С. О. ШАТУНОВСКИЙ
Профессор Одесской Высшей Школы

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКОВ И ПОСТРОЕНИИ ИХ ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

ОДЕССА — 1925

С. О. ШАТУНОВСКИЙ
Профессор Одесской Высшей Школы

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКОВ И ПОСТРОЕНИИ ИХ ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

MATHESIS

ОДЕССА — 1925

Р. О. П. (Одесса). № 2453.
Заказ № 5959. — 3000 экз.

„ОДЕСПОЛИГРАФ“
Первая Государственная
типография им. Карла Маркса.
Стурдзовский переулок. № 3-а.

В этой книжке (ее первые десять страниц составляли раньше введение к первому изданию книги Адлера „Теория геометрических построений“) я имею в виду дать в общедоступном изложении общую теорию решения конструктивных задач Элементарной Геометрии.

Эта почти законченная в науке теория характеризуется не только глубиной идей, лежащих в ее основе, но и тем, что, охватывая материал во всем его объеме, ставя и решая задачу в наиболее общем виде, она весьма просто приводит в частности к решению конструктивных задач, ожидавших своего решения втечение многих и многих столетий, каковы, например, получившие отрицательные решения задачи о трисекции угла, удвоении куба, квадратуре круга и т. д.

Точное обоснование относящихся сюда предложений требует установления точного определения понятия о длине прямолинейного отрезка — вот почему, разобрав общее содержание конструктивной задачи Элементарной геометрии, общий ход ее решения и общий прием получения геометрографического решения, я останавливаюсь затем на точном определении длины прямолинейного отрезка, отношения отрезков и функции отрезков. Показав после этого, что при помощи циркуля и линейки могут быть построены только отрезки, удовлетворяющие известным требованиям, я даю строгое доказательство уже установленной Ванцелем теоремы, в силу которой корни алгебраического неприводимого уравнения, от которого зависит решение задачи, только тогда удовлетворяют этим требованиям, когда степень уравнения есть степень числа 2.

В элементарном изложении невозможно, к сожалению, дать доказательство того предложения, что для разрешимости конструктивной задачи при помощи циркуля и линейки необходимо и достаточно, чтобы неприводимое алгебраическое уравнение, от которого зависит решение задачи, имело группу порядка 2^n. Я ограничился поэтому выводом достаточных условий только для уравнения четвертой степени.

Педагогический опыт показал мне, что учащиеся с глубоким интересом относятся к общим затрагиваемым здесь вопросам. Я допускаю поэтому, что книжка может быть полезна как для учащихся, так и для преподавателей, которым подчас нелегко бывает от вопросов и запросов учащихся.

С. Шатуновский.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы имеем в виду изложить общие начала теории конструктивных задач элементарной Геометрии и считаем поэтому необходимым несколько остановиться на общем определении задачи и разъяснении ее содержания. Что такое задача и каково ее содержание в наиболее общем случае? Следующее определение хотя, быть может, и не вполне отвечает на поставленный вопрос, но представляется нам достаточно общим:

Задача есть изложение требования „найти“ по „данным“ вещам другие, „искомые“ вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях.

Принимая это определение задачи, мы предполагаем, конечно, что предварительно определены все термины, входящие в его состав (за исключением термина: задача), или что эти термины приняты без определения либо в силу соглашения, либо потому, что они имеют достаточно ясный смысл. Нам придется, однако, обратить особое внимание на поставленные выше в ковычки термины: найти, данные (вещи), искомые (вещи). Каково бы ни было их реальное содержание (в настоящий момент оно для нас безразлично), важным представляется то обстоятельство, что в каждой задаче рассматриваются *два класса вещей* (для нас опять безразлично, будут ли эти вещи—конкретные или отвлеченные):

Один класс есть *класс данных вещей*. О них говорят, что они *даны, указаны, известны, доступны* нашему непосредственному или посредственному *усмотрению, созерцанию, пониманию* или *представлению*, находятся в нашем *распоряжении*, что мы эти вещи *знаем, воображаем* и т. д.

Наоборот, о вещах другого класса говорят, что они не даны, неизвестны, не указаны, что это суть искомые вещи, что они должны быть найдены или определены (вычислены — в Арифметике, построены — в Геометрии, вообще — обнаружены) и т. д.

Когда вещь найдена, о ней перестают говорить, как о вещи неизвестной: она переводится из класса искомых в класс данных вещей. Таким образом, найти вещь это значит сделать так, чтобы мы не только могли, но и обязаны были причислить вещь к классу данных или известных вещей. Поэтому совершенно ясно, что задача не будет иметь содержания, термин „найти" ничего не будет означать, если не указаны те обстоятельства, события или условия, при осуществлении которых мы обязаны перечислить вещь из класса вещей неизвестных в класс известных вещей*.

Итак, в каждой отдельной отрасли знания или даже в каждой отдельной задаче термин найти может иметь свое особое значение, но он должен быть определен в том смысле, что явно должны быть указаны те условия, при осуществлении которых искомая вещь считается найденной. Эти условия нередко даются нам теми или другими преследуемыми целями, зависящими весьма часто от состояния нашего сознания или имеющихся в нашем распоряжении средств восприятия; но эти условия могут быть и иногда действительно являются предметом чистого соглашения. В последнем случае мы можем изменять условия, замещая одни другими, лишь бы только совокупность соглашений не содержала логического противоречия. Но нельзя не устанавливать никаких условий относительно перечисления вещи из класса

---

* Здесь уместно будет сделать следующее замечание: положим, что искомая вещь x будет нами считаться найденной тогда и только тогда, когда осуществится событие α. Можно поставить вопрос о том, при наличности каких признаков β мы будем говорить, что событие α осуществилось, затем — вопрос о том, каковы признаки γ, свидетельствующие о наличности признаков β, и т. д. ad infinitum. Мы будем поэтому предполагать, что во всех рассматриваемых случаях нет никакого сомнения относительно того, осуществлены ли *уже* или *еще* не осуществлены те условия, при выполнении которых вещь должна быть переведена из класса искомых в класс данных вещей.

искомых в класс данных, ибо при отсутствии таких условий задача не имеет смысла.

Если, например, А предлагает В разделить пополам данный прямолинейный отрезок MN, то прежде, чем приступить к решению задачи, В должен узнать, при выполнении каких условий А будет считать, что середина O отрезка MN найдена, ибо в противном случае В может рассуждать, как угодно, и делать, что угодно, между тем как А все будет говорить, что середина O не найдена. На практике, когда MN есть начерченный отрезок или вообще отрезок, определяемый двумя реальными (начерченными) точками, середина O считается найденной, когда она отмечена особым знаком или когда в ней находится ножка циркуля. В Геометрии середина O считается найденной только тогда, когда к ней пришли помощью некоторых вполне определенных приемов, о чем речь будет ниже.

Предложения, которыми устанавливаются те факты, обстоятельства или условия, при наличности которых искомая вещь становится данной, мы будем называть *постулатами*, лежащими в основе решения данной задачи или данной группы задач, рассматриваемых в той или другой дисциплине (эти постулаты можно назвать логическими средствами решения).

§ 2. КОНСТРУКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТУЛАТЫ И ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНСТРУКТИВНОЙ ЗАДАЧИ

Переходя теперь к конструктивным задачам элементарной плоской Геометрии, мы прежде всего укажем те постулаты, которые обыкновенно кладутся в основание решения этих задач. Заметим для этой цели, что в элементарной плоской Геометрии рассматриваются только следующие образы:

1. Точки, прямые, прямолинейные отрезки, окружности и их дуги. Эти образы будем называть основными.

2. Совокупности основных образов.

3. Конечные или бесконечные (например, углы) части плоскости, ограничиваемые основными образами.

Мы принимаем: Постулат I. Прямая и прямолинейный отрезок соответственно считаются построенными тогда и только тогда, когда даны или построены две точки прямой или концы отрезка.

Постулат II. Окружность считается построенной тогда и только тогда, когда даны или построены ее центр и две точки, которыми определяется ее радиус. (Одною из этих точек может быть центр, а другою — точка на окружности). Дуга окружности считается построенной в том и только в том случае, когда даны или построены ее центр и ее концы.

Постулат III. Точка построена, если она есть пересечение двух данных или построенных прямых.

Постулат IV. Точка построена, если она есть общая точка данной или построенной прямой и данной или построенной окружности.

Постулат V. Точка построена, если она есть общая точка двух данных или построенных окружностей.

Постулат VI. Всякий другой образ считается построенным, если даны или построены основные образы, из которых он состоит или которые его ограничивают.

В черчении, где строятся не геометрические образы, а их графические изображения, эти постулаты практически осуществляются помощью циркуля и линейки, причем оба эти инструмента употребляются определенным образом, а именно: при помощи линейки проводится графическое изображение прямой через графически заданные точки, при помощи циркуля описывают из графически заданного центра графическую окружность, имеющую графически заданный радиус. Другое употребление циркуля или линейки может не соответствовать нашим первым двум постулатам, а потому не допускается. Что касается постулатов III — V, то их осуществление содержится в том факте, что мы непосредственно усматриваем общие точки графически данных прямых и окружностей. Случаи, когда эти общие точки лежат вне эпюра (рамок чертежа) и потому не усматриваются непосредственно и не считаются построенными, сответствуют тем случаям, когда тот или иной из постулатов III — V отбрасывается *.

* См., например, Адлер, „Теория геометрических построений", (Mathesis, Одесса), издание 2-ое, стр. 71 и примечание 77, или издание 1-ое, стр. 75 и примеч. 76.

Можно, конечно, установить другие постулаты, которым будут соответствовать либо другие чертежные инструменты, либо другие способы употребления циркуля и линейки. Можно, наоборот, задать чертежные инструменты и способ их употребления и поставить на разрешение вопрос о том, каковы соответственные постулаты (см., например, Адлер „Теория геометрических построений“, главы II, III, IV и примечания к ним), но какие либо постулаты должны быть установлены (или соответствующие им инструменты выбраны), так как в противном случае задача лишена содержания.

Установленные нами постулаты, отвечающие обыкновенному способу пользования циркулем и линейкой, эквивалентны следующему допущению. Конструктивная задача элементарной плоской Геометрии считается решенной, если она приведена к решению конечного числа задач, из которых каждая есть одна из следующих пяти задач: I) через две данные точки провести прямую или отрезок, их соединяющий; II) из данной точки описать окружность данного радиуса или начертить дугу окружности по ее концам и ее центру; III) найти общую точку двух данных прямых; IV) найти общие точки данной прямой и данной окружности; V) найти общие точки двух данных окружностей. *Для геометра безразлично, как решаются эти пять задач.* Их решение ему известно по условию, и к ним должна сводиться всякая другая задача для того, чтобы считаться решенной.

Приняв постулаты I — VI, мы поставим себе теперь на разрешение наиболее общую конструктивную задачу элементарной плоской Геометрии. Так как каждый образ определяется ограничивающими его основными (см. выше) образами, а эти в свою очередь считаются построенными, когда найдены некоторые определяющие их точки, то можно *принять*, что каждый геометрический образ задается некоторыми системами точек и что требование построить геометрический образ есть требование о построении некоторых систем точек.

Ничто не мешает смотреть на несколько систем точек, как на одну систему, и потому наиболее общая конструктивная задача может быть выражена так:

По данной системе точек $P_1(P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(h)})$, *содержащей конечное число точек* $P_1', \ldots, P_1^{(h)}$, *требуется построить другую конечную систему*

$Q(Q', Q'', \ldots, Q^{(k)})$ точек, под условием, чтобы эти последние удовлетворяли некоторым наперед указанным требованиям.

Точки $P_1', \ldots, P_1^{(h)}$ данной системы P_1 будем называть точками первого класса или первого порядка. Найдем все те образы, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I — VI. Мы можем, впрочем, игнорировать последний постулат и задаться только таким вопросом: какие основные образы могут и должны считаться построенными, когда приняты постулаты I — V и дана система точек P_1? Если эта задача решена, то должны считаться построенными и все те образы, которые составляются из основных или ограничиваются ими.

Постулаты III — V говорят об основных образах, которые должны считаться построенными, когда даны (построены) прямые или окружности. Эти постулаты непосредственно ничего не могут дать в применении к точкам системы P_1. В силу же постулата I мы можем и должны считать построенными все прямые l_1 и прямолинейные отрезки λ_1, определяемые всевозможными парами точек первого класса. Эти прямые и отрезки будем называть данными, а также прямыми и отрезками первого класса или первого порядка. В силу же постулата II теперь должны считаться построенными все окружности O_1, для которых центрами служат точки первого класса, а радиусами — прямолинейные отрезки первого класса. Эти окружности мы будем называть окружностями первого класса или первого порядка.

