OA_n = R^{\frac{n}{2}}.$$

142. Очевидно, что если хорда OA_n определена, то угол A_nOA найден, и остается разделить его на n равных частей, чтобы получить прочие хорды.

143. Возьмем сначала пятиугольник.

По формуле IV

$$OA_1 \,.\, OA_2 = R^2.$$

По формуле I

$$R(OA_1 - OA_2) = OA_1 \cdot OA_2 = R^2.$$

Следовательно,

$$OA_1 - OA_2 = R;$$

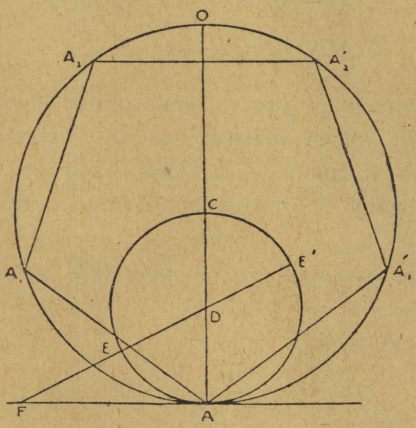

Рис. 50

отсюда

$$OA_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

и

$$OA_2 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Отсюда вытекает следующее построение.

Проведите диаметр ACO и касательную AF. Найдите средину D радиуса AC и отложите $AF = AC$.

На AC, как на диаметре, опишите круг $AE'CE$.

Проведите FD, встречающую внутренний круг в E и E'.

Тогда

$$FE' = OA_1 \text{ и } FE = OA_2.$$

144. Рассмотрим теперь 17-угольник.

В данном случае[1])

$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 \cdot OA_4 \cdot OA_5 \cdot OA_6 \cdot OA_7 \cdot OA_8 = R^8.$$
$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_4 \cdot OA_8 = R^4.$$
$$OA_3 \cdot OA_5 \cdot OA_6 \cdot OA_7 = R^4.$$

По формулам I и II (§ 141)

$$OA_1 \cdot OA_4 = R(OA_3 + OA_5)$$
$$OA_2 \cdot OA_8 = R(OA_6 - OA_7)$$
$$OA_3 \cdot OA_5 = R(OA_2 + OA_8)$$
$$OA_6 \cdot OA_7 = R(OA_1 - OA_4).$$

Пусть

$$OA_3 + OA_5 = M, \quad OA_6 - OA_7 = N,$$
$$OA_2 + OA_8 = P, \quad OA_1 - OA_4 = Q.$$

---

[1]) Здесь указаны лишь главные шаги. Полнее вопрос изложен у *Catalan, Théorèmes et Problèmes de Géometrie Elémentaire* и у *Klein, Знаменитые задачи элементарной геометрии.*

Тогда

$$MN = R^2 \text{ и } PQ = R^2.$$

Подставляя значения M, N, P и Q в формулы

$$MN = R^2,\ PQ = R^2$$

и пользуясь формулами I и II, находим:

$$(M - N) - (P - Q) = R.$$

Подобным же образом, подставляя значения M, N, P и Q в написанную выше формулу и принимая во внимание I и II, мы найдем, что

$$(M - N)(P - Q) = 4R^2.$$

Отсюда определяются $M - N$, $P - Q$, M, N, P и Q. С другой стороны,

$$OA_2 + OA_8 = P,$$

$$OA_2 \,.\, OA_8 = RN.$$

Отсюда определяется OA_8.

145. Разрешая эти уравнения, найдем:

$$M - N = \tfrac{1}{2}R(1 + \sqrt{17}).$$

$$P - Q = \tfrac{1}{2}R(-1 + \sqrt{17}).$$

$$P = \tfrac{1}{4}R(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}).$$

$$N = \tfrac{1}{4}R(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}).$$

$$OA_8 = \tfrac{1}{8}R\,[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-$$

$$-2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\,]=$$

$$=\tfrac{1}{8}R\,[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-$$

$$-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\,].$$

146. Геометрическое построение будет следующее:

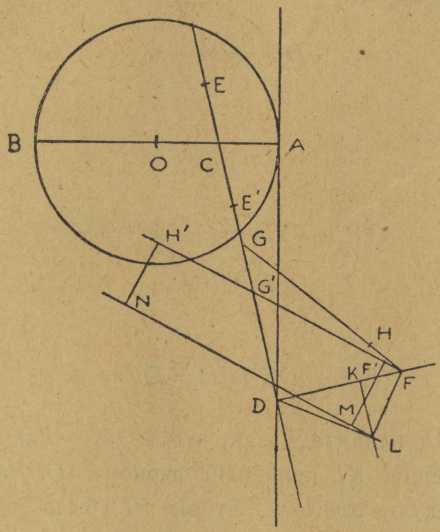

Рис. 51

Пусть BA будет диаметр данного круга; O его центр; C средина OA. Проведите AD перпендикулярно

к OA и отложите $AD = AB$. Проведите CD. По обе стороны от C найдите на CD такие точки E и E', чтобы $CE = CE' = CR$.

Разделите ED пополам в точке G и $E'D$ в G'. Проведите DF перпендикулярно к CD и отложите $DF = OR$.

Проведите FG и FG'.

Найдите на FG такую точку H и на продолжении FG' такую точку H', чтобы $GH = EG$ и $G'H' = G'D$.

Очевидно, что

$$DE = M - N,$$
$$DE' = P - Q,$$

а также, что

$$FH = N,$$

откуда

$$(DE + FH)\,FH = DF^2 = R^2;$$

$$FH' = P,$$

откуда

$$(FH' - DE')\,FH = DF^2 = R^2.$$

На DF найдите K так, чтобы $FK = FH$.

Проведите KL перпендикулярно к DF и отметьте на KL такую точку L, чтобы FL было перпендикулярно к DL.

В таком случае

$$FL^2 = DF \,.\, FK = RN.$$

Наконец, проведите $H'N$ перпендикулярно к FH' и отложите $H'N = FL$. Проведите NM перпендикулярно к NH'. На NM найдите такую точку M, чтобы $H'M$ была перпендикулярна к FM. Проведите MF' перпендикулярно к FH'.

В таком случае

$$F'H' \,.\, FF' = F'M^2 = FL^2 = RN.$$

Но

$$FF' + F'H' = P.$$

Следовательно,

$$FF' = OA_8.$$

XII. Общие начала

147. На предыдущих страницах мы применяли разнообразные приемы, каковы, например, деление конечных линий на две и на три равные части, деление прямых углов на две или на другое число равных частей, проведение перпендикуляров к данной линии и т. д. Займемся теперь теорией этих приемов.

148. Всеобщим началом является принцип конгруэнтности или совмещения при наложении. Фигуры и отрезки прямых линий называются конгруэнтными, если они тождественно равны или равны во всех отношениях.

Складывая вдвое лист бумаги, мы получаем прямолинейные края двух плоскостей, совпадающие друг с

другом. Эту линию можно также рассматривать, как пересечение двух плоскостей, если обращать внимание на их расположение во время процесса перегибания.

Разделяя отрезок или угол на некоторое число равных частей, мы получаем некоторое число конгруэнтных частей. Равные отрезки или равные углы конгруэнтны.

149. Дан отрезок $X'X$, разделяемый точкой A' на две части. Найдем средину O этого отрезка, перегнув его вдвое. В таком случае OA' равно половине разности

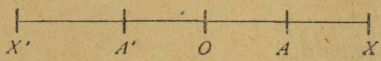

Рис. 52

между $A'X$ и $X'A'$. Перегните XX' в точке O и возьмите на OX точку A, соответствующую точке A'. Тогда отрезок AA' равен разности между $A'X$ и $X'A'$ и делится точкой O пополам. Если брать A' ближе к O, то $A'O$ уменьшается, а в то же время $A'A$ уменьшается вдвое скорее. Этим свойством пользуются при нахождении средины какого-нибудь отрезка при помощи циркуля.

150. Предыдущие рассуждения можно приложить и к углу. Биссектрису легко найти при помощи циркуля, находя точку пересечения двух кругов.

151. На линии $X'X$ отрезки вправо от O можно рассматривать, как положительные, а отрезки влево от O, как отрицательные. Другими словами, точка, перемещающаяся от O к A, движется в положительную

сторону, а точка, движущаяся в противоположном направлении OA', в отрицательную.

$$AX = OX - OA,$$
$$OA' = OX' - A'X',$$

где обе части уравнения отрицательны.

152. Если OA, одна сторона угла AOP, неподвижна и если линия OP вращается вокруг O, то углы, образуемые ею с OA, имеют различную величину. Все такие углы, образуемые OP при ее вращении в сторону, противоположную направлению вращения стрелки часов, считаются положительными. Углы же, образуемые OP при ее вращении в противоположную сторону, считаются отрицательными.

153. После полного оборота OP совпадает с OA. Описанный при этом угол называется углом при точке (перигоном); он равен, очевидно, четырем прямым углам. Если OP совершит половину оборота, она окажется на одной прямой с OA. Описанный угол называется углом при прямой; он равен двум прямым углам. Когда OP совершит четверть оборота, она будет перпендикулярна к OA. Все прямые углы равны. Равны между собой также все углы при прямой и все углы при точке.

154. Две прямые, пересекающие друг друга под прямым углом, образуют четыре конгруэнтных квадранта. Две прямые с иным взаимным наклоном друг к другу образуют четыре угла, из которых вертикально-противоположные попарно конгруэнтны.

155. Положение точки на плоскости определяется ее расстояниями от двух таких прямых. При этом расстояние от каждой из прямых берется по линии, параллельной другой из них. Аналитическая геометрия исследует свойства плоских фигур при помощи такого именно метода. Эти две прямые называются осями координат; расстояния точки от осей называют координатами, а пересечение осей началом координат. Этот метод был найден Декартом в 1637 году. Он оказал громадную услугу современным исследованиям.

156. Если две оси $X'X$, YY' пересекаются в O, то расстояния, измеряемые в направлении OX, т. е. вправо от O, положительны, а расстояния, измеряемые влево от O, отрицательны. Подобным же образом отсчитываемые в направлении OY расстояния положительны, а взятые в направлении OY' отрицательны.

157. Осевая симметрия определяется следующим образом: если две фигуры, лежащие в одной и той же плоскости, могут быть приведены в совпадение вращением одной из них около некоторой определенной прямой в той же плоскости на величину угла при прямой, то эти две фигуры называются симметричными по отношению к этой прямой, как оси симметрии.

158. Центральная симметрия определяется следующим образом: если две фигуры, лежащие в одной и той же плоскости, могут быть приведены в совпадение вращением, на величину угла при прямой, одной из них около некоторой неподвижной точки той же плоскости,

то эти две фигуры называются симметричными по отношению к этой точке, как центру симметрии.

В первом случае вращение происходит вне данной плоскости, а во втором в ней.

Если в двух рассмотренных случаях каждая из двух фигур представляет половину некоторой фигуры, то эта целая фигура называется симметричной по отношению к этой оси или к этому центру,—последние носят название оси и центра симметрии или просто оси и центра.

159. Возьмем в квадранте XOY какой-нибудь треугольник PQR. Найдем его изображение в квадранте YOX', складывая бумагу по оси YY' и прокалывая ее в вершинах треугольника.

Найдем таким образом изображения этих двух треугольников в четвертом и третьем квадрантах. Нетрудно видеть, что треугольники в соседних квадрантах обладают осевой симметрией, а треугольники в противоположных квадрантах обладают центральной симметрией.

160. Правильные многоугольники с нечетным числом сторон обладают осевой симметрией, а правильные многоугольники с четным числом сторон обладают центральной симметрией.

161. Если фигура имеет две взаимно-перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии. Это имеет место для правильных многоугольников с четным числом сторон, а также для некоторых кривых, как, например, для круга, эллипса, гиперболы и лемнискаты; правильные многоугольники

с нечетным числом сторон могут иметь несколько осей симметрии, но среди них не будет ни одной пары взаимно-перпендикулярных. Если сложить лист бумаги вдвое и обрезать, то полученный кусок бумаги будет иметь ось симметрии; если же обрезать сложенный

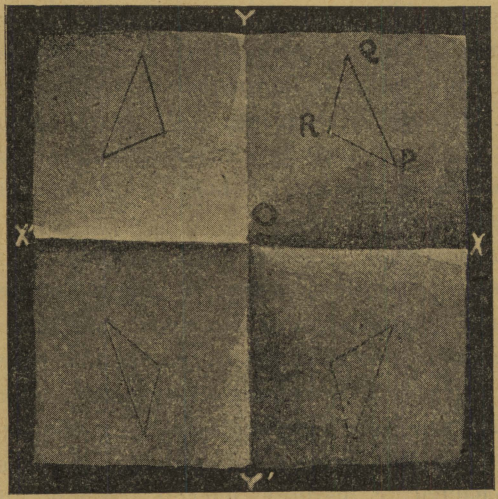

Рис. 53

вчетверо лист, то получится кусок, обладающий центральной симметрией (рис. 54).