Таким образом, мы имеем теперь

$$\left.\begin{array}{ll} \text{точки} & P_1 \\ \text{прямые} & l_1 \\ \text{отрезки} & \lambda_1 \\ \text{окружности} & O_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{первого класса или} \\ \text{первого порядка.} \end{array}$$

Применяя теперь постулаты III — V, мы можем и должны теперь считать построенными все отличные от точек P_1 точки встречи построенных уже окружностей и прямых. Эти точки P_2 мы будем называть точками второго класса или второго порядка. В силу постулатов I и II мы можем, по аналогии с предыдущим, считать построенными прямые l_2, отрезки λ_2 и окружности O_2 второго класса, затем точки P_3 третьего класса и т. д.

Совокупность точек классов P_2, P_3, ... содержит в себе все те и только те точки, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I — V, когда точки P_1 образуют данную, исходную систему точек. Если искомые точки Q найдутся среди точек P_1, P_2, P_3, ..., то задача при наших постулатах разрешима. Если же искомых точек Q не будет среди точек P_1, P_2, P_3, ..., как бы далеко мы этот ряд ни продолжали, то задача не будет иметь решения. Поясним это еще так: Если точки безграничного ряда классов P_1, P_2, ... не покрывают всей плоскости, так что на плоскости имеется одна или несколько точек q, которые не принадлежат ни к одному из этих классов, то всякая задача, в которой даны только точки P_1, а ищется хоть одна из точек q, будет неразрешимой при наших постулатах, хотя она и могла бы быть разрешимой при других постулатах. Так, например, (если требования, которым должны удовлетворять точки q в нашей задаче, не противоречат друг другу) можно было бы принять за постулат, что точки q построены, когда точки P_1 даны; в этом случае задача, в которой точки q суть искомые, разрешима в силу установленного постулата. В книге Адлера приводится много примеров задач, неразрешимых при одних, но разрешимых при других постулатах (см., например, §§ 35, 45, 46, 49 и 51).

В предыдущем изложении указан путь, следуя которому, мы, приняв обычные постулаты, непременно найдем решение задачи, если только решение может быть получено при этих постулатах. Рассмотрим, например, задачу о делении пополам прямолинейного отрезка AB, заданного его концами. Система P_1 точек первого порядка состоит из двух точек A и B. Искомый образ есть точка C, делящая пополам отрезок AB. Отрезок AB, прямая AB, окружность $A(AB)$ центра A и радиуса AB и окружность $B(AB)$ образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого порядка. Если M, N суть точки пересечения окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$, P и Q — вторые точки пересечения этих окружностей с прямою AB, то точки M, N, P, Q образуют систему точек второго порядка. Среди 9-ти прямых и 28-ми окружностей второго порядка имеется прямая MN, которая в пересечении с прямой AB дает искомую точку C. Поэтому искомая точка есть точка третьего порядка.

Рассмотрим еще деление пополам дуги AB (окружности), заданной центром O и концами A и B. Точки O, A, B образуют систему точек первого порядка. Три отрезка OA, OB, AB, три прямые OA, OB, AB и девять окружностей $N(PQ)$ (где центр N есть одна из точек A, B, O, а радиус PQ есть один из отрезков OA, OB, AB) образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого порядка. Точки встречи этих образов друг с другом (исключая O, A, B) образуют систему точек второго класса. Среди них имеется отличная от O точка встречи C окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$. Прямая OC принадлежит второму классу, а точка D ее встречи с окружностью $O(AB)$ (лежащая на данной дуге) принадлежит третьему классу и есть искомая точка.

Указанный общий метод решения задач при помощи циркуля и линейки не только страдает недостатками, свойственными всякому общему методу, но оставляет без ответа вопрос о критериях разрешимости или неразрешимости данной задачи при помощи циркуля и линейки. Критерии разрешимости или неразрешимости устанавливаются ниже аналитически и выражаются следующим образом:

Для того, чтобы отрезок мог быть построен при помощи циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы этот отрезок мог быть выражен в функции рациональных чисел и отрезков* первого класса при помощи конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений квадратных корней. (См. далее определение длины и построение отрезков, §§ 5 и 8).

Отсюда, как будет показано, выводится, что всякий отрезок, построяемый помощью циркуля и линейки, есть корень алгебраического неприводимого уравнения степени 2^n. Критерии разрешимости такого уравнения в квадратных радикалах уже даны были Ванцелем**.

Мы остановимся еще на двух вопросах, а именно на вопросах о произвольных элементах и о геометрографических решениях.

Произвольные элементы. Нередко при решении геометрической задачи пользуются так называемыми произвольными точками, а именно либо берут произвольную точку на пло-

---

* Определение понятия о функции отрезков см. § 7.

** В настоящее время мы имеем другой критерий: для того, чтобы неприводимое алгебраическое уравнение могло быть решено в квадратных радикалах, необходимо и достаточно, чтобы оно имело группу порядка 2^n.

скости или на данной прямой, или на данной окружности, или внутри (либо вне) данной фигуры, либо допускают еще, что эта произвольная точка отлична от некоторых данных или уже построенных точек. Такие допущения составляют особенные постулаты, которые должны быть установлены особыми соглашениями. При употреблении циркуля и линейки такие постулаты оказываются лишними: произвольную точку легко заменить построенной даже в том случае, когда она должна быть отлична от некоторых данных или построенных точек. Так, например, если на прямой или дуге круга уже имеются построенные точки, расположенные в порядке: A, B, C, ..., K, то мы можем заменить произвольную точку этой прямой или этой дуги, отличную от A, B, C, ..., K, — серединой части прямой или дуги, определяемой двумя последовательными точками.

Есть однако и такие случаи, когда допущение о приобщении произвольных точек к числу данных или уже построенных является существенным: цикл разрешимых задач может быть сужен, если отбросить право пользования произвольными точками (см., например, Адлер, примечания 75 и 98).

§ 3. ГЕОМЕТРОГРАФИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Простейшее решение данной конструктивной задачи называют геометрографическим ее решением. Такое определение не имеет смысла, если не установлено мерило простоты. По Лемуану, простота решения определяется следующим образом. Рассматриваются 4 элементарные операции: 1) прикладывание линейки к данной точке, 2) помещение ножки циркуля в данную точку, 3) проведение прямой и 4) описание окружности. К каждой из этих операций Лемуан относит число 1 и называет число S всех элементарных операций, потребных для решения задачи, коэффициентом простоты или простотой решения. Проведение прямой через данные 2 точки имеет поэтому коэффициент простоты 3 (линейка прикладывается к двум точкам и проводится одна прямая). Вычерчивание окружности из данного центра O данным радиусом AB имеет коэффициент 4 (помещение двух ножек циркуля соответственно в A и B, помещение одной ножки циркуля в O, вычерчивание одной окружности) или 3 (если O совпадает с A или с B), или 2 (если циркуль уже имеет раствор AB вследствие того, что раньше вычерчивалась окружность радиуса AB).

Мы покажем, что, имея к а к о е л и б о решение задачи, можно при помощи конечного числа испытаний найти ее геометрографическое решение. Заметим для этой цели, что для получения точки порядка $n > 1$ необходимо произвести, по меньшей мере, $2n+1$ элементарных операций. Это докажется индуктивно. В самом деле, пусть будет $n = 2$. Так как точка 2-го порядка есть пересечение двух линий 1-го порядка, то для получения точки второго порядка необходимо вычертить либо 2 прямые первого порядка (простота 6), либо прямую и окружность первого порядка (простота 7 или 6) или же две окружности первого порядка (простота 8 или 7, или 6, или 5). Таким образом, при $n = 2$ число элементарных операций действительно не меньше, чем $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Точка порядка $n+1$ есть пересечение прямой или окружности порядка n с прямой или окружностью того же или низшего порядка. Допустив наше предложение для числа n, заметим, что для получения прямой или окружности n-го порядка 1) необходимо иметь точку n-го порядка, что по допущению требует по меньшей мере $2n+1$ операций, и 2) необходимо вычертить линию n-го порядка, что требует по меньшей мере двух элементарных операций, так что для получения точки n-го порядка необходимо сделать по меньшей мере $2n+1+2 = 2(n+1)+1$ операций. Положим теперь, что некоторая задача каким либо способом решена и решение имеет простоту S. Найдем н а и б о л ь ш е е число ν, удовлетворяющее соотношению

$$2\nu+1 \leqslant S.$$

Тогда

$$2(\nu+1)+1 > S.$$

Для построения точки порядка $\nu+1$ требуется произвести по меньшей мере $2(\nu+1)+1 > S$ элементарных операций. Отсюда следует, что в состав геометрографического решения не может войти ни одна точка порядка $\nu+1$ и потому система точек, дающих геометрографическое решение задачи, найдется среди точек первых ν порядков. Число этих последних точек конечно *.

П р и м е ч а н и е. Коэффициент простоты иногда может быть понижен от введения произвольных точек. В этом случае следует

* Кажется, что до сих пор еще не был указан ни один общий метод получения геометрографического решения.

получить геометрографическое решение без введения произвольных точек и затем определить, какие из данных или построенных точек могут быть заменены произвольными. Так, например, без введения произвольных точек геометрографическое деление отрезка AB на 2 равные части имеет простоту 11. Если же заменить (стр. 7) окружности $A(AB)$ и $B(AB)$ двумя окружностями произвольных равных радиусов, то простота будет 10.

§ 4. СУММА ОТРЕЗКОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЧИСЛА НА ОТРЕЗОК*

В Геометрии при определении суммы отрезков, как отрезка, получаемого из данных отрезков путем известного построения, делаются следующие допущения:

1. Сумма отрезков обладает свойством переместительности для двух слагаемых:

$$a+b=b+a.$$

2. Она обладает свойством сочетательности для трех слагаемых:

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

Из этих двух свойств выводится (индуктивно относительно числа слагаемых), что сумма обладает свойством переместительности и сочетательности относительно любого конечного числа слагаемых.

3. Сумма больше каждого из слагаемых отрезков, а каждое слагаемое меньше суммы, то-есть, относительно отрезков допускают, что целое больше части и часть меньше целого. Этим допущением и определяются понятия „больше“ и „меньше“ для отрезков.

4. Сумма не изменяется от замены отрезка равным ему (конгруэнтным) отрезком.

В Геометрии устанавливается также понятие о произведении отрезка на какое-либо положительное рациональное число q. Если a есть отрезок, то произведение aq или qa определяется следующим образом:

a) Если $m>0$ есть целое число и $q=m$, то $qa=ma=am$ означает сумму m отрезков, равных a.

---

* Во всем последующем мы под отрезком разумеем прямолинейный отрезок.

Можно доказать индуктивно, что если m и n целые положительные числа, a и b два отрезка, то

$$(m+n)a = ma + na,$$

$$(mn)a = m(na),$$

$$(a+b)m = am + bm,$$

и что из трех соотношений

$$a = b;\ a > b;\ a < b$$

вытекают соответственно три соотношения

$$ma = mb;\ ma > mb;\ ma < mb,$$

откуда следует, что и, наоборот, из последних трех соотношений соответственно вытекают предыдущие три.

β) Если $q = \frac{1}{n}$, где $n > 0$ есть целое число, то под $qa = \frac{1}{n}a = a\frac{1}{n} = \frac{a}{n}$ разумеют n-ую часть отрезка a:

$$\frac{a}{n} \cdot n = n \cdot \frac{a}{n} = a.$$

Построение n-ой части отрезка указывается в элементарных учебниках. Она меньше любого наперед заданного отрезка при достаточно большом n (постулат Архимеда).

γ) Если $q = \frac{m}{n}$, где $m > 0$ и $n > 0$ суть целые числа, то по определению $qa = \frac{m}{n}a = a\frac{m}{n} = m\left(\frac{1}{n}a\right)$.

Можно показать, что

$$\frac{m}{n}a = \frac{ma}{n},$$

$$\frac{m}{n}a = \frac{mp}{np}a \text{ (} p \text{ полож. целое)*},$$

---

* Первое из этих равенств вытекает из того, что

$$n\left(\frac{m}{n}a\right) = n\left(m \cdot \frac{a}{n}\right) = m\left(n \cdot \frac{a}{n}\right) = ma;$$

второе получим, заметив, что

$$np\left(\frac{m}{n}a\right) = p\left[n\left(\frac{m}{n}a\right)\right] = pma.$$

откуда для любой пары положительных рациональных чисел r и s и для любого отрезка a из соотношений

$$r = s; \quad r > s; \quad r < s$$

соответственно вытекают соотношения

$$ra = sa; \; ra > sa; \; ra < sa,$$

и, наоборот, из последних трех соотношений вытекают первые три.

§ 5. ДЛИНА ОТРЕЗКА

В термине „длина отрезка“ и просто „длина“ олицетворяют свойство отрезка быть либо равным другому отрезку, либо „длиннее“ его, либо „короче“ его. Подобного рода олицетворение свойства (обращение свойства в вещь) обыкновенно ведет к созданию терминов, недостаточно определенных для того, чтобы в области точного знания относительно них возможно было делать строгие логические выводы. Нередко, как это будет, например, показано ниже при установлении понятия „длина“, предполагается, что удовлетворены некоторые требования, и в этом случае, раскрыв в достаточной мере содержание этих требований и следствия, из них вытекающие, нужно прежде всего показать, что этим требованиям удовлетворить возможно.

Устанавливая в Геометрии понятие о длине, имеют в виду оценить каждый отрезок вещественным положительным числом. Это число мы и будем называть „длиною“ отрезка. Наша оценка, а следовательно, и длина должна быть связана с приписываемым отрезку свойством быть равным другому отрезку, больше его или меньше его. Сообразно с этим мы каждому положительному отрезку хотим *приписать* число или, как говорят, к каждому отрезку *отнести* число, связать или ассоциировать отрезок с числом, называемым его длиной, так, чтобы по относительной величине длин можно было судить об относительной величине самих отрезков и наоборот.

Это можно сделать различно. Обыкновенно ставятся следующие требования:

I. *Каждому отрезку должно быть приписано одно и только одно положительное число, то-есть, каждый отрезок должен иметь одну и только одну положительную длину.*

II. Равным отрезкам должны быть приписаны равные длины.

III. Сумма двух отрезков должна иметь длину, равную сумме длин слагаемых.

Следствие первое. Длина суммы конечного числа отрезков должна быть равна сумме их длин (индуктивное доказательство относительно числа слагаемых) и потому должна быть больше длины каждого из них.

Следствие второе. Бо̀льший отрезок должен иметь бо̀льшую длину, ибо он может быть рассматриваем, как сумма слагаемых, из коих одно равно меньшему отрезку.

Когда требования I, II, III удовлетворены, мы говорим, что установлена система измерения отрезков или система длин отрезков. Пусть S будет такая система. Нам предстоит разрешить два вопроса: Возможна ли вообще система S и, если возможна, то как получить все системы S?

Предварительно докажем следующее предложение, которое является следствием допущения возможности существования системы S.

Если система S возможна, то она вполне определяется указанием длины λ одного какого-либо отрезка l. Это значит, что указанием длины λ некоторого определенного отрезка l вполне определяется длина α любого отрезка a, а именно, число α необходимо определяется равенством

$$\alpha = \lambda \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n}, \tag{1}$$

где $n>0$ есть переменное безгранично возрастающее целое число; целое же неотрицательное число a_n определяется требованием, чтобы в отрезке a отрезок $\frac{l}{n}$ укладывался a_n раз, но не мог бы укладываться (a_n+1) раз, так что a_n, будучи неотрицательным целым числом, должно удовлетворять соотношениям

$$l\frac{a_n}{n} \leqslant a < l\frac{a_n+1}{n}. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначая через m и h положительные целые числа, рассмотрим следующие случаи:

1) $a = l.h$, а потому, в силу требования III, $a = \lambda h$.

2) $a = \frac{l}{h}$, то есть $ha = l$, поэтому $ha = \lambda$, откуда $a = \lambda \frac{1}{h}$.

3) $a = \frac{m}{h} l$, то-есть $a = m \frac{l}{h}$, откуда $a = m \frac{\lambda}{h} = \lambda \frac{m}{h}$.

Отсюда выводится общее предложение:

4) Если $a = l.r$, где $r > 0$ есть рациональное число, то $a = \lambda r$.

5) Если отрезки l и a соизмеримы, имея отрезок d общею наибольшею мерою, и если d содержится в l и a соответственно n и a_n раз, то $a = \lambda \frac{a_n}{n}$. Всякая другая общая мера δ отрезков l и a содержится целое число раз в их общей наибольшей мере d. Пусть δ содержится p раз в d, тогда δ содержится np раз в l и $a_n p$ раз в a, следовательно, $a = \lambda \frac{a_n p}{np} = \lambda \frac{a_n}{n}$, то-есть длина отрезка a, соизмеримого с отрезком l, не зависит от выбора их общей меры и вполне определяется числом λ и отрезком l.

6) Перейдем к рассмотрению общего случая: отрезки l и a могут быть соизмеримы или несоизмеримы. Разделив l на n равных частей и уложив $\frac{1}{n} l$ в отрезке a возможно большое число раз, причем остаток, если он будет, окажется меньше, чем $\frac{1}{n} l$, сосчитаем, сколько раз $\frac{1}{n} l$ уложилась в a, и найдем таким образом число a_n. Отрезки $l \frac{a_n}{n}$ и $l \frac{a_n + 1}{n}$ соизмеримы с l, удовлетворяют соотношению (2) и потому, принимая во внимание, что их длины соответственно выражаются числами $\lambda \frac{a_n}{n}$ и $\lambda \frac{a_n + 1}{n}$, найдем, что (следствие второе)

$$\lambda \frac{a_n}{n} \leqslant a < \lambda \frac{a_n + 1}{n}.$$

Обозначая теперь через ε наперед заданное положительное число и взяв

$$n > \frac{\lambda}{\varepsilon},$$

найдем, что

$$0 \leqslant a - \lambda \frac{a_n}{n} < \lambda \frac{a_n+1}{n} - \lambda \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{n} < \frac{\lambda}{\lambda : \varepsilon} = \varepsilon.$$

Таким образом, абсолютная величина разности между определенным числом a (длиной отрезка a в системе S, охарактеризованной только тем, что в ней выполняются требования I, II, III и что отрезок l имеет длину λ) и переменной величиной $\lambda \frac{a_n}{n}$ будет оставаться меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ для всех целых значений $n > \frac{\lambda}{\varepsilon}$, следовательно,

$$a = \lim_{n=\infty} \left(\lambda \frac{a_n}{n} \right) = \lambda \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n},$$

чем и доказано, что в системе S отрезку a необходимо приписать длину a, определяемую равенством (1).

Из сказанного вытекает, что для возможности установления системы длин прямолинейных отрезков необходимо, чтобы существовал положительный предел вышерассмотренной дроби $\frac{a_n}{n}$ при безграничном возрастании n. Необходимо далее, чтобы в том случае, когда $a = lr$, где r положительное рациональное число, выполнялось еще равенство

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = r,$$

ибо, как уже было показано, в этом случае $a = \lambda r$ и вместе с тем $a = \lambda \lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{n}$.

Покажем теперь, что эти требования действительно выполняются. Мы будем ссылаться на следующее известное в теории пределов предложение: переменная, которая, не убывая, остается меньше определенного числа, имеет предел, который не больше этого числа и не меньше каждого из значений переменной.

Прежде всего заметим, что для целых чисел $m > 0$ и $n > 0$ ввиду соотношений (2) имеем

$$l \frac{a_n}{n} \leqslant a < l \frac{a_m+1}{m},$$

откуда, как было показано выше (стр. 13), будет вытекать, что при любых целых $m>0$ и $n>0$

$$\frac{a_n}{n}<\frac{a_m+1}{m}. \tag{3}$$

Теперь из ряда значений

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_2}{2},\ \frac{a_3}{3},\dots$$

переменной $\frac{a_n}{n}$ выделим значения

$$\frac{a_k}{k},\ \frac{a_{2k}}{2k},\ \frac{a_{2^2k}}{2^2k},\dots,\frac{a_{2^{n-1}k}}{2^{n-1}k},\ \frac{a_{2^nk}}{2^nk},\dots, \tag{4}$$

причем в случае соизмеримости отрезков l и a мы под k и a_k будем разуметь числа, показывающие, сколько раз какая-либо общая мера отрезков l и a содержится соответственно в этих отрезках. Полагая в этом случае $\frac{a_k}{k}=r$, покажем ниже (стр. 18), что $a=\lambda r$. В случае несоизмеримости отрезков l и a мы под k будем разуметь любое определенное положительное целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{l}{k}<a$. Такое число k по постулату Архимеда существует. Таким образом, в обоих случаях $a_k>0$.

Ввиду неравенства (3) находим:

$$\frac{a_{2^{n-1}k}}{2^{n-1}k}<\frac{a_{2^nk}+1}{2^nk},$$

откуда

$$2a_{2^{n-1}k}<a_{2^nk}+1,$$

а так как $a_{2^{n-1}k}$ и a_{2^nk} целые числа, то

$$2a_{2^{n-1}k}\leqslant a_{2^nk},$$

поэтому

$$\frac{a_{2^{n-1}k}}{2^{n-1}k}\leqslant\frac{a_{2^nk}}{2^nk},$$

то-есть в ряду (4) каждый член не больше следующего за ним члена, а так как в силу неравенства (3) каждый из этих членов меньше, чем a_1+1, то переменная $\frac{a_{2^n k}}{2^n k}$ стремится к определенному пределу $a' \geqslant \frac{a_k}{k} > 0$, при безграничном возрастании n.

Мы можем убедиться в том, что при соизмеримости отрезков l и a в ряду (4) все члены равны и, следовательно, тогда $a' = \frac{a_k}{k}$. Действительно, в этом случае по условию отрезок $\frac{l}{k}$ есть общая мера отрезков l и a, содержащаяся a_k раз в a. Отрезок $\frac{l}{2^n k}$ также будет общей мерой отрезков l и a, содержась в них соответственно $2^n k$ и $a_{2^n k}$ раз, поэтому $a = \frac{a_{2^n k}}{2^n k} l = \frac{a_k}{k} l$, откуда $\frac{a_{2^n k}}{2^n k} = \frac{a_k}{k}$.

Итак,

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{2^n k}}{2^n k} = a',$$

где a' есть положительное число, равное, в случае соизмеримости отрезков l и a, числу $\frac{a_k}{k}$. Отсюда следует, что для всякого наперед заданного положительного числа ε найдется такое положительное целое число ν_1, что при всяком целом

$$n > \nu_1$$

будут выполняться соотношения

$$0 \leqslant a' - \frac{a_{2^n k}}{2^n k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обращаясь теперь к ряду чисел

$$\frac{a_1}{1};\ \frac{a_2}{2};\ \frac{a_3}{3};\ \ldots;\ \frac{a_n}{n};\ \ldots;\ \frac{a_{n+i}}{n+i};\ \ldots$$

и принимая во внимание неравенство (3), найдем, что в случае, когда

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_{n+i}}{n+i},$$

имеют место соотношения

$$0 \leqslant \frac{a_{n+i}}{n+i} - \frac{a_n}{n} < \frac{a_n+1}{n} - \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n},$$

а при

$$\frac{a_n}{n} > \frac{a_{n+i}}{n+i}$$

находим, что

$$0 < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+i}}{n+i} < \frac{a_{n+i}+1}{n+i} - \frac{a_{n+i}}{n+i} = \frac{1}{n+i} < \frac{1}{n},$$

а так как из двух разностей $\frac{a_{n+i}}{n+i} - \frac{a_n}{n}$ и $\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+i}}{n+i}$ одна есть абсолютная величина обеих, то, обозначая вообще через $|x|$ абсолютную величину любого числа x, имеем

$$\left| \frac{a_{n+i}}{n+i} - \frac{a_n}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Если припишем n любое целое значение, превосходящее число $\frac{2}{\varepsilon}$, то при этом значении n будем иметь

$$\left| \frac{a_{n+i}}{n+i} - \frac{a_n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Взяв теперь определенное целое число ν', удовлетворяющее двум неравенствам

$$\nu' > \nu_1; \ \nu' > \frac{2}{\varepsilon},$$

и положив для краткости

$$\nu = 2^{\nu'},$$

причем, конечно, $\nu > \nu'$, найдем, что не только, как было показано,

$$0 \leqslant a' - \frac{a_\nu}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2},$$

но и

$$\left| \frac{a_{\nu+i}}{\nu+i} - \frac{a_\nu}{\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где i есть любое целое неотрицательное число. Из этих соотношений вытекает, что

$$\left| a' - \frac{a_{\nu+i}}{\nu+i} \right| = \left| \left(a' - \frac{a_\nu}{\nu} \right) - \left(\frac{a_{\nu+i}}{\nu+i} - \frac{a_\nu}{\nu} \right) \right| \leqslant \left| a' - \frac{a_\nu}{\nu} \right| +$$

$$+ \left| \frac{a_{\nu+i}}{\nu+i} - \frac{a_\nu}{\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

следовательно, при всяком целом $n=\nu+i$, то-есть при всяком целом $n\geqslant\nu$, будет иметь место неравенство

$$\left|\alpha'-\frac{\alpha_n}{n}\right|<\varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n}=\alpha'.$$

Введя обозначение $\alpha=\lambda\alpha'$, найдем, что

$$\lim_{n=\infty}\left(\lambda\frac{\alpha_n}{n}\right)=\lambda\lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n}=\lambda\alpha'=\alpha.$$

Из предыдущего видно, что этот предел α равен $\lambda\frac{\alpha_n}{k}$, если отрезки l и a соизмеримы и их общая мера укладывается k раз в l и α_k раз в a.