162. Параллелограммы имеют центр симметрии. Четыреугольник, имеющий форму бумажного змея, или трапеция с двумя равными сторонами, противоположными

и равно наклоненными к двум другим сторонам, имеет ось симметрии.

163. Положение точки на плоскости может определяться также ее расстоянием от некоторой неподвижной точки и наклоном прямой, соединяющей обе точки,

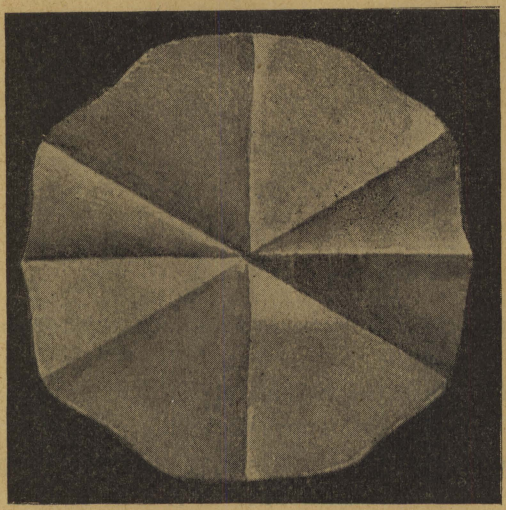

Рис. 54

к некоторой неподвижной прямой, проведенной чрез неподвижную точку.

Если OA есть неподвижная прямая, а P данная точка, то длина OP и $\angle AOP$ вполне определяют положение точки P.

O называется полюсом, OA полярной осью, OP радиусом-вектором, $\angle AOP$ векториальным углом. Отрезок OP и $\angle AOP$ называются полярными координатами точки P.

164. Симметричное по отношению к оси OA изображение какой-нибудь фигуры можно получить перегиба-

Рис. 55

нием по OA. Радиусы-векторы соответственных точек равно наклонены к этой оси.

165. Дан треугольник ABC. Продолжите его стороны CA, AB, BC соответственно до точек D, E, F. Предположим, что в A стоит человек, обращенный лицом к D; если он пойдет от A к B, от B к C и от C к A, то он последовательно опишет углы DAB, EBC, FCD. Но придя к своему начальному положению в A, он пройдет все углы при точке, т. е. четыре прямых угла. Из этого мы заключаем, что сумма трех внешних углов равна четырем прямым углам.

То же самое заключение приложимо к любому выпуклому многоугольнику.

166. Пусть этот человек стоит в A лицом к C, затем поворачивается по направлению AB и идет вдоль AB, BC и CA. В этом случае он сделает поворот, равный углу при прямой, т. е. двум прямым углам. Он последовательно поворачивается на углы CAB, EBC,

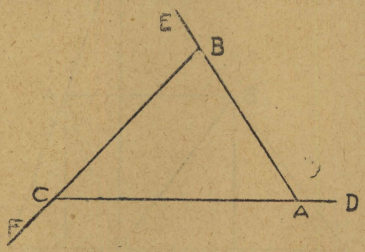

Рис. 56

и FCA. Поэтому $\angle EBF + \angle FCA + \angle CAB$ (отрицательный угол) = углу при прямой.

Этим свойством пользуются при поворачивании паровозов на железных дорогах. Локомотив, стоящий на DA, передней частью к A, переводят на CF, передней частью к F. Затем его пускают задним ходом и ведут на EB. Наконец, передним ходом его переводят по BA на AD. Паровоз описал один за другим углы ACB, CBA и BAC. Поэтому, три внутренних угла треугольника вместе равны двум прямым углам.

167. То свойство треугольника, что его три внутренние угла вместе равны двум прямым углам, можно иллюстрировать с помощью куска бумаги следующим образом.

Перегните треугольник по CC', перпендикулярно к AB. Разделите $C'B$ пополам в N и AC' пополам в M.

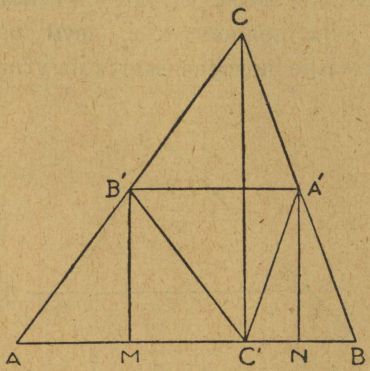

Рис. 57

Перегните по NA' и MB', перпендикулярно к AB; эти перпендикуляры пересекут BC и AC в A' и B'. Проведите $A'C'$ и $B'C'$.

Перегибая углы по NA', MB' и $A'B'$, мы найдем, что углы A, B, C треугольника соответственно равны углам $B'C'A$, BCA' и $A'C'B'$, которые вместе составляют два прямых угла.

168. Возьмите какую-нибудь прямую ABC. Проведите перпендикуляры к ABC в точках A, B и C. На этих перпендикулярах возьмите точки D, E, F, равно отстоящие от оснований перпендикуляров. При помощи наложения легко видеть и доказать, на основании

равенства треугольников, что отрезок DE равен AB и перпендикулярен к AD и к BE и что EF равен BC и перпендикулярен к BE и к CF. Но AB $(=DE)$ есть кратчайшее расстояние между прямыми AD и BE; это расстояние сохраняет постоянную величину. Поэтому

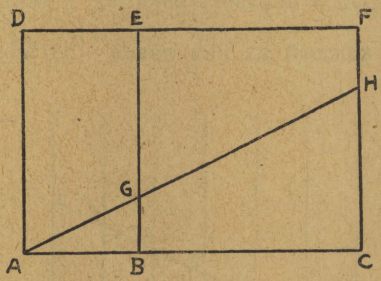

Рис. 58

AD и BE никогда не могут встретиться, т. е. они параллельны. Отсюда заключаем, что прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны между собой.

Два угла BAD и EBA вместе равны двум прямым углам. Если вращать прямые AD и BE около A и B навстречу друг другу, то они встретятся, и сумма внутренних углов будет меньше двух прямых. При продолжении же в другую сторону эти прямые не будут встречаться. В этом и заключается столь известный двенадцатый постулат Евклидовых Начал.

169. Если некоторая прямая AGH встречает BE в G и CF в H, то

$$\angle GAD = \text{накрест лежащему } \angle AGB,$$

так как каждый из них есть дополнение $\angle BAG$; а

$$\angle HGE = \text{соответственному } \angle GAD.$$

Поэтому каждый из них равен $\angle AGB$.

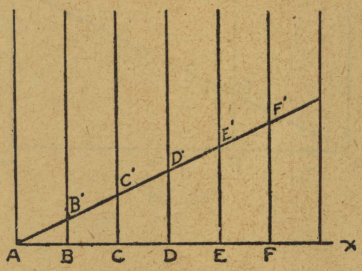

Рис. 59

Следовательно, два угла GAD и EGA вместе равны двум прямым.

170. Возьмите прямую AX и отметьте на ней, начиная от A, равные отрезки AB, BC, CD, DE... Восставьте в точках B, C, D, E... перпендикуляры к AE. Пусть некоторая прямая AF' пересекает эти перпендикуляры в точках B', C', D', E'... Получившиеся отрезки AB', $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$... все равны между собой,

Если AB, BC, CD, DE не равны, то

$$AB : BC = AB' : B'C',$$

$$BC : CD = B'C' : C'D' \text{ и т. д.}$$

171. Если $ABCDE\ldots$ представляет некоторый многоугольник, то подобные ему многоугольники могут быть получены следующим образом.

Возьмите внутри многоугольника какую-нибудь точку O и проведите линии OA, OB, $OC\ldots$

На OA возьмите какую-нибудь точку A' и проведите линии $A'B'$, $B'C'$, $C'D'\ldots$ параллельно AB, BC, $CD\ldots$ Полученный многоугольник $A'B'C'D'\ldots$ будет подобен многоугольнику $ABCD\ldots$ Многоугольники, построенные таким образом вокруг общей точки, находятся в перспективном отношении между собой. Точка O может лежать и вне многоугольника. Она называется центром перспективы.

172. Разделить данный отрезок на 2, 3, 4, 5... равных частей. Пусть AB есть данный отрезок. Проведите перпендикулярно к AB, в разные от нее стороны, прямые AC и BD и отложите $AC = BD$. Соедините C и D прямой, пересекающей AB в P_2. В таком случае $AP_2 = P_2B$.

Теперь продолжите AC и отложите $CE = EF = FG = \cdots = AC$ или BD. Проведите линии DE, DF, $DG\ldots$; пусть они пересекают AB в точках P_3, P_4, $P_5\ldots$

Из подобия треугольников получится

$$P_3B : AP_3 = BD : AE.$$

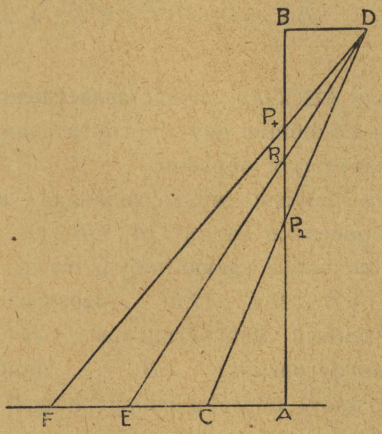

Рис. 60

Отсюда

$$P_3B : AB = BD : AF = 1 : 3.$$

Подобным же образом

$$P_4B : AB = 1 : 4$$

и т. д.

Если

$$AB = 1,$$

то

$$AP_2 = \frac{1}{1.2};$$

$$P_2P_3 = \frac{1}{2.3};$$

$$P_3P_4 = \frac{1}{3.4};$$

. . . . . .

$$P_nP_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)};$$

Но $AP_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \cdots$ в окончательной сумме равняется AB.

Поэтому

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots \text{ до } \infty = 1.$$

Или еще

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2};$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3};$$

. . . . . .

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Складывая, находим:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}.$$

Предел $1-\frac{1}{n}$ при $n=\infty$ равен 1.

173. Следующий простой прием может быть употреблен для деления отрезка на произвольное число равных частей.

Возьмите прямоугольный кусок бумаги и отметьте n равных отрезков на каждой или на одной из двух смежных сторон. Перегните бумагу чрез точки деления так, чтобы получить перпендикуляры к сторонам. Отметьте точки деления и углы цифрами 0, 1, 2, ... n. Пусть требуется разделить сторону другого куска бумаги AB на n равных частей. Для этого поместите AB так, чтобы точка A или B находилась в 0, а B или A лежала на перпендикуляре, проходящем чрез n.

В этом случае отрезок AB должен быть больше ON. Но для меньших отрезков можно взять меньшую сторону прямоугольника.

Те точки, в которых AB пересекает перпендикуляры, и суть искомые точки деления.

174. Центр среднего положения. Если прямая AB содержит $(m+n)$ равных частей и делится в точке C так, что AC содержит m, а CB содержит n этих частей, то, опустив из точек A, C, B на некоторую прямую перпендикуляры AD, CF и BE, получим

$$m.BE+n.AD=(m+n).CF.$$

В самом деле, проведите параллельно ED прямую BGH, которая пересечет CF в G и AD в H. Предположите, что чрез точки деления AB проведены прямые параллельно BH. Эти прямые разделят AH на $(m+n)$, а CG на n равных частей.

Поэтому

$$n.AH=(m+n).CG;$$

и так как DH и BE равны GF каждый, то

$$n.HD+m.BE=(m+n)GF.$$

Отсюда, складывая, получаем

$$n.(AH+HD)+m.BE=(m+n).(CG+GF),$$

или

$$n.AD+m.BE=(m+n).CF.$$

C называется центром среднего положения или средним центром точек A и B для системы кратных m и n.