Нам остается еще показать, что, приписав каждому отрезку a длину α, определяемую равенством

$$\alpha=\lambda\lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n},$$

мы удовлетворим требованиям II и III.

Пусть a, b и c будут три отрезка, коих длины α, β, γ определены равенствами

$$\alpha=\lambda\lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n};\quad \beta=\lambda\lim_{n=\infty}\frac{\beta_n}{n};\quad \gamma=\lambda\lim_{n=\infty}\frac{\gamma_n}{n}.$$

Если отрезки a и b конгруэнтны, то $\alpha_n=\beta_n$ при любом n и потому $\alpha=\beta$, то-есть, требование II выполняется. Если

$$c=a+b,$$

то из соотношений

$$l\frac{\alpha_n}{n}\leqslant a<l\frac{\alpha_n+1}{n},$$

$$l\frac{\beta_n}{n}\leqslant b<l\frac{\beta_n+1}{n}$$

выводим

$$l\frac{\alpha_n+\beta}{n}\leqslant a+b=c<l\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{n},$$

а так как

$$l\frac{\gamma_n}{n} \leqslant c < l\frac{\gamma_n+1}{n},$$

и отрезок $l:n$ укладывается в отрезке c не больше, чем γ_n, но меньше, чем γ_n+1 раз, то γ_n не меньше числа $\alpha_n+\beta_n$, но меньше числа $\alpha_n+\beta_n+2$, откуда следует, что

$$\gamma_n = \alpha_n + \beta_n + \varepsilon_n,$$

где ε_n в зависимости от n равно одному из двух чисел 0 и 1. Отсюда, принимая во внимание, что $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}=0$, находим, что

$$\gamma = \lambda \lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n+\varepsilon_n}{n} = \lambda \lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n} + \lambda \lim_{n=\infty}\frac{\beta_n}{n} + \lambda \lim_{n=\infty}\frac{\varepsilon_n}{n} = \alpha+\beta.$$

Итак, не только возможно установить систему длин прямолинейных отрезков, но оказывается возможным установить бесчисленное множество таких систем. Всякий раз, когда мы одному произвольно выбранному отрезку приписываем произвольно выбранное число—его длину, мы определяем систему измерения отрезков.

§ 6. ОТНОШЕНИЕ ДВУХ ОТРЕЗКОВ.— НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПРЯМОЙ

Если в системе измерения S отрезки l и a имеют соответственно длины λ и α, а в другой системе S' длины этих отрезков выражаются соответственно через λ' и α', то, как было доказано,

$$\alpha = \lambda \lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n}; \quad \alpha' = \lambda' \lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n},$$

поэтому

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\alpha'}{\lambda'} = \lim_{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n}. \tag{5}$$

Таким образом, о т н о ш е н и е $\frac{\alpha}{\lambda}$ д л и н д в у х о т р е з к о в н е з а в и с и т о т в ы б о р а с и с т е м ы и з м е р е н и я. Полагая $\lambda'=\lambda t$, имеем $\alpha'=\alpha t$, то-есть, если при переходе от одной системы измерения S к другой S' длина λ какого-либо отрезка l умножается на t, то и длина α всякого другого отрезка a умножается на то же число t.

Определение. Отношением отрезка a к отрезку l называется отношение $\frac{\alpha}{\lambda}$ их длин. Можем считать доказанным предложение:

Отношение двух отрезков не зависит от выбора системы измерения.

Если в формулах (5) положим $\lambda' = 1$, то найдем, что

$$\frac{a}{l} = \frac{\alpha}{\lambda} = \alpha',$$

то-есть, отношение отрезка a к отрезку l есть не что иное, как длина α' первого, вычисленная в предположении, что длина λ' второго равна единице, то-есть, в предположении, что второй принят за единицу длины.

Замечание. Сохраняя предыдущие обозначения, положим

$$\frac{\alpha}{\lambda} = q; \quad \alpha = \lambda q = q\lambda.$$

Тогда $\frac{a}{l} = q$, и мы условимся считать равносильными равенства

$$\frac{a}{l} = q; \quad a = lq = ql,$$

следовательно, под отрезком lq или ql, где l есть отрезок, а q положительное вещественное число (рациональное или иррациональное), мы разумеем отрезок a, коего отношение к отрезку l равно q.

Если $a = ql$ и $l = \tau s$, где τ есть вещественное положительное число, а s есть отрезок, имеющий длину σ, то

$$a = q(\tau s),$$

и легко показать, что

$$a = q(\tau s) = (q\tau)s.$$

Действительно, из равенств

$$\alpha = q\lambda; \quad \lambda = \tau\sigma$$

находим:

$$\alpha = q\tau\sigma; \quad \frac{\alpha}{\sigma} = q\tau,$$

поэтому $\frac{a}{s} = q\tau; \quad a = (q\tau)s.$

Под непрерывностью прямой понимают следующее приписываемое ей свойство:

Каковы бы ни были система измерения S, произвольный отрезок l и произвольное положительное число q, на любой прямой можно от данной на ней точки отложить отрезок ql.

Другими словами, допускают, что существуют отрезки ql любой длины в любой системе измерения. Если допустить, что существует отрезок l любой длины λ в определенной системе измерения, то можно легко вывести, что это имеет место во всякой системе измерения, но мы на этом останавливаться не будем.

§ 7. ФУНКЦИЯ ОТРЕЗКОВ

Пусть S будет система измерения отрезков, в которой l есть единица длины, а отрезки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взятые в конечном числе n, имеют соответственно длины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Пусть далее

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

будет функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеющая определенное положительное значение при $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$. Если в системе S отрезок d имеет длину

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

и, следовательно, определяется равенством

$$d = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, l,$$

то пишут

$$d = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

и говорят, что отрезок d есть функция f отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и что отрезок d получается из отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n$ посредством тех операций, которые в функции f совершаются над переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или над числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Этому общему определению функции отрезков не противоречат рассмотренные нами раньше функции $d = a_1 + a_2$ и $d_1 = qa_1$, где d есть сумма отрезков a_1 и a_2, а d_1 есть произведение положительного вещественного числа q на отрезок a_1. В самом деле, если длины отрезков a_1 и a_2 в системе S будут α_1 и α_2, то длины отрезков d и d_1 соответственно будут $\alpha_1+\alpha_2$ и $q\alpha_1$, поэтому

$$d=(\alpha_1+\alpha_2)l \quad \text{и} \quad d_1=(q\alpha_1)l.$$

Отрезки, выражающиеся в различных системах измерения одною и тою же функцией, будут равны только тогда, когда будут выполнены некоторые условия, для установления которых мы возвратимся к указанной в начале этого §-а системе измерения S и введем в рассмотрение отрезок $l_1=\frac{l}{t}$, где t есть произвольное вещественное положительное число. В силу непрерывности прямой, отрезок l_1 существует. Он может быть сделан равным любому произвольному отрезку через приличный выбор числа t. В системе S длины отрезков

$$l,\ l_1=\frac{l}{t},\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$$

выражаются соответственно числами

$$1,\ \frac{1}{t},\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n.$$

Рассмотрим систему S', в которой произвольному отрезку $l_1=\frac{l}{t}$ приписана длина 1. Система S' является поэтому совершенно произвольной системой, ибо каждая система измерения вполне определяется указанием отрезка l', принятого за единицу длины, а мы можем сделать l_1 равным любому отрезку l', взяв $t=l:l'$.

Так как при переходе от системы S к системе S' длина $\frac{1}{t}$ отрезка l_1, обратившись в единицу, умножилась на t, то длины отрезков

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$$

выразятся соответственно в той же системе S' числами

$$t\alpha_1,\ t\alpha_2, \ldots,\ t\alpha_n.$$

Если же отрезки d и d_1 определяются в системах S и S' одною и тою же функцией:

$$d=f(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n) \quad \text{(система } S)$$

$$d_1=f(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n) \quad \text{(система } S'),$$

то

$$d = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) l,$$

$$d_1 = f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) l_1 = f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) \frac{l}{t},$$

следовательно, для существования равенства

$$d = d_1$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = tf(a_1, a_2, \ldots, a_n). \qquad (6)$$

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однородною функциею измерения ν (ν вещественное число), когда при любом t

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\nu f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Так, например, функции

$$\frac{x_1 x_2}{x_1^3 + x_2^3}; \quad \sin\frac{x_1}{x_2}; \quad \sqrt[3]{x_1 x_2 + x_3^2}; \quad \frac{x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}$$

суть однородные функции, коих измерения выражаются соответственно числами -1; 0; $\frac{2}{3}$; 1.

В силу равенства (6) можно установить следующее предложение:

Для того, чтобы отрезок d, определяемый как функция $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n$, был независим от выбора единицы длины или, что то-же, от системы измерения, необходимо и достаточно, чтобы функция f была однородной функцией первого измерения.

Если функция f есть либо неоднородная функция, либо однородная функция, измерение которой отлично от единицы, то для определенности отрезка d нужно требовать, чтобы был задан отрезок l, принятый за единицу. Отрезки d и δ, определяемые равенствами

$$d = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$\delta = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, l),$$

будут равны, если только

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, 1),$$

ибо, допуская это равенство, имеем $\delta = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, 1)\, l$ и

$$d = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, l = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, 1)\, l = \delta.$$

Отсюда следует, что, не изменяя d, можно ввести множителем или делителем любую степень отрезка l, принятого за единицу длины, в любую составную часть функции $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, заменив таким образом функцию $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ функцией $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, l)$.

Пользуясь этим, можно всегда, не изменяя отрезка d, заменить определяющую его функцию $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ однородною функцией первого измерения относительно отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n, l$, для чего вместо функции

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

берем, например, функцию φ, определяемую равенством

$$\varphi = f\left(\frac{a_1}{l}, \frac{a_2}{l}, \ldots, \frac{a_n}{l}\right) l.$$

Будучи однородной функцией первого измерения относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n, l$, она обращается в $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при замене отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n, l$ их длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n, 1$.

Эта замена функции f однородной функцией φ называется **восстановлением однородности** функции f.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ПОСРЕДСТВОМ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ. — УСЛОВИЯ ДОСТАТОЧНЫЕ

В элементах Геометрии показано, как при помощи циркуля и линейки строятся отрезки $a + b$; $a - b$ (при $a > b$); ra; $\frac{ab}{c}$ и $\sqrt{ab}$, где a, b, c данные отрезки, а r данное рациональное число. Обозначая через l единицу длины, мы строим отрезок $d = r$, как отрезок $d = rl$. Так строится рациональное число r, рассматриваемое как функция, определяющая отрезок d. Отрезки

$$ab; \quad \frac{a}{b} \text{ и } \sqrt{a}$$

строятся циркулем и линейкой, как отрезки

$$\frac{ab}{l};\ \frac{al}{b}\ \text{и}\ \sqrt{al}.$$

Таким образом, рациональному числу r соответствует отрезок rl, а каждой из пяти элементарных арифметических операций (сложению, вычитанию, умножению, делению и извлечению квадратного корня), совершаемых над числами, соответствует геометрическая операция (построение), совершаемая над отрезками. Отсюда следует, что при помощи циркуля и линейки можно построить любую вещественную функцию рациональных чисел и отрезков, если только в этой функции над ними не совершают никаких других кроме упомянутых пяти элементарных операций, взятых в конечном числе.

Такую функцию мы будем называть элементарной функцией данных отрезков, а отрезок, определяемый элементарной функцией данных отрезков, мы будем называть элементарным отрезком; следовательно, всякий элементарный отрезок построяем при помощи циркуля и линейки.

Построения производятся в том порядке, в каком указаны элементарные операции в выражении функции.