Этот принцип можно распространить и на случай любого числа точек, не лежащих на одной прямой.

В этом случае, если P будут обозначать основания перпендикуляров, опущенных на какую-нибудь прямую из точек A, B, C и т. д., если a, b, c, ... суть соответствующие множители кратности, а M есть средний центр, то

$$a \,.\, AP + b \,.\, BP + c \,.\, CP + \cdots = (a + b + c + \cdots) \,.\, MP.$$

Если все множители равны a, то

$$a(AP + BP + CP + \cdots) = na \,.\, MP,$$

где n есть число точек.

175. Центр среднего положения нескольких точек с равными множителями получается следующим образом. Найдите средину G прямой, соединяющей две какие-нибудь точки A и B, соедините G с какой-нибудь третьей точкой C и разделите GC в H так, чтобы $GH = {}^1/_3\, GC$; соедините H с четвертой точкой D и разделите HD в K так, чтобы $HK = {}^1/_4\, HD$, и т. д.: последняя найденная таким образом точка и будет центром среднего положения данной системы точек.

176. Понятие о среднем центре или центре среднего положения заимствовано из статики, ибо система материальных точек, помещенных в A, B, C, ... и обладающих весами a, b, c, ..., была бы в равновесии около среднего центра M, еслибы могла свободно вращаться около M под действием силы тяжести.

Поэтому средний центр находится в тесной связи с центром тяжести статики.

177. Средний центр трех точек, не лежащих на одной прямой, совпадает с пересечением медиан треугольника, имеющего вершины в этих трех точках. Он является также центром тяжести или центром массы тонкой треугольной пластинки равномерной плотности.

178. Если M есть средний центр точек $A, B, C, \ldots$ для множителей $a, b, c, \ldots$, а P какая-нибудь другая точка, то

$$a \,.\, AP^2 + b \,.\, BP^2 + c \,.\, CP^2 + \cdots = a \,.\, AM^2 + b \,.\, BM^2 + \\ + c \,.\, CM^2 + \cdots + PM^2 (a + b + c + \cdots).$$

Поэтому в правильном многоугольнике, если O есть центр вписанного или описанного круга, а P какая-нибудь точка, то

$$AP^2 + BP^2 + \cdots = OA^2 + OB^2 + \cdots + n \,.\, OP^2 = \\ = n \,.\, (R^2 + OP^2).$$

Отсюда

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + \quad \cdot = 2n \,.\, R^2.$$

Подобным же образом

$$BA^2 + BC^2 + BD^2 + \cdots = 2n \,.\, R^2,$$
$$CA^2 + CB^2 + CD^2 + \cdots = 2n \,.\, R^2 \text{ и т. д.}$$

Складывая, находим:

$$2(AB^2 + AC^2 + AD^2 + \cdots) = n \,.\, 2n \,.\, R^2.$$

Отсюда

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + \cdots = n^2 . R^2.$$

179. Сумма квадратов отрезков, соединяющих средний центр с точками системы, представляет минимум.

Если M есть средний центр, а P какая-нибудь другая точка, не принадлежащая к этой системе, то

$$\Sigma PA^2 = \Sigma MA^2 + \Sigma PM^2$$

(где Σ стоит вместо слов: „сумма всех выражений типа").

Отсюда следует, что ΣPA^2 представляет минимум, когда $PM = 0$, т. е. когда P есть средний центр.

180. Свойства пересечений прямых и коллинеарности точек могут быть поверены при помощи складывания бумаги. Приведем несколько примеров:

1) Медианы треугольника встречаются в одной точке. Эта точка называется центроидом.

2) Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

3) Перпендикуляры к срединам сторон треугольника встречаются в одной точке, называемой центром описанного круга.

4) Биссектрисы углов треугольника проходят чрез одну точку. Эта точка называется центром вписанного круга.

5) Пусть $ABCD$ будет некоторый параллелограмм, а P какая-нибудь точка. Проведите чрез P параллельно

BC и *AB* прямые *GH* и *EF*. Тогда диагонали *EG*, *HF* и прямая *DB* пересекутся в одной точке.

6) Если две подобные, но неравные прямолинейные фигуры расположены таким образом, что их соответственные стороны параллельны, то прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке. Эта точка называется центром подобия.

7) Если два треугольника расположены таким образом, что их вершины лежат попарно на пересекающихся прямых, то точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой. Это положение известно под именем теоремы Дезарга. О таких двух треугольниках говорят, что они находятся в перспективном отношении. Точка пересечения прямых, проходящих чрез вершины, и прямая, соединяющая точки пересечения сторон, называются центром и осью перспективы.

8) Средины диагоналей полного четыреугольника лежат на одной прямой.

9) Если из какой-нибудь точки окружности, описанной около треугольника, опустить на его стороны (или их продолжения, если надо) перпендикуляры, то основания их будут лежать на одной прямой. Эта прямая называется прямой Симсона.

Симсонова прямая делит пополам прямую, соединяющую ортоцентр с той точкой, из которой опущены перпендикуляры.

10) Ортоцентр, центр описанного круга и центроид всякого треугольника лежат на одной прямой.

Средина прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанного круга, есть центр т. наз. „круга девяти точек“; это название объясняется тем, что он проходит чрез основания высот и медиан треугольника и чрез средины частей высот, заключенных между ортоцентром и вершинами.

Центр круга девяти точек вдвое дальше от ортоцентра, чем от центроида. В этом состоит теорема Понселя.

11) Если какие-нибудь шесть точек окружности A, B, C, D, E, F соединить последовательно в произвольном порядке, то точки пересечения первой соединительной прямой с четвертой, второй с пятой и третьей с шестой (продолженных, если надо) лежат на одной прямой. Эта теорема принадлежит Паскалю.

12) Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания его со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке. Тем же свойством обладают вневписанные окружности.

13) Внутренние биссектрисы двух углов треугольника и внешняя биссектриса третьего угла пересекают противоположные стороны в точках, лежащих на одной прямой.

14) Внешние биссектрисы углов треугольника пересекают противоположные стороны в точках, лежащих на одной прямой.

15) Прямые, проведенные чрез какую-нибудь точку перпендикулярно к прямым, соединяющим эту же точку с вершинами какого-нибудь треугольника, встречают

противоположные стороны треугольника в точках, лежащих на одной прямой.

16) Если взять какую-нибудь точку O на оси симметрии двух равных треугольников ABC, $A'B'C'$, то прямые $A'O$, $B'O$ и $C'O$ пересекают стороны BC, CA и AB в точках, лежащих на одной прямой.

17) Точки пересечения пар касательных к какому-нибудь кругу в концах хорд, проходящих чрез данную точку, лежат на одной прямой. Эта прямая называется полярой данной точки относительно данного круга.

18) Изогонально сопряженные прямые трех пересекающихся прямых AX, BX, CX по отношению к углам треугольника ABC пересекаются в одной точке. (Две прямые AX, AY называются изогонально сопряженными по отношению к углу BAC, если они составляют равные углы с его биссектрисой).

19) Если в треугольнике ABC прямые AA', BB', CC', проведенные из каждого угла к противоположной стороне, сходятся в одной точке, то их изотомические сопряженные относительно соответственных сторон также сходятся в одной точке. (Прямые AA', AA'' называются изотомическими сопряженными относительно стороны BC треугольника ABC, если отрезки BA' и CA'' равны между собой).

20) Три симмедианы треугольника пересекаются в одной точке. (Изогонально сопряженная медианы AM треугольника называется ее симмедианой).

XIII. Конические сечения

Отдел I.—Круг

181. Лист бумаги можно согнуть по многим направлениям, проходящим чрез одну и ту же точку. Точки, взятые на каждой такой прямой в одном и том же расстоянии от общей точки, будут лежать на окружности некоторого круга, а общая точка будет его центром. Круг есть геометрическое место точек, равноотстоящих от неподвижной точки, его центра.

182. Можно провести любое число концентрических кругов. Они не могут пересекаться.

183. Центр можно рассматривать, как предел концентрических кругов, описанных около него, как около центра, если величина радиуса беспредельно уменьшается.

184. Круги с равными радиусами могут быть совмещены и равны.

185. Кривизна круга одинакова по всей окружности. Поэтому, если вращать круг вокруг центра, то он будет скользить вдоль самого себя. Отношение к кругу какой-нибудь фигуры, неизменно связанной с центром, не изменится, если фигуру вращать около центра.

186. Прямая может пересекать круг только в двух точках.

187. Всякий диаметр делится в центре круга пополам. По длине он равен двум радиусам. Все диаметры, как и радиусы, равны между собой.

188. Центр круга есть в то же время его центр

симметрии; концы любого диаметра суть соответственные точки.

189. Каждый диаметр является осью симметрии круга и наоборот.

190. Предложения §§ 188, 189 верны и для систем концентрических кругов.

191. Каждый диаметр делит круг на две равные части, называемые полукругами.

192. Два взаимно перпендикулярных диаметра делят круг на четыре равные части, называемые квадрантами.

193. Деля пополам прямые углы, образуемые диаметрами, затем разделяя пополам эти половины прямых углов и т. д., получаем 2^n равных круговых секторов. Угол, образуемый радиусами каждого сектора, равен $\frac{4}{2^n}$ прямого угла или $\frac{2\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

194. Как было показано в предыдущих главах, прямой угол можно разделить на 3, 5, 9, 10, 12, 15 и 17 равных частей. И каждая часть прямого угла, полученная таким образом, может быть подразделена на 2^n равных частей.

195. Можно вписать круг в правильный многоугольник и описать около него. Первый круг будет касаться сторон многоугольника в их срединах.

196. Равные дуги стягивают равные углы при центре и наоборот. Доказать это можно помощью наложения. Если перегнуть круг по диаметру, то обе

полуокружности совпадают. Каждая точка одной полуокружности имеет на другой соответственную точку, лежащую под нею.

197. Каждые два радиуса образуют равнобедренный треугольник, основанием которого служит хорда, соединяющая концы радиусов.

198. Радиус, делящий пополам угол между двумя другими радиусами, перпендикулярен к хорде — основанию и делит ее пополам.

199. Если взять определенный диаметр, то можно провести сколько угодно таких пар радиусов, чтобы радиусы каждой пары были равно наклонены к диаметру по разные стороны от него. Хорды, соединяющие концы каждой такой пары радиусов, будут перпендикулярны к взятому диаметру; все такие хорды будут параллельны между собой.

200. Тот же диаметр делит пополам все упомянутые хорды и все дуги, стягиваемые этими хордами, т. е. геометрическое место средин системы параллельных хорд является диаметром.

201. Перпендикуляры к срединам всех хорд круга проходят чрез центр.

202. Равные хорды равно отстоят от центра.

203. Концы двух радиусов, равно наклоненных к диаметру по разные его стороны, находятся на одинаковом расстоянии от каждой точки этого диаметра. Следовательно, можно описать любое число кругов, проходящих чрез эти две точки, с центрами на этом

диаметре. Другими словами, геометрическим местом центров кругов, проходящих чрез две данные точки, является прямая, перпендикулярная к прямой, соединяющей обе точки, в ее средине.

204. Пусть CC' будет некоторая хорда, перпендикулярная к радиусу OA. В таком случае углы AOC и AOC' равны между собой. Предположите, что обе точки C, C' движутся с равной скоростью к A; тогда хорда CC' будет все всемя оставаться параллельной самой себе и перпендикулярной к OA. Наконец, точки C, A и C' совпадут в A, а CAC' остается перпендикулярной к OA. Точка A есть последняя точка, общая хорде и окружности. CAC', будучи продолжена, в конце концов обращается в касательную к кругу.

205. Касательная перпендикулярна к диаметру, проходящему чрез точку касания, и обратно.

206. Если две хорды круга параллельны, то дуги, соединяющие их концы сходным образом, равны. Так, например, равны дуги, соединяющие концы каждой хорды с диагонально противоположными концами второй хорды и проходящие чрез другие концы. Это легко видеть, перегнув круг по диаметру, перпендикулярному к параллельным хордам.

207. Две хорды (§ 206) и прямые, соединяющие их концы сходным образом, образуют трапецию, у которой имеется ось симметрии, а именно диаметр, перпендикулярный к параллельным хордам. Диагонали такой трапеции пересекаются на диаметре. Складыванием легко

убедиться в том, что углы между каждой из параллельных хорд и каждой диагональю трапеции равны между собой. Точно так же равны между собой углы, стягиваемые другими равными дугами.