Так, например, для построения отрезка

$$x=\sqrt{r},$$

где r рациональное число, необходимо иметь единицу длины l. Имея ее, строим отрезок $d=rl$ и $x=\sqrt{d}=\sqrt{rl}$.

Для построения отрезка

$$z=\sqrt{\frac{x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}},$$

где x и y данные отрезки, можем ввести произвольную единицу длины l, так как отрезок z, будучи однородной функцией первого измерения от x и y, не зависит от выбора единицы длины.

Строим последовательно следующие отрезки: 1) $x^2=\frac{x^2}{l}$; 2) $\sqrt{y}$; 3) y^2; 4) $\sqrt{x}$; 5) $x^2\sqrt{y}$; 6) $y^2\sqrt{x}$; 7) $x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}$; 8) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; 9) $\frac{x^2\sqrt{y}+y^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ и 10) z.

Нет, конечно, надобности идти непременно по этому общему пути. Так, например, заметив, что

$$z=\sqrt{y\frac{x^2+y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+y}},$$

строим, не прибегая ни к какой единице длины, отрезки:

$$1)\ p=\sqrt{xy};\ 2)\ s=\sqrt{xy}+y;\ 3)\ \frac{x^2}{s};\ 4)\ \frac{py}{s};\ 5)\ \sigma=\frac{x^2}{s}+\frac{py}{s};$$

$$6)\ z=\sqrt{y\sigma}.$$

Замечание. Часто отрезку приписывается отрицательное численное значение, а именно его длина, взятая со знаком минус. Такой отрезок называется отрицательным. Противоположные знаки приписывают отрезкам, прямо-противоположно направленным. Если отрезок a меньше отрезка b, то под $a-b$ разумеют отрезок $b-a$, взятый со знаком минус, то-есть отрезок $b-a$, направленный прямо-противоположно отрезку $a-b$. Операции над отрицательными отрезками совершаются по правилам производства операций над отрицательными числами. При отрицательном a символ $\sqrt{a}$ выражает мнимый отрезок, который геометрически не строится, пока исследования остаются в области вещественных величин. При $a=b$ под $a-b$ разумеют „несобственный" отрезок „нуль", которому приписывается длина 0. Из этого следует, что при любом отрезке a имеем $a+0=0+a=a-0=a$, $0-a=-a$, $a.0=0.a=0$ и, наконец, $0:a=0$ при $a\neq 0$.

Знаком $|a|$ обозначают тот из двух отрезков a и $-a$, которому приписана положительная длина. В дальнейшем мы рассматриваем только положительные отрезки, и знак $(-)$ есть знак вычитания, а не знак отрезка.

§ 9. ПОСТРОЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ПОСРЕДСТВОМ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ. — УСЛОВИЯ НЕОБХОДИМЫЕ

Когда три точки A, B, C расположены на одной прямой, то в их расположении возможны следующие 6 случаев: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Нетрудно усмотреть, что при любом из этих расположений имеет место равенство

$$\overline{AB} = \left| \overline{AC} \pm \overline{CB} \right|,$$

где знак плюс относится к тем двум случаям, когда точка C расположена между точками A и B, а знак минус — к остальным четырем случаям.

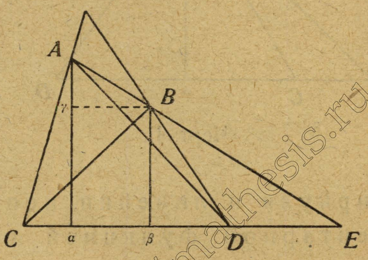
Сделаем еще следующее замечание:

Элементарная функция f от элементарных отрезков $a_1, b_1, \ldots$ есть элементарная функция от основных или данных отрезков $a, b, \ldots$, то-есть отрезок, равный f, есть элементарный отрезок. Действительно, для получения f достаточно применить ряд исключительно элементарных операций к отрезкам $a_1, b_1, \ldots$, которые сами получаются из основных отрезков $a, b, \ldots$ путем применения к последним исключительно элементарных операций, следовательно, отрезок f получается из основных путем применения исключительно элементарных операций. Так, например, если стороны a, b, c треугольника суть элементарные функции некоторых данных отрезков, то не только проекция b_c стороны b на сторону c, но и высота h_c треугольника, опущенная на сторону c, есть элементарный отрезок, так как в силу известной теоремы о квадрате стороны треугольника

$$b_c = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2b}; \quad h_c = \sqrt{b^2 - b_c^2}.$$

Докажем теперь некоторые вспомогательные леммы.

Лемма первая. Если четырьмя точками A, B, C, D определяются шесть отрезков $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, то любой из них есть элементарная функция остальных пяти.



Черт. I.

Доказательство. Покажем, например, что отрезок $\overline{AB}$ есть элементарная функция остальных пяти отрезков. Проектируя на прямую $\overline{CD}$ отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, найдем из треугольников ACD и BCD, что проекции $\overline{C\alpha}$ и $\overline{C\beta}$, а также и высоты $\overline{A\alpha}$ и $\overline{B\beta}$ суть элементарные функции пяти отрезков $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.

Поэтому и отрезок $\overline{a\beta} = |\overline{aC} \pm \overline{C\beta}|$ будет элементарным. Проведя $B\gamma \parallel CD$ до встречи в точке γ с отрезком $\overline{Aa}$ или его продолжением, находим последовательно, что и отрезки $\overline{a\gamma} = \overline{B\beta}$; $\overline{A\gamma} = |\overline{Aa} \pm \overline{a\gamma}|$; $\overline{\gamma B} = \overline{a\beta}$ и $\overline{AB} = \sqrt{(\overline{A\gamma})^2 + (\overline{\gamma B})^2}$ суть элементарные функции отрезков $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$.

Лемма вторая. Расстояние точки встречи двух из шести прямых, определяемых четырьмя точками A, B, C, D, от одной из этих точек есть элементарная функция каких-либо пяти из шести отрезков, определяемых точками A, B, C, D.

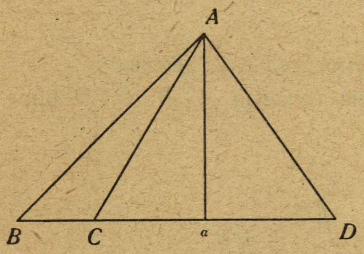
Доказательство. Рассмотрим, например, точку E встречи (черт. I) прямых AB и CD.

Из подобия треугольников AaE, $A\gamma B$ и $B\beta E$ находим

$$\overline{AE} = \frac{\overline{Aa} \cdot \overline{AB}}{\overline{A\gamma}}; \quad \overline{BE} = \frac{\overline{B\beta} \cdot \overline{AB}}{\overline{A\gamma}};$$

отсюда в связи с первой леммой вытекает вторая лемма, ибо отрезки $\overline{AB}$, $\overline{Aa}$, $\overline{A\gamma}$, $\overline{B\beta}$ суть элементарные функции пяти отрезков $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, а каждый из шести отрезков $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ есть элементарная функция пяти остальных.

Лемма третья. Если отрезок $\overline{AB}$ (черт. II), соединяющий вершину треугольника ACD с точкой B его основания, а также стороны треугольника суть элементарные отрезки, то и отрезки $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$ будут элементарными.



Черт. II.

В треугольнике ACD высота $\overline{Aa}$, а также отрезки $\overline{aC}$ и $\overline{aD}$ суть элементарные функции сторон, поэтому и отрезки $\overline{Ba} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{Aa}^2}$; $\overline{BC} = |\overline{Ba} \pm \overline{aC}|$; $\overline{BD} = |\overline{Ba} \pm \overline{aD}|$ будут элементарными.

Теорема. Для того, чтобы отрезок x мог быть построен при помощи циркуля и линейки, необходимо, чтобы он был элементарной функцией основных отрезков данной задачи.

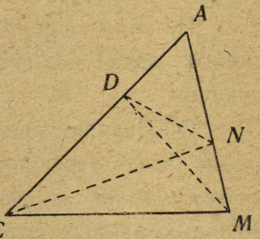
Доказательство. Мы видели выше, что любой отрезок x, построяемый при помощи циркуля и линейки, имеет определенный порядок, то-есть принадлежит к определенному классу последовательно построяемых отрезков. Каждый отрезок a первого порядка есть элементарная функция данных отрезков, ибо $a=a$.

Допустим, что всякий отрезок порядка $n-1$ есть элементарный отрезок, и докажем, что то же свойство принадлежит и отрезку порядка n.

Отрезок $\overline{AB}$ порядка $n>1$ соединяет точку A порядка n с точкой B порядка не выше n. Допустим сначала, что порядок точки B ниже n. Относительно точки A возможны только следующие предположения.

I. Точка A получена (черт. I), как пересечение двух дуг, описанных из двух точек C и D порядков ниже n радиусами $\overline{CA}$ и $\overline{DA}$, порядки которых ниже n. Так как по допущению порядок точки B также ниже n, то пять отрезков $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, имея порядки ниже n, будут элементарными по допущению, следовательно, по первой лемме отрезок AB также будет элементарным.

II. Точка A получена (черт. III), как пересечение прямой CD порядка ниже n с дугою круга, описанного из точки M радиусом $\overline{MA}$ порядка ниже n. Стороны треугольника MCD и отрезок $\overline{MA}$, имея порядки ниже n, будут элементарными, а потому, согласно третьей лемме и отрезок $\overline{DA}$ будет элементарным, вследствие чего на точку A можно смотреть, как на точку, полученную пересечением двух дуг, описанных из точек D и M (порядков ниже n) элементарными радиусами $\overline{DA}$ и $\overline{MA}$, что приводит к предыдущему случаю.



Черт. III.

III. Точка A получена (черт. III), как пересечение двух прямых CD и MN, определяемых точками C, D, M, N, порядки которых ниже n. В этом случае шесть отрезков $\overline{CD}$, $\overline{CN}$, $\overline{CM}$, $\overline{DN}$, $\overline{DM}$, $\overline{MN}$, имея порядки ниже n, будут элементарными, и, согласно второй лемме элементарным будет и отрезок $\overline{AC}$. Можно поэтому смотреть на точку A, как на точку встречи дуги, описанной из точки C элементарным радиусом $\overline{CA}$, с прямой MN порядка ниже n, что сводит вопрос к предыдущему случаю.

Положим теперь, что точка B также имеет порядок n. Пусть C и D будут две какие-либо точки порядков ниже n (черт. I). Отрезок $\overline{CD}$ и, по доказанному, отрезки $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ (соединяющие точки A и B порядка n с точками C и D порядков ниже n) будут элементарными, а потому по первой лемме, элементарным будет и отрезок $\overline{AB}$. Теорема, таким образом, доказана.

§ 10. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ

Так как всякий геометрический образ, рассматриваемый в Элементарной Геометрии, определяется конечным числом точек, а взаимное расположение точек в системе, состоящей из n точек, в свою очередь определяется $2n-3$ отрезками из числа тех, которыми соединяются попарно эти n точек *, то для построения искомой фигуры достаточно найти и построить определяющие ее отрезки. Если искомая фигура должна быть определенным образом расположена относительно некоторых других фигур или, что то-же, других систем точек, то нужно построить и те отрезки, при помощи которых определяется расположение искомой фигуры относительно данных систем точек.

На этом основан наиболее важный метод решения конструктивных задач — алгебраический метод, состоящий в следующем.

Обозначив через $a, b, \ldots$ отрезки первого класса (или только те из этих отрезков, которыми определяются данные в задаче системы точек и взаимное расположение этих систем), ищем ту функцию данных отрезков, которою выражается тот или другой из отрезков, определяющих искомую фигуру или ее расположение. Если задача вполне определенная, то ее условия должны дать возможность составления некоторого уравнения $f(x)=0$, которому удовлетворяет искомый отрезок, причем $f(x)$ есть функция от искомого отрезка x, от данных отрезков $a, b, \ldots$ и от некоторых чисел **.

---

* Рассматривая n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в определенном, хотя и произвольном, порядке $A_1, A_2, \ldots, A_n$, находим, что относительное положение первых двух точек A_1, A_2 определяется отрезком A_1A_2. Положение же любой точки A_k относительно предшествующих ей точек $A_1, A_2, \ldots, A_g, \ldots, A_h, \ldots, A_{k-1}$ определяется указанием ее расстояний A_gA_k и A_hA_k от каких-либо двух предшествующих и указанием той из двух полуплоскостей (на которые плоскость чертежа разделяется прямой A_gA_h), в которой расположена точка A_k.

** Обыкновенно составляется система уравнений, совместно определяющих те или иные из искомых отрезков, а также и некоторые вспомогательные отрезки.