208. Угол при центре круга, стягиваемый какой-нибудь дугой, вдвое больше угла с вершиной на окружности, стягиваемого тою же дугой.

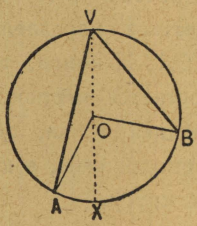

Рис. 61

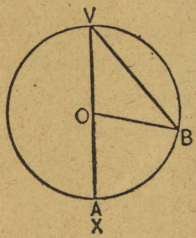

Рис. 62

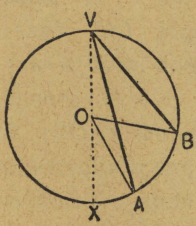

Рис. 63

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Даны вписанный угол AVB и центральный угол AOB, опирающиеся на одну и ту же дугу AB.

Доказать, что

$$\angle AVB = \tfrac{1}{2} \angle AOB.$$

Доказательство:

1. Предположите, что чрез центр O проведен диаметр VO, продолженный до пересечения с окружностью в точке X.

Тогда

$$\angle XVB = \angle VBO.$$

2. Но

$$\angle XOB = \angle XVB + \angle VBO = 2\angle XVB.$$

3. Отсюда следует, что

$$\angle XVB = \tfrac{1}{2}\angle XOB.$$

4. Подобным же образом

$$\angle AVX = \tfrac{1}{2}\angle AOX$$

(каждый из них = нулю на рис. 62), и, следовательно,

$$\angle AVB = \tfrac{1}{2}\angle AOB.$$

Доказательство относится одновременно ко всем трем чертежам, на которых точка A переходит в X (рис. 62) и затем далее за X (рис. 63).

209. Углы, стягиваемые одинаковой дугой, во всех частях окружности имеют одну и ту же величину, так как центральный угол остается одним и тем же.

210. Угол, вписанный в полукруг, равен прямому углу.

211. Если хорда DC перпендикулярна к диаметру круга AB, то для четыреугольника $ACBD$ диаметр AB является осью симметрии. Так как каждый из углов BCA и ADB есть прямой, то сумма двух других углов, DBC и CAD, равна двум прямым углам. Если A' и B' суть какие-нибудь другие точки на дугах DAC и CBD,

то $\angle CAD = \angle CA'D$, $\angle DBC = \angle DB'C$. Следовательно, $\angle CA'D + \angle DB'C =$ двум прямым углам. Поэтому и $\angle B'CA' + \angle A'DB' =$ двум прямым углам.

Обратно, если сумма двух противоположных углов четыреугольника равна двум прямым, то его можно вписать в круг.

212. Угол между касательной к кругу и хордой, проходящей чрез точку касания, равен углу, который опирается на эту хорду и вершина которого лежит на стороне круга, противоположной дуге круга, заключающейся между касательной и хордой.

Пусть AC будет касательная к кругу в A, а AB какая-нибудь хорда. Возьмите центр O круга и проведите OA и OB. Из O опустите на AB перпендикуляр OD

Тогда

$$\angle BAC = \angle AOD = \tfrac{1}{2} \angle BOA.$$

213. Перпендикуляры к концам радиусов касаются круга в этих концах (рис. 64). Прямая, соединяющая центр с точкой пересечения двух касательных, делит пополам углы между этими касательными и между радиусами к точкам касания. Та же прямая делит пополам прямую, соединяющую точки касания. Обе касательные равны.

В этом нетрудно убедиться, перегибая чертеж чрез центр и точку пересечения касательных.

Пусть AC, AB будут две касательные, а $ADEOF$ прямая, проходящая чрез точку пересечения касательных A

и чрез центр O и пересекающая круг в точках D и F, а прямую BC в точке E.

В таком случае AC или AB является средним гео-

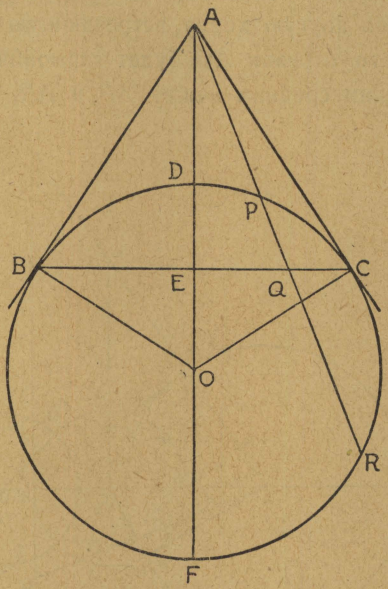

Рис. 64

метрическим между AD и AF, AE есть среднее гармоническое, AO среднее арифметическое.

$$AB^2 = AD \,.\, AE$$

$$AB^2 = OA \,.\, AF.$$

Поэтому

$$AE = \frac{AD \cdot AF}{OA} = \frac{2AD \cdot AF}{AD + AF}.$$

Подобным же образом, если через A провести какую-нибудь другую хорду, встречающую круг в P и R, а BC в Q, то отрезок AQ будет гармоническим, а AC геометрическим средним между AP и AR.

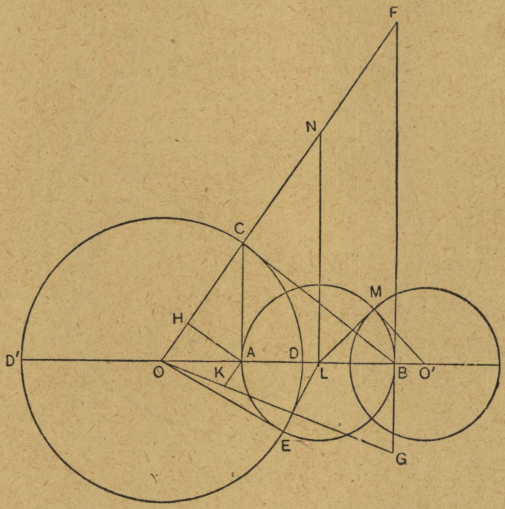

Рис. 65

214. Перегните прямоугольный треугольник OCB по CA перпендикулярно к его гипотенузе. Найдите на AB такую точку D, чтобы $OD = OC$ (рис. 65).

Тогда

$$OA \,.\, OB = OC^2 = OD^2,$$

откуда

$$OA : OC = OC : OB,$$
$$OA : OD = OD : OB.$$

Опишем круг с центром в O и радиусом, равным OC или OD.

Точки A и B являются взаимно-обратными по отношению к центру обращения O и к кругу обращения CDE.

Поэтому, если взять центр этого круга за начало координат, то для основания ординаты какой-нибудь точки круга обратной точкой будет точка пересечения касательной и оси абсцисс.

215. Согните по FBG перпендикулярно к OB. Прямая FBG носит название поляры точки A по отношению к полярному кругу CDE и полярному центру O, а точка A называется полюсом прямой FBG. Обратно, B есть полюс CA, а CA есть поляра B относительно того же круга.

216. Продолжите OC до встречи с FBG в F и перегните по AH перпендикулярно к OC.

Точки F и H являются взаимно-обратными.

AH есть поляра F, а перпендикуляр к OF в F является полярой точки H.

217. Точки A, B, F, H лежат на одной окружности; другими словами, две точки и их взаимно-обратные точки лежат на одной окружности и наоборот.

Теперь возьмите на FBG какую-нибудь другую точку G. Проведите OG и перегните по AK перпендикулярно к OG. Точки K и G будут взаимно-обратны относительно круга CDE.

218. Точки F, B, G лежат на одной прямой, а их поляры проходят чрез одну точку A.

Итак, поляры коллинеарных точек сходятся в одной точке.

219. Точки, расположенные так, что каждая из них лежит на поляре другой, называются сопряженными точками; прямые, расположенные таким образом, что каждая проходит чрез полюс другой, называются сопряженными прямыми.

A и F суть сопряженные точки, как и A и B, A и G.

Точка пересечения поляр двух точек служит полюсом прямой, соединяющей эти две точки.

220. Если A перемещается к D, то и B движется к D. В конце концов A и F совпадают, а FBG становится касательной в B.

Поэтому поляра какой-нибудь точки круга есть в то же время касательная к кругу в этой же точке.

221. Если A движется обратно к O, то B удаляется в бесконечность. Поляра центра обращения или полярного центра есть бесконечно-удаленная прямая.

222. Угол между полярами двух точек равен углу при полярном центре, опирающемуся на эти две точки.

223. Круг, описанный из B, как центра, радиусом BC, пересекает круг CDE ортогонально.

224. Разделите AB пополам точкой L и перегните по LN перпендикулярно к AB. Центры всех кругов, проходящих чрез A и B, будут лежать на этой прямой. Эти круги пересекают круг CDE ортогонально. Такими кругами являются, между прочим, круги, описанные около четыреугольников $ABFH$ и $ABGK$. Отрезки AF и AG являются диаметрами этих кругов соответственно. Из этого следует, что, если два круга пересекают друг друга ортогонально, то концы какого-нибудь диаметра одного из них являются сопряженными точками по отношению к другому кругу.

225. Точки O, A, H и K лежат на одной окружности. Так как H, A и K взаимно-обратны с точками, лежащими на прямой FBG, то линией, обратною некоторой прямой, является круг, проходящий чрез центр круга обращения и чрез полюс этой прямой, причем эти точки будут концами его диаметра; и обратно.

226. Если продолжение DO встречает круг CDE в D', то D и D' гармонически сопряжены с A и B. Подобным же образом, если какая-нибудь прямая, проходящая чрез B, пересекает AC в A', а круг CDE в d и d', то d и d' представляют гармонические сопряженные точек A' и B.

227. Отложите в каком-нибудь направлении $LM = LB = LA$ и согните по MO' перпендикулярно к LM; пусть этот перпендикуляр пересечет продолжение AB в точке O'.

Круг, описанный около O', как центра, радиусом $O'M$,

пересечет круг с центром в L и с радиусом LM ортогонально.

Но

$$OL^2 = OE^2 + LE^2$$

и

$$O'L^2 = O'M^2 + LM^2;$$

поэтому

$$OL^2 - O'L^2 = OE^2 - O'M^2$$

и, следовательно, LN является радикальной осью кругов $O(OC)$ и $O'(O'M)$.

Беря другие точки на полуокружности AMB и повторяя то же самое построение, мы получим две системы бесконечного числа кругов, соосных с $O(OC)$ и $O'(O'M)$, а именно, по одной системе с каждой стороны радикальной оси LN. Точечным кругом каждой системы является точка A или B, которую можно рассматривать, как круг бесконечно-малого радиуса.

Эти две бесконечные системы кругов можно рассматривать, как одну соосную систему, круги которой составляют непрерывный ряд от бесконечно-большого до бесконечно-малого круга, причем радикальная ось является бесконечно-большим, а предельные точки бесконечно-малыми кругами. Эта система соосных кругов называется предельно-точечным образом.

В двух пересекающихся кругах общая хорда является их радикальной осью. Поэтому все круги, проходящие чрез A и B, оказываются соосными. Эта

система соосных кругов называется образом общей точки.

228. Возьмите две прямые OAB и OPQ. Из точек A и B прямой OAB опустите перпендикуляры AP и BQ на прямую OPQ. Круги, описанные около A и B радиусами AP и BQ, касаются прямой OPQ в P и Q. Поэтому

$$OA : OB = AP : BQ.$$

Это соотношение имеет место как в том случае, когда перпендикуляры направлены в одну сторону, так и тогда, когда они лежат по разные стороны от OAB. Касательная в первом случае является внешней, а во втором внутренней.

В первом случае O лежит вне AB, во втором между A и B. В первом случае O называется внешним, а во втором внутренним центром подобия обоих кругов.

229. Прямая, соединяющая концы двух параллельных между собой радиусов двух кругов, проходит чрез центр подобия кругов: внешний, если радиусы направлены в одну сторону, внутренний, если они имеют противоположные направления.

230. Два радиуса какого-нибудь круга, проведенные в точки пересечения этого круга с какой-нибудь прямой, проходящей чрез тот или другой центр подобия, соответственно параллельны двум радиусам другого круга, проходящим чрез точки его пересечения с той же самой прямою.

231. Все секущие, проходящие чрез центр подобия двух кругов, рассекаются этими кругами на пропорциональные части.