Если в результате решения уравнения $f(x)=0$ получаем $x=\varphi(a, b, \ldots)$, где φ есть элементарная функция данных отрезков a, b, ..., то отрезок x построяем при помощи циркуля и линейки. В противном случае задача при помощи циркуля и линейки неразрешима. Задача разрешима при помощи циркуля и линейки в том и только в том случае, когда все отрезки, определяющие искомую фигуру и ее положение, будут элементарными функциями от данных отрезков.

Это приводит к следующей аналитической задаче:

Указать критерии возможности решения данного уравнения при помощи элементарных функций.

Не решая вопроса в общем виде, остановимся только на случае, когда уравнение $f(x)=0$ есть алгебраическое уравнение, коэффициенты которого суть элементарные функции от данных отрезков. Для нашей цели нам нужно будет установить введенное Дедекиндом в науку понятие о корпусе или поле и доказать некоторые вспомогательные теоремы.

§ 11. КОРПУС ИЛИ ПОЛЕ

Пусть K будет система величин (элементов), для которых установлены понятия о рациональных элементарных операциях, причем операции сложения, вычитания, умножения и деления так определены, что сумма, разность, произведение и частное каждых двух элементов из системы K есть вполне определенный элемент из той же системы K (деление на нуль, конечно, не рассматривается). Такую систему величин называют корпусом или полем. Если a есть элемент корпуса K, то говорят, что a принадлежит корпусу K или содержится в нем. Когда все элементы корпуса K принадлежат корпусу K_1, то говорят, что K есть делитель корпуса K_1 или его подкорпус. Корпус же K_1 есть надкорпус корпуса K. Делитель корпуса K_1 может совпадать с последним.

Примеры. Число нуль само по себе есть числовой корпус, ибо $0+0=0-0=0\cdot 0=0$, а деление на нуль не рассматривается. Впредь мы под корпусом будем разуметь корпус, отличный от этого корпуса.

Система всех целых чисел не есть корпус, ибо в этой системе не содержится, например, число $1:2$.

Система R всех рациональных чисел есть числовой корпус.

Система S всех вещественных чисел есть числовой корпус, содержащий, как часть, корпус R, поэтому R есть делитель корпуса S.

Система всех комплексных чисел есть надкорпус корпуса вещественных чисел.

Во всяком корпусе K содержится, как часть, корпус R, ибо, по допущению, в корпусе K содержится по крайней мере один отличный от нуля элемент a, а потому в K содержатся также элементы $\frac{a}{a}=1$; $1+1=2$; $2+1=3$; ...; $1-1=0$; $0-1=-1$; $-1-1=-2$; и т. д., вообще — любые два целых числа b и c и, следовательно, любая рациональная дробь $\frac{b}{c}$, то-есть весь корпус R.

Пусть $x, y, \ldots, u$ будут некоторые величины, принадлежащие или не принадлежащие корпусу K. Всякую рациональную функцию $f(x, y, \ldots, u)$ величин $x, y, \ldots, u$, коэффициенты которой суть элементы корпуса K, мы будем называть функцией от $x, y, \ldots, u$ в корпусе K или функцией, принадлежащей корпусу K. Если к корпусу K присоединим все рациональные функции от $x, y, \ldots, u$, принадлежащие корпусу K, то получим систему величин, составляющих новый корпус K_1, ибо результат элементарной рациональной операции, произведенной над функциями, принадлежащими корпусу K, есть также функция, принадлежащая корпусу K. Мы будем говорить, что корпус K_1 получен из корпуса K приобщением величин $x, y, \ldots, u$, и будем писать

$$K_1 \equiv K[f(x, y, \ldots, u)].$$

Корпус K_1 совпадает, очевидно, с корпусом K, когда $x, y, \ldots, u$ суть элементы корпуса K.

Если K есть корпус и a один из его элементов, то квадратный радикал $\sqrt{a}$ может принадлежать или не принадлежать этому корпусу. В первом случае мы будем говорить, что $\sqrt{a}$ в корпусе K есть радикал приводимый или извлекомый; во втором случае скажем, что $\sqrt{a}$ есть радикал неприводимый в корпусе K. Мы впредь будем предполагать, что относительно каждого квадратного корня, извлекаемого из любого элемента корпуса K, мы умеем установить факт приводимости или неприводимости этого корня в корпусе K. Таков, например, будет корпус, полученный из корпуса R приобщением конечного числа отрезков $a, b, \ldots, k$. Элементарная Алгебра дает средства нахождения точного квадратного корня из любого рационального числа и из любой рациональной функции от $a, b, \ldots, k$, если только такой корень существует.

Впредь, пока противное не оговорено, мы будем предполагать, что a есть элемент корпуса K и что $\sqrt{a}$ есть неприводимый радикал этого корпуса. Приобщив к корпусу K радикал $\sqrt{a}$ (и, конечно, все рациональные функции от $\sqrt{a}$), мы получим корпус, который впредь будем обозначать через K_1.

§ 12. КОРПУС $K_1 \equiv K(\sqrt{a})$.

Мы будем обозначать греческими буквами элементы корпуса K, латинскими буквами — функции от x в корпусе K.

Очень легко доказываются следующие предложения.

1. Если $\beta+\gamma\sqrt{a}=0$, то $\beta=\gamma=0$, ибо, допуская, что γ не$=0$, найдем, что $\sqrt{a}=-\beta:\gamma$, что невозможно, так как по допущению радикал $\sqrt{a}$ неприводим в корпусе K.

Если $\beta+\gamma\sqrt{a}=\varepsilon+\delta\sqrt{a}$, то $\beta=\varepsilon$ и $\gamma=\delta$. Это следует из равенства $(\beta-\varepsilon)+(\gamma-\delta)\sqrt{a}=0$.

2. Если равенство $r+s\sqrt{a}=0$ есть тождество относительно x, то $r=s=0$. Ибо, расположив $r+s\sqrt{a}$ по степеням x, из равенства $r+s\sqrt{a}=0$ найдем, что каждый из коэффициентов при различных степенях x равен нулю. Коэффициент при x^k будет вида $\beta_k+\gamma_k\sqrt{a}$ $(k=0, 1, \ldots)$, где β_k и γ_k соответственно суть коэффициенты при x^k в полиномах r и s. Из равенства же $\beta_k+\gamma_k\sqrt{a}=0$ $(k=0, 1, \ldots)$ следует, как мы видели, $\beta_k=\gamma_k=0$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Если $r+s\sqrt{a}=u+v\sqrt{a}$ тождественно, то $r=u$; $s=v$ тождественно.

Так как $(\sqrt{a})^{2n}=a^n$ и $(\sqrt{a})^{2n+1}=a^n\sqrt{a}$, то всякий элемент корпуса K_1 имеет вид $\dfrac{\beta+\gamma\sqrt{a}}{\delta+\varepsilon\sqrt{a}}$ или приводится к этому виду, причем, конечно, знаменатель $\delta+\varepsilon\sqrt{a}$ не$=0$. Элемент $\delta-\varepsilon\sqrt{a}$ корпуса K_1 также не равен нулю, ибо в противном случае мы имели бы $0=\delta=\varepsilon=\delta+\varepsilon\sqrt{a}$. Помножая числителя и знаменателя дроби $\dfrac{\beta+\gamma\sqrt{a}}{\delta+\varepsilon\sqrt{a}}$ на $\delta-\varepsilon\sqrt{a}$, найдем, что

$$\frac{\beta+\gamma\sqrt{a}}{\delta+\varepsilon\sqrt{a}}=\frac{\beta\delta-a\gamma\varepsilon}{\delta^2-a\varepsilon^2}+\frac{\gamma\delta-\beta\varepsilon}{\delta^2-a\varepsilon^2}\sqrt{a}=\mu+\nu\sqrt{a},$$

где μ и ν элементы корпуса K.

3. Мы нашли, таким образом, что каждый элемент корпуса K_1 будет вида $\mu+\nu\sqrt{a}$ или приводится к этому виду.

4. Задача. Определить, будет-ли радикал $\sqrt{\beta+\gamma\sqrt{a}}$ приводим в корпусе K_1.

Для того, чтобы радикал $\sqrt{\beta+\gamma\sqrt{a}}$ был равен какому-либо элементу $\delta+\varepsilon\sqrt{a}$ корпуса K_1, необходимо и достаточно, чтобы можно было указать два элемента δ и ε корпуса K, удовлетворяющих равенству

$$(\delta+\varepsilon\sqrt{a})^2=\beta+\gamma\sqrt{a}$$

или

$$(\delta^2+a\varepsilon^2)+2\delta\varepsilon\sqrt{a}=\beta+\gamma\sqrt{a},$$

откуда получаем два уравнения

$$\delta^2+a\varepsilon^2=\beta$$

$$2\delta\varepsilon=\gamma$$

для определения величин δ и ε. Из последнего уравнения вытекает, что

$$\delta^2(a\varepsilon^2)=\frac{a\gamma^2}{4};$$

поэтому δ^2 и $a\varepsilon^2$, будучи элементами корпуса K, должны быть корнями уравнения

$$\xi^2-\beta\xi+\frac{a\gamma^2}{4}=0,$$

поэтому

$$\delta^2=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-a\gamma^2}}{2};\ \varepsilon^2=\frac{\beta\mp\sqrt{\beta^2-a\gamma^2}}{2a},$$

откуда вытекает требование, чтобы радикал

$$m=\sqrt{\beta^2-a\gamma^2}$$

был приводим в корпусе K, так как в противном случае δ^2 и ε^2, а с ними δ и ε не будут элементами корпуса K. Предполагая, что это требование удовлетворено, находим далее, что один из двух радикалов

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\beta + m}{2}}; \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\beta - m}{2}},$$

представляющих два значения δ, должен быть приводим в корпусе K.

Так как произведение $\delta_1 \delta_2 = \sqrt{\frac{\beta^2 - m^2}{4}} = \frac{\gamma}{2}\sqrt{a}$, то из двух радикалов δ_1 и δ_2 только один может быть приводим в корпусе K, так как в противном случае и радикал $\sqrt{a}$ принадлежал бы, вопреки предположению, корпусу K.

Допустим же, что из двух радикалов δ_1 и δ_2 один, который обозначим через δ, приводим в корпусе K. Тот из двух радикалов

$$\sqrt{\frac{\beta + m}{2a}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\beta - m}{2a}},$$

которым выражается соответствующее значение ε, также будет приводим в корпусе K, ибо, как показано выше,

$$\delta \varepsilon = \frac{\gamma}{2}.$$

При наших допущениях радикал $\sqrt{\beta + \gamma\sqrt{a}}$ представится либо в виде

$$\sqrt{\frac{\beta + m}{2}} + \sqrt{\frac{\beta - m}{2a}}\sqrt{a},$$

либо в виде

$$\sqrt{\frac{\beta - m}{2}} + \sqrt{\frac{\beta + m}{2a}}\sqrt{a},$$

то-есть в обоих случаях будем иметь

$$\sqrt{\beta + \gamma\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\beta + m}{2}} + \sqrt{\frac{\beta - m}{2}}.$$

Итак, для того, чтобы радикал

$$\sqrt{\beta + \gamma\sqrt{a}}$$

был приводим в корпусе K_1, необходимо и достаточно, чтобы радикал

$$m=\sqrt{\beta^2-a\gamma^2}$$

был приводим в корпусе K и чтобы в этом корпусе был приводим один из двух радикалов

$$\sqrt{\frac{\beta+m}{2}} \text{ и } \sqrt{\frac{\beta-m}{2}}.$$

При этом

$$\sqrt{\beta+\gamma\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{\beta+m}{2}}+\sqrt{\frac{\beta-m}{2}}.$$

Тот из двух радикалов правой части этого равенства, который неприводим в корпусе K, будет произведением элемента корпуса K на радикал $\sqrt{a}$.

§ 13. СОСТАВ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФУНКЦИИ

Если элементарная функция f данных величин, в частности, отрезков a, b, ..., k, не содержит радикалов, то она принадлежит корпусу, получаемому путем приобщения величин a, b, ..., k к корпусу рациональных чисел. Впредь мы под корпусом K_0 разумеем именно этот корпус. Элементы этого корпуса мы будем считать **рациональными**. Для такого корпуса K_0 мы умеем устанавливать приводимость или неприводимость в нем любого радикала $\sqrt{a_0}$, где a_0 есть рациональный элемент. В случае приводимости радикал $\sqrt{a_0}$ может быть заменен известным элементом корпуса K_0.