232. Если B_1, D_1 и B_2, D_2 суть точки пересечения, причем B_1, B_2 и D_1, D_2 являются соответственными точками, то

$$OB_1 \cdot OD_2 = OD_1 \cdot OB_2 = OC_2^2 \cdot \frac{X_1C_1}{X_2C_2}.$$

Отсюда видно, что обращение круга, не проходящего чрез центр обращения, дает снова круг.

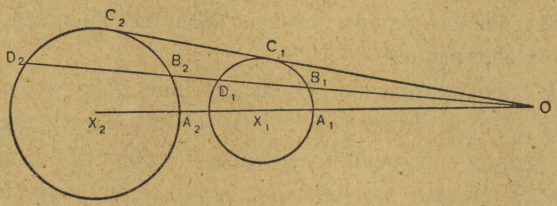

Рис. 66

Центр обращения есть центр подобия первоначального круга и обратного ему.

Первоначальный круг, круг ему обратный и круг обращения оказываются соосными.

233. Метод обращения является одним из наиболее важных в геометрии. Он был открыт докторами Стёббсом и Инграмом (Stubbs, Ingram), членами Trinity College, в Дублине, около 1842 г. Этот метод был употреблен

сэром Виллиамом Томсоном для геометрического доказательства некоторых из наиболее трудных теорем математической теории электричества.

Отдел II.—Парабола

234. Параболой называется кривая, описываемая точкой, которая движется по плоскости таким образом, что ее расстояние от данной точки постоянно равно ее расстоянию от данной прямой.

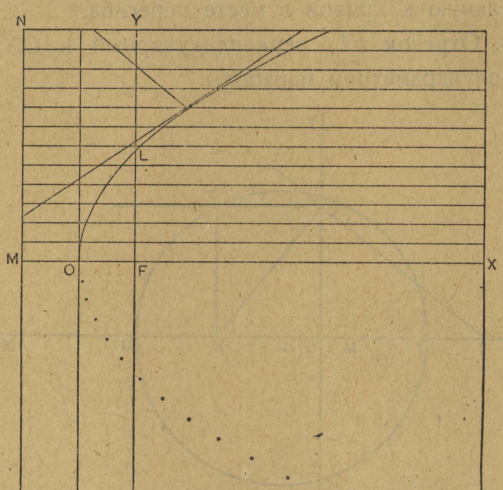

Рис. 67

235. Рис. 67 показывает, как можно получить параболу на бумаге. Сторона квадрата *MN* служит директри-

сой, O вершиной, F фокусом. Перегибая по OX, вы получите ось. Верхнюю половину квадрата разделите на несколько частей прямыми, параллельными оси. Эти прямые встречают директрису в известных точках. Перегибайте бумагу, совмещая каждую из этих точек с фокусом, и отмечайте каждый раз ту точку на соответствующей горизонтальной прямой, в которой последняя перегибается. Полученные таким образом точки будут лежать на параболе. Перегибание дает в то же время и касательную к кривой в месте перегиба.

236. Отрезок FL, перпендикулярный к OX, называется полупараметром параболы.

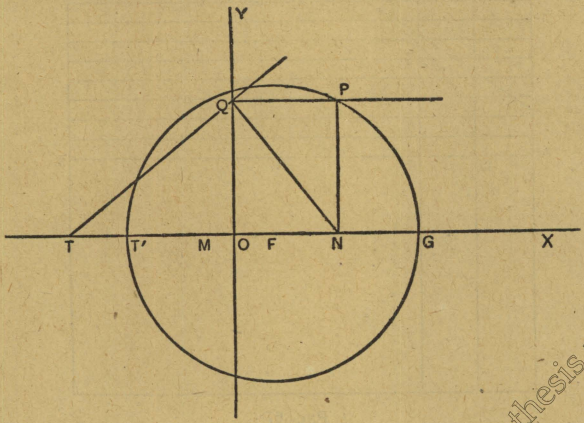

Рис. 68

237. Получив точки верхней половины кривой, можно получить и соответствующие точки нижней

половины, складывая бумагу вдвое по оси и прокалывая ее в уже найденных точках.

238. Если ось параболы и ее касательную в вершине принять за оси координат, то уравнение параболы получит такой вид:

$$y^2 = 4ax \text{ или } PN^2 = 4 \,.\, OF \,.\, ON.$$

Параболу можно определить, как кривую, описываемую точкой, которая движется по плоскости таким образом, что квадрат ее расстояния от данной прямой изменяется так же, как ее расстояние от некоторой другой прямой; или так, что ордината является средней пропорциональной между абсциссой и параметром (latus rectum), который равен $4 \,.\, OF$. Отсюда следующее построение.

Возьмите на продолжении FO отрезок $OT = 4 \,.\, OF$.

Разделите TN пополам в M.

На OY возьмите Q так, чтобы $MQ = MN = MT$.

Перегните чрез Q по QP, перпендикулярно к OY.

Пусть P будет точка пересечения QP с ординатой точки N.

P будет точкой кривой.

239. Субнормаль $= 2 \,.\, OF$, а $FP = FG = FT'$.

Эти свойства наводят на следующее построение.

Возьмите на оси какую-нибудь точку N.

От N со стороны, противоположной вершине, отложите $NG = 2 \,.\, OF$.

Перегните по NP перпендикулярно к OG и найдите на NP точку P, для которой $FP = FG$.

Точка P принадлежит кривой.

Из центра F можно описать круг, проходящий чрез G, P и T'.

Удвоенная ордината этого круга есть в то же время удвоенная ордината параболы, т. е. в то время как N движется вдоль оси, P описывает параболу.

240. Возьмите между O и F (рис. 69) какую-нибудь точку N'. Согните по $RN'P'$ перпендикулярно к OF.

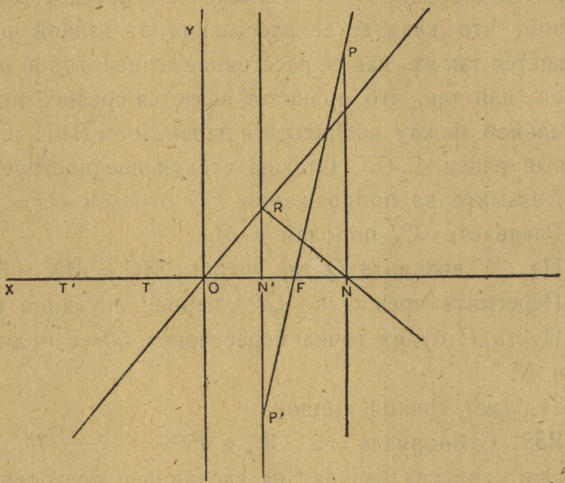

Рис. 69

Найдите такую точку R, чтобы $OR = OF$.

Сложите по RN перпендикулярно к OR, где N лежит на оси. Перегните по NP перпендикулярно к оси.

На OX отложите $OT = ON'$.

На RN' найдите P', для которой $FP' = FT$.

Перегните по $P'F$ и этим перегибом определите точку P на NP.

Точки P и P' принадлежат кривой.

241. N и N' совпадают, если PFP' равно параметру.

Если N' перемещается от F к O, то N движется от F в бесконечность.

В то же время T движется к O, а T' ($OT' = ON$) удаляется в противоположном направлении в бесконечность.

242. Найти площадь, ограниченную параболой, осью и какой-нибудь ординатой.

Дополните прямоугольник $ONPK$. Пусть отрезок OK будет разделен на n равных частей; предположим, что в Om таких частей заключается r и что mn представляет $(r+1)$-ую часть. Проведите перпендикулярно к OK прямые mp и nq, которые пересекут параболу в p и q; проведите pn' перпендикулярно к nq. Криволинейная площадь OPK есть предел суммы ряда прямоугольников, построенных подобно mn' на частях, соответствующих mn.

Но

$$\square pn : \square NK = pm \,.\, mn : PK \,.\, OK,$$

а по свойству параболы

$$pm : PK = Om^2 : OK^2 = r^2 : n^2$$

и

$$mn : OK = 1 : n.$$

Отсюда

$$pm \,.\, mn : PK \,.\, OK = r^2 : n^3$$

и

$$\square pn = \frac{r^2}{n^3} \times \square NK.$$

Поэтому сумма ряда таких прямоугольников

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} \times \square NK =$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, n^3} \times \square NK =$$

$$= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, n^3} \times \square NK =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \times \square NK =$$

$= \frac{1}{3} \square NK$ в пределе, т. е. для $n = \infty$.

Криволинейная площадь $OPK = \frac{1}{3}$ площади $\square NK$, а следовательно, параболическая площадь $OPN = \frac{2}{3} \square NK$.

243. Такой же способ доказательства применяется и для нахождения параболической площади, ограниченной какими-нибудь диаметром и ординатой.

Отдел III.—Эллипс

244. Эллипсом называется кривая, которую описывает точка, движущаяся по плоскости так, что ее расстояние от данной точки находится в постоянном,

меньшем единицы, отношении к ее расстоянию от данной прямой.

Пусть F будет фокус, OY директриса, XX' перпендикуляр к OY в точке F. Пусть $FA:AO$ и есть указанное постоянное отношение, причем FA меньше AO. Здесь A есть точка эллипса, называемая вершиной.

Как в § 116, найдите на XX' такую точку A', чтобы

$$FA' : A'O = FA : AO.$$

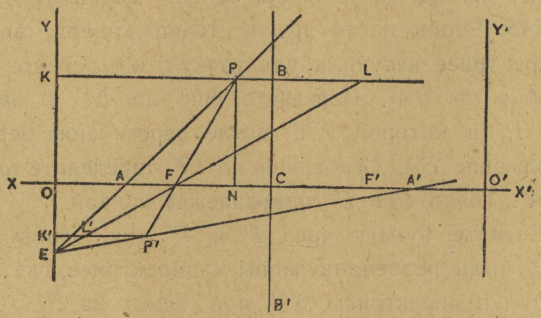

Рис. 70

Такая точка A' тоже принадлежит эллипсу и представляет его вторую вершину.

Перегните отрезок AA' вдвое; вы получите его средину C, называемую центром; отметьте F' и O', соответствующие F и O. В O' перегните по $O'Y'$ перпендикулярно к XX'. Точка F' представляет второй фокус, а $O'Y'$ вторую директрису.

Перегнув, проведите чрез C перпендикуляр к AA'.

$$FA : AO = FA' : A'O = (FA + FA') : (AO + A'O) =$$
$$= AA' : OO' = CA : CO.$$

На перпендикуляре чрез C возьмите точки B, B' по разные стороны от C и на таком расстоянии, чтобы FB и FB' равнялись каждый CA. Эти точки B, B' принадлежат кривой.

AA' называется большой, а BB' малой осью.

245. Чтобы найти другие точки кривой, возьмите на директрисе какую-нибудь точку E и перегните бумагу по EA и по EA'. Перегните еще по EF и отметьте точку P, в которой FA' после перегибания пересечет продолжение EA. Сгибанием по PF определите точку P' на EA'. Точки P и P' принадлежат кривой.

Согните бумагу чрез P и P' так, чтобы KPL и $K'L'P'$ были перпендикулярны к директрисе, где K и K' суть точки директрисы, а L и L' лежат на EL.

FL делит угол $A'FP$ пополам, следовательно,

$$\angle LEP = \angle PLF \quad \text{и} \quad FP = PL.$$

Далее,

$$FP : PK = PL : PK = FA : AO.$$

Подобным же образом

$$FP' : P'K' = P'L' : P'K' = FA' : A'O = FA : AO.$$

Если $EO = FO$, то FP перпендикулярно к FO и $FP = FP'$. Отрезок PP' есть параметр.

246. Когда найдено несколько точек левой половины кривой, то соответствующие точки другой половины можно найти, складывая бумагу вдвое вдоль малой оси и прокалывая ее в уже найденных точках.

247. Эллипс может быть определен еще и таким образом:

Если точка P движется так, что отношение $PN^2 : AN . NA'$ сохраняет постоянное значение, где PN представляет расстояние точки P от прямой, соединяющей две неподвижные точки A и A', а N лежит между A и A', то геометрическое место P есть эллипс, для которого AA' есть ось.

248. Для круга $PN^2 = AN . NA'$.

Для эллипса $PN^2 : AN . NA'$ представляет постоянное отношение.

Это отношение может быть меньше или больше единицы. В первом случае $\angle APA'$ тупой, а кривая лежит внутри вспомогательного круга, описанного около AA', как диаметра. Во втором случае $\angle APA'$ острый, и кривая лежит вне указанного круга. В первом случае AA' служит большой, а во втором малой осью.

249. Данное выше определение отвечает уравнению

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

причем начало координат находится в вершине эллипса.

250. $AN \cdot NA'$ равняется квадрату, построенному на ординате QN вспомогательного круга, и $PN : QN = BC : AC$.

251. Рис. 71 показывает, как можно определить точки, когда указанное постоянное отношение меньше единицы. Отложите $CD = AC$, т. е. большой полуоси.

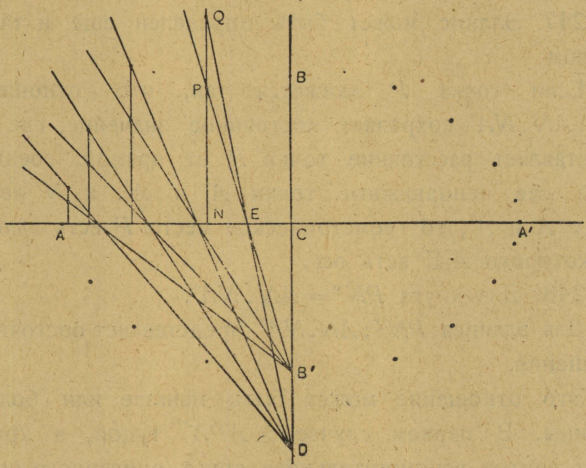

Рис. 71

Чрез какую-нибудь точку E на AC проведите прямую DE и продолжите ее до встречи со вспомогательным кругом в Q. Проведите прямую $B'E$ и продолжите ее до встречи с ординатой QN в P. Тогда

$$PN : QN = B'C : DC = BC : AC.$$

Такой же точно способ применим и в случае отношения,

бо́льшего единицы. Если точки одного квадранта найдены, то по ним легко найдутся соответственные точки других квадрантов.

252. Если P и P' суть концы двух сопряженных диаметров эллипса и ординаты MP и $M'P'$ встречают

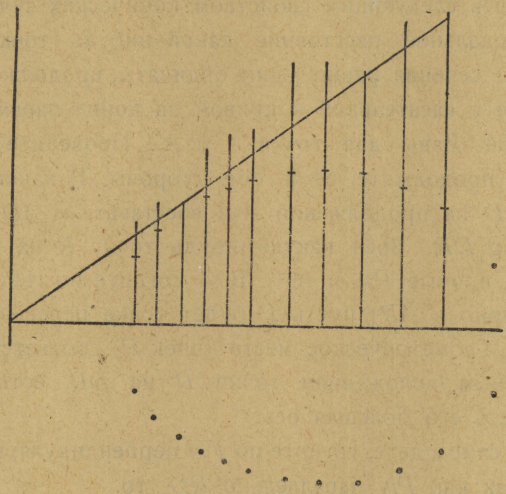

Рис. 72

вспомогательный круг в Q и в Q', то угол QCQ' есть прямой.

Возьмите теперь прямоугольный кусок картона или бумаги и отложите на двух смежных краях его, начиная от вершины их угла, отрезки, равные малой и большой оси. Вращая картон вокруг C, нанесите соответствующие точки внешнего и внутреннего вспомогательных кругов.

Пусть Q, R и Q', R' будут точки, лежащие на одной прямой. Согните по ординатам QM и $Q'M'$ и перпендикулярно к этим ординатам, по RP и $R'P'$. Точки P и P' принадлежат кривой.

253. Точки этой кривой можно также легко найти, пользуясь следующим свойством конических сечений.

Фокальное расстояние какой-нибудь точки конического сечения равно длине ординаты, продолженной до встречи с касательной к кривой на конце параметра.

254. Даны две точки A и A'. Проведите прямую AA' и продолжите ее в обе стороны. В какой-нибудь точке D на продолжении $A'A$ восставьте к AD перпендикуляр DR. Чрез какую-нибудь точку R на DR проведите прямые RA и RA'. В A согните по AP, перпендикулярно к AR; пусть P будет точка пересечения AP с RA'. Геометрическое место точек P, соответствующих различным положениям точки R на DR, есть эллипс; AA' есть его большая ось.

В самом деле, согните по PN перпендикулярно к AA'.

Так как PN параллельно RD, то

$$PN : A'N = RD : A'D.$$

С другой стороны, из треугольников APN и DAR

$$PN : AN = AD : RD.$$

Следовательно,

$$PN^2 : AN \,.\, A'N = AD : A'D,$$

т. е. равняется некоторой постоянной величине, меньшей

единицы; а из построения очевидно, что N должно лежать между A и A'.

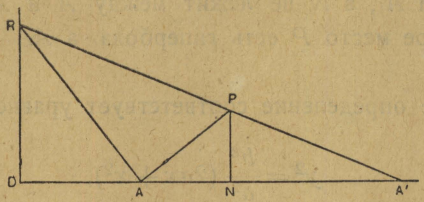

Рис. 73

Отдел IV.—Гипербола

255. Гиперболой называется кривая, описываемая точкой, которая движется по плоскости таким образом, что ее расстояние от данной точки находится в постоянном, большем единицы, отношении к ее расстоянию от данной прямой.

256. Построение здесь такое же, как и для эллипса, но расположение частей иное. Как объяснено в § 119, гл. X, A' лежит слева от директрисы. Каждая директриса проходит между A и A', а фокусы лежат вне этих точек. Кривая состоит из двух ветвей, открытых каждая с одной стороны. Эти ветви лежат целиком внутри двух вертикальных углов, образуемых двумя прямыми, проходящими чрез центр и называемыми асимптотами. Эти последние касаются кривой в бесконечности.

257. Гиперболу можно определить так: Если точка P движется таким образом, что отношение $PN^2 : AN . NA'$

сохраняет постоянную величину, — где PN есть расстояние P от прямой, соединяющей две неподвижные точки A и A', а N не лежит между A и A' — то геометрическое место P есть гипербола, а AA' ее поперечная ось.

Такое определение соответствует уравнению

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

где за начало координат принята лежащая справа вершина гиперболы.

Рис. 74 показывает, как можно найти точки этой кривой на основании последней формулы.

Пусть C есть центр и A вершина кривой.

$$CB' = CB = b;$$
$$CA' = CA = C''A = a.$$

Чрез C проведите, перегнув бумагу, какую-нибудь прямую CD и отложите на ней $CD = CA$. Согните по DN перпендикулярно к CD. Согните по NQ перпендикулярно к CA и отложите $NQ = DN$. Согните по прямой QA'', пересекающей CA в точке S. Согните по $B'S$, пересекающей QN в точке P.

Эта точка P принадлежит нашей кривой.

В самом деле, так как DN касается круга на диаметре AA', то

$$DN^2 = AN \cdot (2CA + AN);$$

но так как

$$QN = DN,$$

то

$$QN^2 = x(2a + x).$$

Затем

$$\frac{QN}{PN} = \frac{A''C}{B'C}.$$

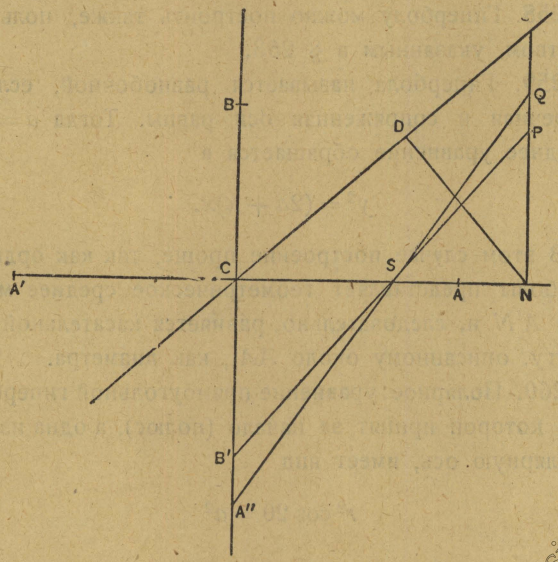

Рис. 74

Возводя в квадрат, находим:

$$\frac{x(2a + x)}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

или

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Если $QN = b$, то N есть фокус, а CD одна из асимптот. Если дополнить прямоугольник со сторонами AC и BC, то эта асимптота будет его диагональю.

258. Гиперболу можно построить также, пользуясь свойством, указанным в § 253.

259. Гипербола называется равнобочной, если ее поперечная и сопряженная оси равны. Тогда $a = b$, и последнее уравнение обращается в

$$y^2 = (2a + x)x.$$

В этом случае построение проще, так как ордината гиперболы представляет геометрическое среднее между AN и $A'N$ и, следовательно, равняется касательной из N к кругу, описанному около AA', как диаметра.

260. Полярное уравнение прямоугольной гиперболы, центр которой принят за начало (полюс), а одна из осей за полярную ось, имеет вид

$$r^2 \cos 2\theta = a^2$$

или

$$r^2 = \frac{a}{\cos 2\theta} \cdot a.$$

Пусть OX, OY будут оси; разделите прямой угол YOX на некоторое число равных частей. Пусть XOA, AOB

будут два из этих равных углов. Согните по XB перпендикулярно к OX. На продолжении BO отложите $OF = OX$. Согните по OG перпендикулярно к BF и найдите на OG такую точку G, чтобы угол FGB был прямым. Отложите $OA = OG$. Полученная точка A будет лежать на нашей кривой.

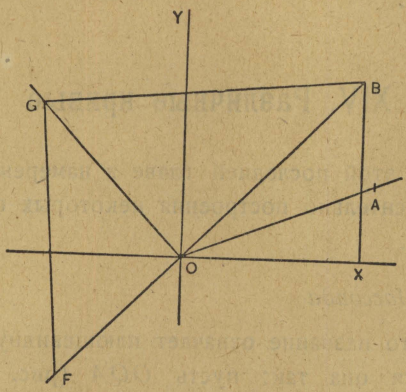

Рис. 75

В самом деле, так как каждый из углов XOA и AOB равен θ, то

$$OB = \frac{a}{\cos 2\theta}.$$

Поэтому

$$OA^2 = OG^2 = OB \,.\, OF = \frac{a}{\cos 2\theta} \cdot a,$$

следовательно,

$$r^2 \cos 2\theta = a^2.$$

261. Точки трисекции ряда сопредельных круговых дуг лежат на ветвях двух гипербол, эксцентрицитет которых равен 2. Эта теорема дает способ трисекции угла.

XIV. Различные кривые

262. В этой последней главе я намерен дать указания относительно построения некоторых общеизвестных кривых.

Циссоида

263. Это название означает плющевидную кривую Определяется она так: пусть OQA (рис. 76) будет полукруг на неподвижном диаметре OA и пусть QM и RN означают две ординаты этого полукруга, равноудаленные от центра. Проведите прямую OR, встречающую QM в точке P. Геометрическим местом таких точек P и будет циссоида.

Если $OA = 2a$, то уравнение кривой есть

$$y^2(2a - x) = x^3.$$

Пусть PR встречает в точке D перпендикуляр, восставленный в C.

Проведите линию AP, пересекающую CD в E.

$$RN : CD = ON : OC = AM : AC = PM : EC,$$

откуда следует, что

$$RN : PM = CD : CE.$$

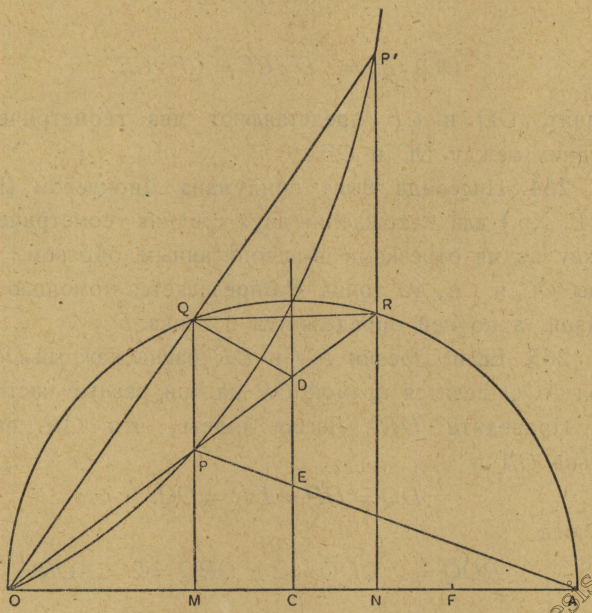

Рис. 76

С другой стороны,

$$RN : PM = ON : OM = ON : AN = ON^2 : NR^2 = OC^2 : CD^2.$$

Следовательно,

$$CD : CE = OC^2 : CD^2.$$

Если CF есть геометрическое среднее между CD и CE, то

$$CD : CF = OC : CD$$

и

$$OC : CD = CD : CF = CF : CE.$$

Значит, CD и CF представляют два геометрических средних между OC и CE.