Когда элементарная функция f содержит **один** только радикал, то это будет радикал типа $\sqrt{a_0}$, где a_0 есть рациональный элемент. Мы вправе и будем считать радикал $\sqrt{a_0}$ неприводимым в корпусе K_0 (так как в противном случае его можно исключить, заменив его элементом корпуса K_0, и функция f все еще будет принадлежать корпусу K_0). Функция f, содержащая один только радикал $\sqrt{a_0}$, имеет вид $f=\beta+\gamma\sqrt{a}$, где β и γ — рациональные элементы и $\gamma\neq 0$; она не принадлежит поэтому корпусу K_0, но принадлежит корпусу $K_1=K_0[\sqrt{a_0}]$, получаемому из корпуса K_0 приобщением неприводимого в нем радикала $\sqrt{a_0}$.

Обозначая через $a_1 = \beta + \gamma\sqrt{a_0}$ произвольный элемент корпуса K_1, находим, как это видно из решения предыдущей задачи (§ 12, п. 4), что мы можем установить неприводимость или приводимость радикала $\sqrt{a_1}$ в корпусе K_1 и указать тот элемент корпуса K_1, которому равен радикал $\sqrt{a_1}$ в случае приводимости.

Если функция f содержит только два радикала, то один из них будет вида $\sqrt{a_0}$, а другой радикал будет вида $\sqrt{a_1}$, где a_1 есть элемент корпуса K_1 (в частности, элемент $a_1 = \beta + \gamma\sqrt{a_0}$ может быть элементом корпуса K, если $\gamma = 0$), а $\sqrt{a_1}$ есть неприводимый в корпусе K_1 радикал. Функция f принадлежит в этом случае корпусу $K_2 \equiv K_1[\sqrt{a_1}]$, получаемому из корпуса K_1 приобщением неприводимого в нем радикала $\sqrt{a_1}$.

Продолжая это рассуждение, находим, что всякая элементарная функция f принадлежит некоторому корпусу K_n, который получается следующим образом через последовательное приобщение к корпусу R отрезков и радикалов, содержащихся в f:

1. Корпусу R рациональных чисел приобщаются все данные отрезки, и таким образом получается корпус K_0.

2. К корпусу K_0 приобщается неприводимый в нем радикал $\sqrt{a_0}$, и таким образом получается корпус $K_1 \equiv K_0[\sqrt{a_0}]$.

3. Корпусу K_1 приобщается неприводимый в нем радикал $\sqrt{a_1}$, где a_1 есть элемент корпуса K_1, и таким образом получается корпус $K_2 \equiv K_1[\sqrt{a_1}]$.

. . . .

n. К корпусу K_{n-1} приобщается неприводимый в нем радикал $\sqrt{a_{n-1}}$, где a_{n-1} есть элемент корпуса K_{n-1}, и таким образом получается корпус $K_n \equiv K_{n-1}[\sqrt{a_{n-1}}]$.

Последний приобщаемый радикал будет внешним радикалом функции f и корпуса K_n. В выражении f этот радикал не будет содержаться под знаком радикала, поэтому f имеет вид:

$$f = \beta + \gamma\sqrt{a_{n-1}},$$

где β и γ суть элементы корпуса K_{n-1}.

Когда кроме функции f даны еще несколько элементарных функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (k — конечное число), то, приобщая последовательно к ранее полученному корпусу K_n радикалы, входящие в состав этих функций (причем каждый приобщаемый радикал неприводим в том корпусе, к которому этот радикал приобщается), мы придем к такому корпусу K_m, которому принадлежат все элементарные функции $f, f_1, f_2, \ldots, f_k$. Последний приобщаемый радикал $\sqrt{a_{m-1}}$ будет внешним радикалом системы функций $f, f_1, \ldots, f_k$ и корпуса K_m.

§ 14. УРАВНЕНИЯ В ДАННОМ КОРПУСЕ

Положим, что все коэффициенты $f, f_1, \ldots, f_k$ целой функции $\varphi(x)$ суть элементарные функции данных отрезков, принадлежащие корпусу K_m, построенному вышеуказанным путем. Тогда говорят, что функция $\varphi(x)$ принадлежит этому корпусу (а также всякому его надкорпусу).

Допустим далее, что, приравнивая нулю функцию $\varphi(x)$, принадлежащую корпусу K_m, мы получаем уравнение $\varphi(x)=0$, неэквивалентное никакому уравнению $\psi(x)=0$, в котором коэффициенты функции $\psi(x)$ принадлежат делителю корпуса K_m (отличному от K_m). В таком случае мы будем говорить, что уравнение

$$\varphi(x)=0$$

принадлежит корпусу K_m или есть уравнение в этом корпусе.

Легко видеть, что уравнение $\varphi(x)=0$ принадлежит корпусу K_m, если функция $\varphi(x)$ принадлежит этому корпусу, а коэффициент f ее высшего члена принадлежит корпусу K_{m-1} или его делителю. Действительно, допуская противное, мы нашли бы, что уравнение $\varphi(x)=0$ эквивалентно некоторому уравнению $\psi(x)=0$, принадлежащему делителю K_g $(g \leqslant m-1)$ корпуса K_m. Корпусу K_g будет принадлежать и коэффициент h высшего члена функции $\psi(x)$. В виду эквивалентности уравнений $\varphi(x)=0$ и $\psi(x)=0$, функция $\psi(x)$ может отличаться от $\varphi(x)$ только независящим от x множителем, который получим, деля высший член функции $\varphi(x)$ на высший член функции $\psi(x)$. Таким образом, мы пришли бы к тождеству

$$\varphi(x)=\frac{f}{h}\psi(x),$$

которое, однако, невозможно, так как правая часть этого тождества есть функция, принадлежащая корпусу K_{m-1} или его делителю, а левая ни тому, ни другому корпусу не принадлежит.

§ 15. ПРИВОДИМОСТЬ И НЕПРИВОДИМОСТЬ

Функция $\varphi(x)$ называется приводимой в некотором корпусе, если она есть произведение двух целых функций, зависящих от x и принадлежащих этому корпусу.

Функция $\varphi(x)$ степени n неприводима в некотором корпусе, если она неспособна делиться без остатка ни на какую целую функцию степени ниже n, зависящую от x и принадлежащую этому корпусу. В этом случае $\varphi(x)$ не будет произведением двух (целых) функций от x, принадлежащих этому корпусу.

Когда мы будем говорить о приводимости или неприводимости функции $\varphi(x)$ без указания корпуса, то будем подразумевать корпус, получаемый вышеуказанным способом путем приобщения к корпусу K_0 всех радикалов, входящих в состав коэффициентов функции $\varphi(x)$.

Уравнение $\varphi(x)=0$, принадлежащее некоторому корпусу, приводимо или неприводимо в этом корпусе, когда соответственно функция $\varphi(x)$ в нем приводима или неприводима.

Уравнение первой степени неприводимо ни в каком корпусе, ибо функция первой степени относительно x не может быть разложена на два зависящих от x целых множителя.

Функция $\varphi(x)=x^2-2$, принадлежащая корпусу R рациональных чисел, неприводима в нем, ибо она вообще не может быть разложена на два зависящих от x целых множителя вида $px+q$ и $rx+s$ с рациональными коэффициентами. В самом деле, полагая

$$(px+q)(rx+s)=x^2-2,$$

где p, q, r и s рациональные коэффициенты, найдем из этого тождества, что

$$pr=1;\ qr+ps=0;\ qs=-2;$$

поэтому

$$\frac{q}{p}+\frac{s}{r}=0;\ \frac{q}{p}\cdot\frac{s}{r}=-2,$$

откуда следует, что

$$\frac{q}{p}=-\frac{s}{r}=\sqrt{2},$$

а это невозможно, так как $\sqrt{2}$ не есть рациональное число.

Приобщая к корпусу R радикал $\sqrt{2}$, находим, что в корпусе $R_1 = R[\sqrt{2}]$ функция $x^2 - 2$ приводима:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Пусть опять

$$\varphi(x) = 0$$

будет уравнение степени n, коэффициенты которого суть элементарные функции данных отрезков. Допустим, что это уравнение принадлежит корпусу K_m, построенному вышеуказанным способом через последовательное приобщение к корпусу K_0 радикалов, входящих в состав коэффициентов функции $\varphi(x)$. Для простоты берем коэффициент при x^n равным 1, что не вносит никаких ограничений. Если $\sqrt{a_{m-1}}$ есть внешний радикал системы коэффициентов функции $\varphi(x)$, то имеем тождественно

$$\varphi(x) = A + B\sqrt{a_{m-1}},$$

где A и B суть функции от x в корпусе K_{m-1}; a_{m-1} есть элемент этого корпуса. Высший член x^n содержится в A, а не в B.

Лемма. Если функция $\varphi(x) = A + B\sqrt{a_{m-1}}$ неприводима в корпусе K_m, то и функция $A - B\sqrt{a_{m-1}}$ неприводима в этом корпусе.

Прежде всего заметим, что функция $A - B\sqrt{a_{m-1}}$ зависит от x, так как A есть функция степени n, а B есть функция степени ниже n. Еслибы функция $A - B\sqrt{a_{m-1}}$ была приводима, то мы имели бы тождественно

$$A - B\sqrt{a_{m-1}} = (p - q\sqrt{a_{m-1}})(r - s\sqrt{a_{m-1}}) =$$
$$= (pr + qs\,a_{m-1}) - (ps + qr)\sqrt{a_{m-1}},$$

где p, q, r и s суть функции в корпусе K_{m-1}, причем в каждой из двух пар функций p, q и r, s хоть одна зависела бы от x, и степень каждой из этих четырех функций была бы меньше n. Из последнего тождества, в виду неприводимости радикала $\sqrt{a_{m-1}}$ в корпусе K_m, находим, что

$$pr + qs\,a_{m-1} = A; \quad ps + qr = B.$$

Далее имеем тождественно

$$(p + q\sqrt{a_{m-1}})(r + s\sqrt{a_{m-1}}) = (pr + qs\,a_{m-1}) + (ps + qr)\sqrt{a_{m-1}} =$$
$$= A + B\sqrt{a_{m-1}}.$$

Так как степень каждого из двух множителей $p+q\sqrt{a_{m-1}}$ и $r+s\sqrt{a_{m-1}}$ меньше n, то каждый из них зависит от x, ибо в противном случае их произведение имело бы степень ниже n и не было бы равно $A+B\sqrt{a_{m-1}}$. Мы видим, таким образом, что из приводимости функции $A-B\sqrt{a_{m-1}}$ в корпусе K_m вытекает приводимость функции $A+B\sqrt{a_{m-1}}$ в том же корпусе, откуда следует, что из неприводимости последней функции вытекает неприводимость первой. Точно также покажем, что из неприводимости функции $A-B\sqrt{a_{m-1}}$ вытекает неприводимость функции $A+B\sqrt{a_{m-1}}$.

Теорема. Если уравнение

$$A+B\sqrt{a_{m-1}}=0, \tag{1}$$

где A, B, $\sqrt{a_{m-1}}$ имеют указанные в предыдущей лемме значения, есть неприводимое уравнение в корпусе K_m, то уравнение

$$A^2-B^2a_{m-1}=0 \tag{2}$$

неприводимо в корпусе K_{m-1}.

Доказательство. Если уравнение (2) приводимо в корпусе K_{m-1}, то имеем тождественно

$$(A+B\sqrt{a_{m-1}})(A-B\sqrt{a_{m-1}})=A^2-B^2a_{m-1}=MN, \tag{3}$$

где M и N две функции, зависящие от x и принадлежащие корпусу K_{m-1}. Так как функция $A^2-B^2a_{m-1}$, равная MN, имеет степень $2n$, то по крайней мере одна из двух функций M и N имеет степень μ, не превосходящую n. Допустим, что μ есть степень функции M. Из тождества (3) вытекает, что по крайней мере одна из двух функций $A+B\sqrt{a_{m-1}}$ и $A-B\sqrt{a_{m-1}}$ имеет с функцией M общего зависящего от x делителя d. Функция $A+B\sqrt{a_{m-1}}$ по условию неприводима, и по предыдущей лемме функция $A-B\sqrt{a_{m-1}}$ неприводима, так что к обеим функциям $A+B\sqrt{a_{m-1}}$ и $A-B\sqrt{a_{m-1}}$ относятся одинаковые задания. Мы не сделаем поэтому никакого ограничения, предположив, что именно функции $A+B\sqrt{a_{m-1}}$ и M имеют общего зависящего от x делителя d, а потому и зависящего от x общего наибольшего делителя D. Так как общий наибольший делитель D двух функций $A+B\sqrt{a_{m-1}}$ и M может быть найден процессом последовательного деления, состоящим исключительно из рациональных операций, то D будет целая зависящая от x функция в корпусе K_m степени h, где $1 \leqslant h \leqslant \mu \leqslant n$. Если $h = n$, то и $\mu = n$. Функция D будет в этом случае отличаться от M и от $A + B\sqrt{a_{m-1}}$ только постоянными множителями, а потому и функции M и $A + B\sqrt{a_{m-1}}$ также отличались бы одна от другой только постоянным (независящим от x) множителем, и уравнения

$$A + B\sqrt{a_{m-1}} = 0 \quad \text{и} \quad M = 0$$

были бы эквивалентны, что невозможно, так как функция $A+B\sqrt{a_{m-1}}$ принадлежит корпусу K_m, имея при высшем члене коэффициент 1, принадлежащий корпусу K_{m-1}, которому принадлежит и функция M (см. стр. 40). Таким образом, допущение $h = n$ должно быть отвергнуто. Но и допущение $h < n$ должно быть отвергнуто, так как при $h < n$ функция $A + B\sqrt{a_{m-1}}$ степени n имела бы зависящего от x и принадлежащего корпусу K_m делителя D степени ниже n, то-есть функция $A + B\sqrt{a_{m-1}}$ была бы приводима в корпусе K_m, что противно допущению.