264. Циссоида была придумана Диоклесом (II ст. до Р. Хр.) для нахождения двух средних геометрических между двумя отрезками вышеописанным образом. Если даны OC и CE, то точка P определяется помощью этой кривой, а по ней определяется и точка D.

265. Если отрезки PD и DR равны каждый OQ, то угол AOQ делится прямой OP на три равные части.

Проведите QR. Легко видеть, что QR параллельна OA и

$$DQ = DP = DR = OQ.$$

Отсюда

$$\angle ROQ = \angle QDO = 2 \angle QRO = 2 \angle AOR.$$

Конхоида

266. Эта кривая принадлежит Никомеду (около 150 г. до Р. Хр.). Пусть O будет неподвижная точка, a ее расстояние от некоторой неподвижной прямой DM.

Проведите чрез O пучок лучей, встречающих DM. На каждом из этих лучей отложите, по обе стороны от пересечения его с DM, по отрезку b. Геометрическое место определенных таким образом точек и есть конхоида. Смотря по тому, будет ли $b >, =$ или $< a$, начало представляет узел, острие или сопряженную точку. Наш рисунок изображает тот случай, когда $b > a$.

267. Этой кривой также пользовались для нахождения двух геометрических средних и для трисекции угла.

Пусть OA будет больший из тех двух отрезков, для которых требуется найти два геометрических средних.

Разделите OA пополам в B; из O, как из центра, опишите окружность радиусом OB. Чрез B проведите хорду BC, равную меньшему из двух данных отрезков. Проведите AC и продолжите AC и BC до точек D и E, лежащих на одной прямой с O и отстоящих друг от друга на расстояние $DE = OB$ или BA.

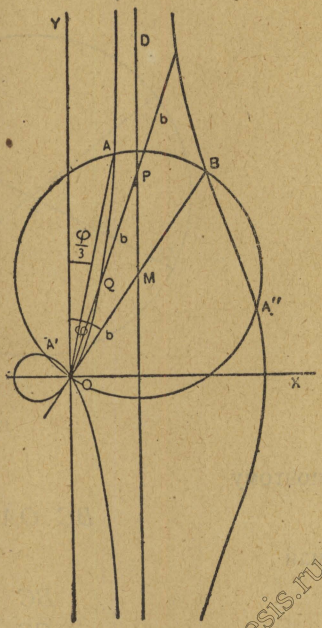

Рис. 77

Отрезки ED и CE и суть два искомых средних пропорциональных.

Пусть F и G будут точки пересечения OE с кругом.

На основании теоремы Менелая

$$BC \,.\, ED \,.\, OA = CE \,.\, OD \,.\, BA,$$

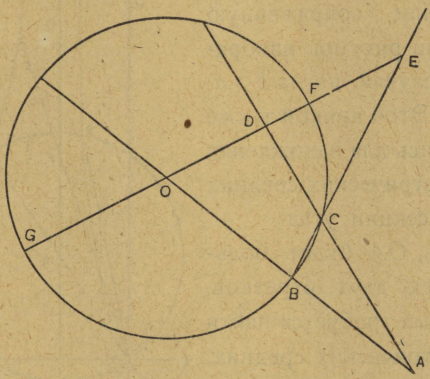

Рис. 78

поэтому

$$BC \,.\, OA = CE \,.\, OD$$

или

$$\frac{BC}{CE} = \frac{OD}{OA};$$

следовательно,

$$\frac{BE}{CE} = \frac{OD + OA}{OA} = \frac{GE}{OA}.$$

Но

$$GE \cdot EF = BE \cdot EC.$$

Поэтому

$$GE \cdot OD = BE \cdot EC,$$

$$OA \cdot OD = EC^2$$

и, наконец,

$$OA : CE = CE : OD = OD : BC.$$

Положение E найдено при помощи конхоиды, для которой AD служит асимптотой, O фокусом, а DE постоянным отрезком.

268. Трисекция угла выполняется таким образом. На рис. 77 пусть $\varphi = \angle MOY$, который требуется разделить на три части. На OM отложите произвольный отрезок $OM = b$. Из центра M радиусом b опишите круг и проведите чрез M перпендикулярно к оси X, имеющей начало в O, вертикальную прямую, представляющую асимптоту конхоиды, которую надо построить. Постройте конхоиду. Соедините O с A, т. е. с пересечением круга и конхоиды. Полученный $\angle AOY$ равен одной трети φ.

Версьера *)

269. Если OQA (рис. 79) представляет полукруг, NQ одну из его ординат, и отрезок NP равен четвертой

*) По имени нашедшей ее эту линию называют также *аньезьерой*. *Прим. пер.*

пропорциональной к ON, OA и QN, то геометрическое место точек P есть версьера.

Согните по AM перпендикулярно к OA.

Согните чрез O, Q и M.

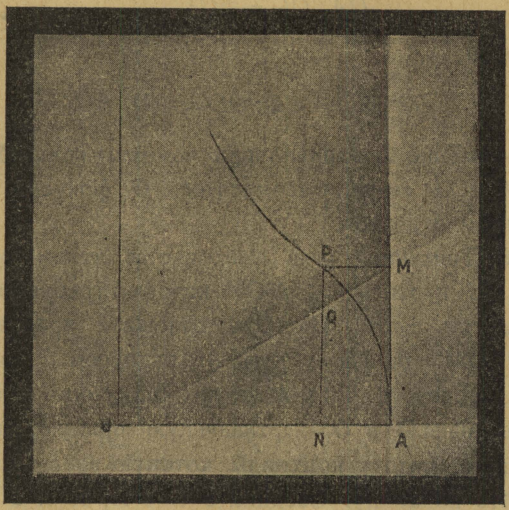

Рис. 79

Дополните прямоугольник $NAMP$.

$$PN : QN = OM : OQ = OA : ON.$$

Точка P есть одна из точек нашей кривой. Ее уравнение есть

$$xy^2 = a^2(a - x).$$

Эта кривая была предложена Марией Гаэтаной Аньези, профессором математики в Болонье в XVIII столетии.

Кубическая парабола

270. Уравнение этой кривой есть $a^2y = x^3$.

Пусть OX, OY будут прямоугольные оси, $OA = a$ и $OX = x$.

На оси OY возьмите $OB = x$.

Проведите BA и затем, перпендикулярно к AB, прямую AC, которая встретит ось OY в точке C.

Проведите CX и, перпендикулярно к CX, прямую XY.

XOY дополните до прямоугольника.

Точка P принадлежит рассматриваемой кривой.

$$y = XP = OY = \frac{x^2}{OC} = x^2 \cdot \frac{x}{a^2} = \frac{x^3}{a^2}$$

или

$$a^2y = x^3.$$

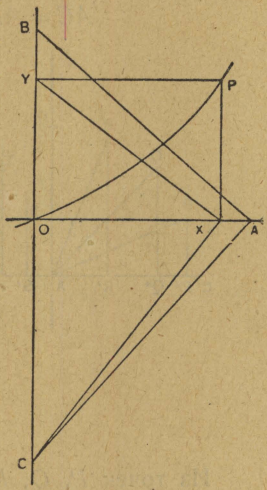

Рис. 80

Гармоническая кривая, или синусоида

271. Это та кривая, форму которой принимает звучащая струна. В ней ординаты пропорциональны синусам углов, которые во столько же раз меньше четырех прямых углов, во сколько раз соответствующие абсциссы меньше некоторого данного отрезка.

Пусть AB есть данный отрезок (рис. 81). Продолжите BA до C и согните по AD перпендикулярно к AB. Прямой угол DAC разделите на несколько равных частей, например, на четыре. На каждом радиусе отложите отрезок, равный амплитуде колебания,

$$AC = AP = AQ = AR = AD.$$

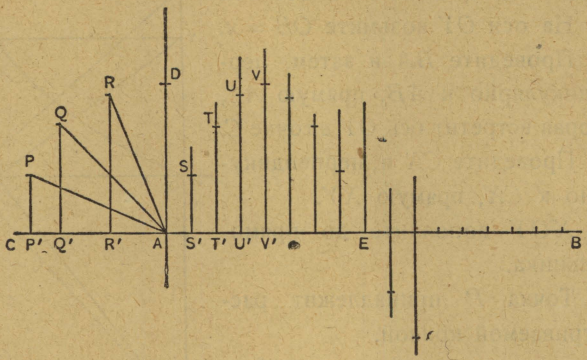

Рис. 81

Из точек P, Q, R опустите на AC перпендикуляры; отрезки PP', QQ', RR' и DA будут пропорциональны синусам углов PAC, QAC, RAC, DAC.

Разделите AB пополам в E; отрезки AE и EB разделите каждый на вдвое бо́льшее число частей, чем на сколько был разделен прямой угол. Проведите ординаты SS', TT', UU', VV' и т. д., соответственно равные PP', QQ', RR', DA и т. д. Тогда точки S, T, U, V и будут точками искомой кривой, причем V будет ее

верхней точкой. Складывая по VV' и делая проколы в S, T, U, V, мы получим соответственные точки части VE кривой. Часть кривой, соответствующая отрезку EB, равна части AVE, но лежит по другую сторону AB. Расстояние AE равно длине полуволны, которая повторяется от E до B по другую сторону AB. Точка E есть точка перегиба кривой; в ней радиус кривизны становится бесконечно большим.

Овалы Кассини

272. Если точка движется по плоскости таким образом, что произведение ее расстояний от двух неподвижных точек плоскости сохраняет постоянную величину, то эта точка описывает один из овалов Кассини. Неподвижные точки называются фокусами. Уравнение кривой есть $rr' = k^2$, где r и r' означают расстояния какой-нибудь точки кривой от ее фокусов, а k есть некоторая постоянная.

Пусть F и F' будут фокусы. Проведите прямую FF'. Разделите FF' пополам в C и чрез C проведите BCB' перпендикулярно к FF'. Найдите такие точки B и B', чтобы $FB = FB' = k$. Ясно, что такие точки B, B' принадлежат нашей кривой.

Согните по FK перпендикулярно к FF' и отложите $FK = k$; на FF' отложите $CA = CA' = CK$. Полученные точки A, A' лежат на нашей кривой.

В самом деле,

$$CA^2 = CK^2 = CF^2 + FK^2,$$

Следовательно,

$$CA^2 - CF^2 = k^2 = (CA + CF)(CA - CF) = F'A \,.\, FA.$$

Продолжите FA и отложите $AT = FK$. На AT возьмите какую-нибудь точку M и проведите MK. Перегните по KM' перпендикулярно к MK; KM' пересечет FA' в M'.

В таком случае $FM \,.\, FM' = k^2$.

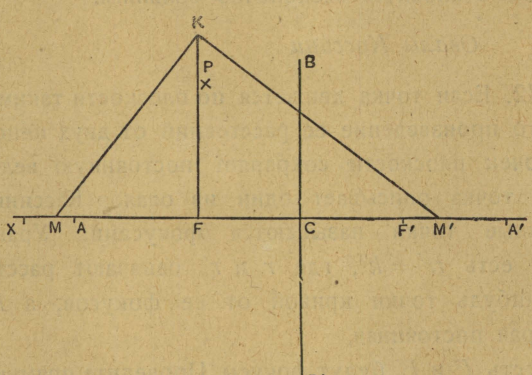

Рис. 82

Из F и F', как из центров, опишите дуги радиусами FM и FM'; эти дуги пересекутся в некоторой точке P. Эта точка принадлежит нашей кривой.

Когда найдено несколько точек между A и B, соответственные точки в других квадрантах можно наметить, перегнув бумагу.

Если $FF' = k\sqrt{2}$, а $rr' = \frac{1}{2}k^2$, то кривая принимает форму лемнискаты (§ 279).

Если FF' больше, чем $k\sqrt{2}$, то кривая состоит из двух отдельных овалов, по одному вокруг каждого фокуса.

Логарифмическая кривая

273. Уравнение этой кривой есть $y = a^x$.

Ордината в начале равна единице.

Когда абсцисса возрастает в арифметической прогрессии, ордината увеличивается в геометрической.

Значения y, отвечающие целым значениям x, можно получить помощью построения, данного в § 108.

Эта кривая уходит в бесконечность, не выходя из угла XOY.

Если показатель отрицательный, то $y = \frac{1}{a^x}$ и, следовательно, приближается к нулю при возрастании абсолютной величины x. Поэтому ось OX, со стороны отрицательных значений абсцисс, является асимптотой этой кривой.

Обыкновенная цепная линия

274. Цепной линией называется форма, принимаемая тяжелой (весомой) нерастяжимой нитью, свободно висящей на двух точках и находящейся под действием только силы тяжести.

Уравнение этой кривой имеет вид

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

если за ось y принять вертикальную прямую, проходящую чрез самую низкую точку кривой, а за ось x горизонтальную прямую, лежащую в плоскости нити на расстоянии c книзу от самой низкой точки кривой; c называется параметром кривой, а e есть основание натуральных логарифмов.

Если

$$x=c, \text{ то } y=\frac{c}{2}(e^1+e^{-1});$$

если

$$x=2c, \text{ то } y=\frac{c}{2}(e^2+e^{-2}) \text{ и т. д.}$$

275. Из уравнения

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

можно графически определить e.

$$ce-2y\sqrt{e}+c=0,$$

$$\sqrt{e}=\frac{1}{c}(y+\sqrt{y^2-c^2}),$$

$$c\sqrt{e}=y+\sqrt{y^2-c^2}.$$

$\sqrt{y^2-c^2}$ можно найти, как геометрическое среднее между $y+c$ и $y-c$.

Кардиоида или сердцевидная кривая

276. Чрез какую-нибудь неподвижную точку O, лежащую на окружности радиуса a, проведите пучок прямых; на каждой из них отложите, считая от точки ее пересечения с окружностью, по отрезку, равному $2a$, в ту и в другую сторону. Концы этих отрезков лежат на кардиоиде.

Уравнение этой кривой есть

$$r = 2a(1 + \cos\theta).$$

В начале координат будет острие кривой.

Кардиоида есть обращение параболы относительно ее фокуса, как центра обращения.

Улитка

277. Чрез какую-нибудь постоянную точку на круге проведите пучок хорд; на каждой из них отложите в обе стороны от точки встречи с окружностью по отрезку определенной длины.

Если эти отрезки постоянной длины равны диаметру взятого круга, то кривая будет кардиоидой.

Если же эти отрезки больше диаметра, то кривая лежит целиком вне круга.

Если отрезки короче диаметра, то часть кривой лежит внутри круга в виде петли.

Если, наконец, длина отрезков равна половине диаметра, то кривая получает название трисектрисы,

вследствие того, что при ее помощи можно разделить любой угол на три части.

Уравнение этой кривой есть $r = a\cos\theta + b$.

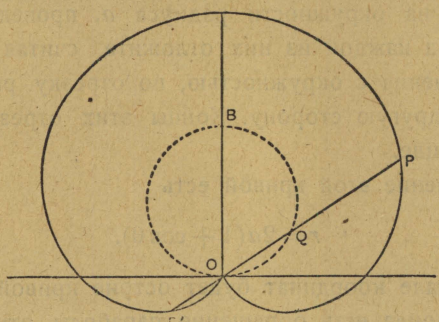

Рис. 83

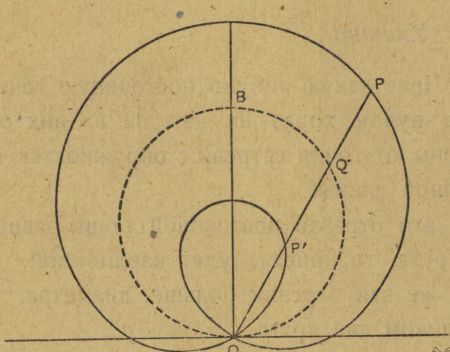

Рис. 84

Улитка первого рода представляет обращение эллипса, улитка второго рода представляет обращение гиперболы,

причем в том и другом случае за центр обращения надо брать один из фокусов. Петля есть обращение той же ветви гиперболы около другого фокуса.

278. Трисектрису применяют следующим образом:

Дан угол AOB. Отложите отрезки OA, OB, равные радиусу круга. Опишите круг радиуса OA (или OB) с центром в O. Продолжите AO неопределенно далеко за круг. Наложите трисектрису так, чтобы точка O совпала

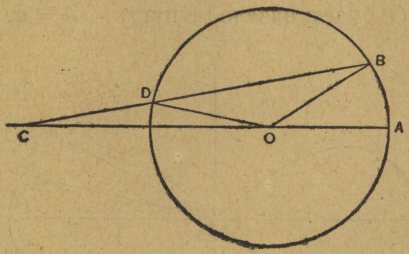

Рис. 85

с центром ее круга, а OB с осью петли. Пусть внешняя часть кривой пересечет продолжение AO в точке C. Проведите прямую BC, встречающую круг в D, и прямую OD.

Покажем, что

$$\angle ACB = \frac{1}{3} \angle AOB.$$

В самом деле,

$$CD = DO = OB.$$

Отсюда

$$\angle AOB = \angle ACB + \angle CBO = \angle ACB + \angle ODB =$$
$$= \angle ACB + 2\angle ACB = 3\angle ACB.$$

Лемниската Бернулли

279. Полярное уравнение этой кривой имеет вид:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Пусть O будет начало и пусть $OA = a$.

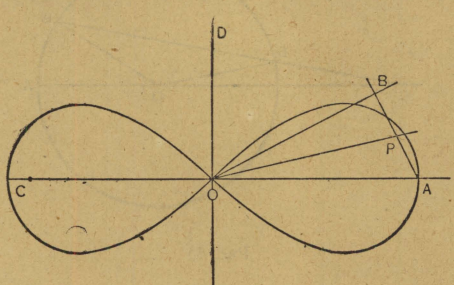

Рис. 86

Продолжите AO и проведите OD перпендикулярно к OA.

Возьмите $\angle AOP = \theta$ и $\angle AOB = 2\theta$.

Из A опустите на OB перпендикуляр AB.

На продолжении AO отложите $OC = OB$.

На OD найдите такую точку D, для которой $\angle ADC$ есть прямой.

Отложите $OP = OD$.

Тогда P будет одной из точек нашей кривой.

$$r^2 = OD^2 = OC.OA = OB.OA = a\cos 2\theta . a = a^2 \cos 2\theta.$$

Как было упомянуто выше, эта кривая представляет частный случай овалов Кассини.

Она есть обращение прямоугольной гиперболы, если центр последней взят за центр обращения, а также представляет подарную кривую той же гиперболы по отношению к ее центру.

Площадь этой кривой равняется a^2.

Циклоида

280. Циклоидой называется путь, описываемый точкой окружности круга, катящегося по неподвижной прямой.

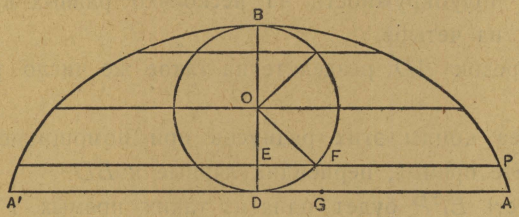

Рис. 87

Пусть A и A' суть положения точки, описывающей циклоиду, когда она касается неподвижной прямой в начале и в конце одного полного оборота круга. AA' равняется длине окружности взятого круга.

Длину окружности круга можно получить следующим образом. Оберните полоску бумаги вокруг какого-нибудь цилиндрического предмета и отметьте две совпадающие точки. Разверните затем бумагу и перегните ее чрез эти точки. Тогда отрезок прямой, заключенный между этими точками, по длине будет равен окружности, соответствующей диаметру цилиндра.

Пользуясь пропорциональностью, можно найти окружность для любого диаметра и наоборот.

Разделите AA' пополам в D; восставьте в D перпендикуляр к AA' и отложите на нем $DB =$ диаметру производящего круга.

Точки A, A' и B принадлежат кривой.

Найдите средину O отрезка BD.

Чрез O проведите несколько радиусов, делящих правую полуокружность на несколько равных дуг, например, на четыре.

Отрезок AD разделите на такое же число равных частей.

Чрез концы этих радиусов при помощи перегиба проведите прямые, перпендикулярные к BD.

Пусть EFP будет одна из таких прямых, F конец соответствующего радиуса и пусть G будет точка соответственного деления отрезка AD, начиная от D. Отложите $FP = GA$ или длине дуги BF.

Точка P есть точка кривой.

Другие точки, соответствующие другим точкам деления AD, можно получить таким же образом.

Кривая симметрична по отношению к оси BD; поэтому соответствующие точки левой половины кривой можно получить, складывая бумагу по BD.

Длина кривой в 4 раза больше BD, а ее площадь в 3 раза больше площади производящего круга.

Трохоида

281. Если круг катится по прямой так же, как в случае циклоиды, то каждая точка, лежащая в плоскости круга, но не на его окружности, описывает кривую, называемую трохоидой.

Эпициклоида

282. Эпициклоидой называется путь, описываемый точкой окружности круга, который катится по окружности другого, неподвижного круга, касаясь его с наружной стороны.

Гипоциклоида

283. Если катящийся круг касается неподвижного круга с его внутренней стороны, то кривая, которую описывает точка окружности первого круга, называется гипоциклоидой.

Если радиус неподвижного круга в целое число раз больше радиуса катящегося круга, то окружность первого следует разделить на такое же число равных частей.

Эти части в свою очередь надо разделить на некоторое число равных частей каждую; тогда положение

центра катящегося круга и производящей точки, соответствующие каждой точке части неподвижного круга, можно найти, деля окружность катящегося круга на такое же число равных частей.

Квадратриса

284. Пусть $OACB$ представляет квадрат. Если радиус OA круга равномерно поворачивается около центра O на прямой угол от положения OA до положения OB и если в то же время прямая, перпендикулярная к OB, равномерно перемещается параллельно самой себе от положения OA до BC, то геометрическое место точек пересечения радиуса и прямой называется квадратрисой.

Эта кривая была придумана Гиппиадом из Элиды (420 до Р. Хр.) для разделения угла на несколько равных частей.

Если P и P' суть точки кривой, то углы AOP и AOP' относятся друг к другу, как ординаты точек P и P'.

Спираль Архимеда

285. Если прямая OA равномерно вращается вокруг O, как центра, то точка P, которая равномерно движется от O вдоль OA, описывает спираль Архимеда.

СОДЕРЖАНИЕ

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИС“

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Адлер. Теория геометрич. построений, 2-е изд.
Вебер и Вельштейн. Энциклопедия элементарной математики, т. I, 3 е изд.
Проф. *Дж. Виванти*. Курс анализа бесконечно-малых.
Проф. *Рёссель*. Введение в математическую философию.
Астон Изотопы.
Венельт. Лабораторный практикум.
Ньюком-Энгельман. Звездная астрономия.
Ризенфельд. Руководство по аналитич. химии.
Бэйлисс. Введение в общую физиологию.
Юл. Введение в теорию статистики.

ИМЕЮТСЯ НА СКЛАДЕ:

Дзык П. Г. Сборник стереометрических задач на комбинации геометрических тел.
Проф. *Дзиобек О.* Курс аналитич. геометрии.
Проф. *Каган В. Ф.* О преобразовании многогранников.
Проф. *Кэджори Ф.* История элементарной математики
Проф. *Ковалевский Г.* Введение в исчисление бесконечно-малых.
Леффлер Е. Цифры и цифровые системы культурных народов.
Литцманн В. Теорема Пифагора.
Проф. *Орбинский А. Р.* Таблицы 4-хзначных логарифмов.
Проф. *Рудио*. Архимед, Гюйгенс, Лежендр и Ламберт. О квадратуре круга.
Филиппов А. О. Четыре арифметических действия.
Фурре Е. Очерк истории элементарной геометрии.

СКЛАД ИЗДАНИЯ
Одесское Отд.
Госизд. Украины
Пушкинская, № 1.