§ 16. НЕОБХОДИМЫЕ КРИТЕРИИ ПОСТРОЯЕМОСТИ

Теорема. Всякая элементарная функция f данных отрезков есть корень неприводимого в корпусе K_0 алгебраического уравнения

$$F(x) = 0$$

степени 2^g с рациональными коэффициентами.

Доказательство. Пусть f будет элементарная функция, принадлежащая корпусу K_m, который вышеуказанным путем получается из корпуса K_0. Если $\sqrt{a_{m-1}}$ есть внешний радикал функции f, то $f = A + B\sqrt{a_{m-1}}$, где A и B суть функции данных отрезков, принадлежащие корпусу K_{m-1}. Уравнение

$$x - f \equiv (x - A) - B\sqrt{a_{m-1}} = 0,$$

которое для большей краткости и согласованности с предыдущей теоремой можно написать в виде

$$A_1 + B_1\sqrt{a_{m-1}} = 0, \tag{1}$$

будет неприводимым уравнением в корпусе K_m, имеющим корень f. Высший относительно x член содержится в A и имеет коэффициент 1. Помножая обе части этого уравнения на $A_1 - B_1\sqrt{a_m}$, получим удовлетворяющееся при $x=f$ уравнение

$$A_1^2 - B_1^2 a_{m-1} = 0 \tag{2}$$

2-й степени, которое содержит одним или несколькими радикалами меньше, чем уравнение (1). Высший член x^2 содержится в A_1^2. Уравнение (2) принадлежит корпусу K_{g_1} и по предыдущей теореме неприводимо в этом корпусе, причем $g_1 = m-1$ или $g_1 < m-1$, смотря по тому, содержит-ли выражение $A_1^2 - B_1^2 a_{m-1}$ только на один или на несколько радикалов меньше, чем выражение $A_1 + B_1\sqrt{a_{m-1}}$.

Обозначая через $\sqrt{a_{g_1-1}}$ внешний радикал левой части уравнения (2), напишем это уравнение в виде

$$A_2 + B_2\sqrt{a_{g_1-1}} = 0 \tag{2$'$}$$

и, умножая обе части уравнения на $A_2 - B_2\sqrt{a_{g_1-1}}$, получим удовлетворяющееся при $x=f$ уравнение

$$A_2^2 - B_2^2 a_{g_1-1} = 0 \tag{3}$$

степени 2^2, принадлежащее корпусу K_{g_2} и неприводимое в нем согласно предыдущей теореме. Здесь $g_2 < g_1 - 1$, если вместе с радикалом $\sqrt{a_{g_1-1}}$ уничтожился хотя бы еще один радикал при переходе от уравнения (2$'$) к уравнению (3), и $g_2 = g_1 - 1$, если уничтожился только радикал $\sqrt{a_{g_1-1}}$. Высший член x^4 содержится в A_2^2.

Обозначив теперь через $\sqrt{a_{g_2-1}}$ внешний радикал функции $A_2^2 - B_2^2 a_{g_1-1}$, напишем уравнение (3) в виде

$$A_3 + B_3\sqrt{a_{g_2-1}} = 0$$

и, освободив его от радикала $\sqrt{a_{g_2-1}}$, получим неприводимое уравнение степени 2^3, принадлежащее корпусу K_{g_3} и неприводимое в нем, и т. д. Последовательно получаемые уравнения неприводимы в корпусах, которым они принадлежат, все имеют корень f и каждое последующее содержит по крайней мере одним радикалом меньше предыдущего. Степени этих уравнений равны соответственно 1, 2, 2^2, ... Повторяя указанный процесс освобождения уравнения от радикалов конечное число (не более m) раз, мы придем к уравнению с рациональными (принадлежащими корпусу K_0) коэффициентами степени 2^g, неприводимому в рациональном корпусе K_0 и имеющему одним из своих корней указанную элементарную функцию f данных отрезков. Коэффициент высшего члена уравнения равен единице.

Теорема. Для того, чтобы геометрическая конструктивная задача могла быть решена при помощи циркуля и линейки, необходимо, чтобы каждый отрезок, определяющий искомую фигуру или ее положение, был корнем неприводимого в рациональном корпусе K_0 алгебраического уравнения степени 2^n. Корпус K_0 получается путем приобщения данных отрезков к корпусу рациональных чисел.

Эту теорему кратко выражают так:

Для того, чтобы отрезок был построяем при помощи циркуля и линейки, необходимо, чтобы он был корнем неприводимого уравнения степени 2^n с рациональными коэффициентами.

Верность теоремы вытекает из того, что при помощи циркуля и линейки можно построить только элементарную функцию данных отрезков, а такая функция, как уже нами доказано, есть корень уравнения указанного в теореме типа.

Следствие. Конструктивная задача, приводящаяся к построению корня неприводимого в рациональном корпусе K_0 уравнения, неразрешима при помощи циркуля и линейки, если все коэффициенты уравнения рациональны и степень уравнения содержит хоть одного нечетного делителя.

Поэтому уравнение степени m с рациональными коэффициентами, к которому приводится конструктивная задача, будет приводимо, если задача разрешима при помощи циркуля и линейки и если показатель m содержит нечетного множителя.

Делийская задача об удвоении куба, то-есть о построении куба, имеющего объем, вдвое больший объема данного куба, приводится к решению уравнения

$$x^3 - 2a^3 = 0,$$

где a и x соответственно суть ребра данного и искомого куба. Так как функция x^3-2a^3 неразложима на рациональные зависящие от x множители, то задача при помощи циркуля и линейки неразрешима.

Задача о трисекции угла приводится к решению уравнения

$$x^3-3x+b=0,$$

где $b=2\sin\alpha$; $x=2\sin\frac{\alpha}{3}$ и α есть данный угол, подлежащий разделению на три равные части. Действительно, мы получим это уравнение, полагая в тождестве

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$a=\frac{\alpha}{3}$, затем $x=2\sin\frac{\alpha}{3}$ и $b=2\sin\alpha$. При помощи циркуля и линейки задача о трисекции угла решается только для тех значений b, для которых уравнение будет приводимым, то-есть полином, стоящий в левой части, будет иметь в корпусе $R[b]$ множителя первой степени относительно x.

Так, например, если в египетском треугольнике ABC, в котором гипотенуза $BC=5$; $AB=4$; $AC=3$, опустить перпендикуляр AH из вершины прямого угла на гипотенузу, а из вершины C описать дугу круга радиусом BH до встречи с продолжением HA в точке F, то угол $HFC=\alpha$ можно будет разделить на три равные части при помощи циркуля и линейки, ибо $BH=\frac{16}{5}$; $CH=\frac{9}{5}$; $\sin\alpha=\frac{9}{16}$; $b=2\sin\alpha=\frac{9}{8}\cdot$ Для определения $x=2\sin\frac{\alpha}{3}$ имеем приводимое в корпусе R уравнение

$$x^3-3x+\frac{9}{8}=0,$$

один из корней которого равен $\frac{3}{2}\cdot$ Другие два корня определяются из квадратного уравнения

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}=0.$$

Поэтому синус угла $\frac{\alpha}{3}$ равен одному из трех чисел

$$\frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{21}-3}{8}\ \text{и}\ \frac{-\sqrt{21}-3}{8}.$$

Так как, α положительный острый угол, то $\sin\frac{\alpha}{3}$ не может быть отрицательным, а также не может быть больше, чем $\sin\alpha$, поэтому $\sin\frac{\alpha}{3}=\frac{\sqrt{21}-3}{8}$, и угол $\frac{\alpha}{3}$ может быть построен при помощи циркуля и линейки.

Когда указанные выше необходимые требования выполнены, то-есть степень неприводимого в корпусе K_0 уравнения, от решения которого зависит решение данной конструктивной геометрической задачи, равна 2^n, то нужно еще определить, имеет ли это уравнение корни, выражающиеся элементарными функциями данных отрезков, и найти такие корни в случае их существования. Вопрос этот был решен впервые французским геометром Ванцелем (L. Wantzel) в его классической статье: Récherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géometrie peut se resoudre avec la règle et le compas. Journal de Liuville, t. II, 1-e série, 1837 *. Другой критерий разрешимости алгебраического уравнения в квадратных радикалах указан выше в примечании на стр. 8. Мы ограничимся здесь только рассмотрением уравнения четвертой степени.

§ 17. О РЕШЕНИИ В КВАДРАТНЫХ РАДИКАЛАХ УРАВНЕНИЯ 4-ОЙ СТЕПЕНИ

Положим, что решение конструктивной геометрической задачи приведено к решению неприводимого в корпусе K_0 уравнения четвертой степени

$$y^4+gy^3+hy^2+ky+l=0. \tag{1}$$

Полагая в этом уравнении $y=x-\frac{g}{4}$, где x новая неизвестная, приведем решение этого уравнения к решению уравнения

$$x^4+ax^2+bx+c=0, \tag{2}$$

* Имеется русский перевод в приложении к книге Ф. Клейна: „Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии". Казань. 1898.

не содержащего члена с x^2. Здесь коэффициенты

$$\left.\begin{aligned} a &= h - \frac{3g^2}{8} \\ b &= k - \frac{gh}{2} + \frac{g^3}{8} \\ c &= l - \frac{kg}{4} + \frac{hg^2}{16} - \frac{3g^4}{256} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

суть элементарные функции данных отрезков.

Уравнения (1) и (2) либо оба имеют, либо оба не имеют корнем элементарную функцию. Допустим, что уравнение (2) имеет корнем некоторую элементарную функцию f. В § 16 (стр. 45) мы видели, что такая функция будет корнем неприводимого в корпусе K_{m-1} уравнения четвертой степени

$$A_2^2 - B_2^2 a_{m-1} = 0, \qquad (4)$$

где $A_2 = x^2 + \mu x + \nu$; $B_2 = \varrho x + \tau$. Так как последнее уравнение неприводимо в корпусе K_{m-1}, то оно a fortiori неприводимо в корпусе K_0. Но одна и та-же величина f не может быть корнем двух неэквивалентных и неприводимых в одном и том же корпусе уравнений *, следовательно, уравнения (2) и (4) не только эквивалентны, но их левые части тождественно равны, ибо в обоих уравнениях коэффициенты высших членов равны единице. Но выражение $A_2^2 - B_2^2 a_{m-1}$ распадается на два множителя второй степени $A_2 + B_2\sqrt{a_{m-1}}$ и $A_2 - B_2\sqrt{a_{m-1}}$, в которых коэффициенты суть элементарные функции данных отрезков, следовательно, и многочлен

$$x^4 + ax^2 + bx + c$$

должен распадаться на два таких множителя.

Это необходимое условие также будет достаточным, ибо при его выполнении уравнение (2) сведется к двум квадратным уравне-

* Если величина f есть корень двух неприводимых в некотором корпусе K уравнений $P = 0$ и $Q = 0$, то функции P и Q имеют общего зависящего от x функционального делителя, а потому и зависящего от x общего наибольшего делителя D, принадлежащего корпусу K. Степень каждой из функций P и Q, в виду неприводимости этих функций и делимости их на D, равна степени полинома D, а потому обе функции P и Q могут отличаться от D. а следовательно и друг от друга только постоянным множителем. В таком случае уравнения $P = 0$ и $Q = 0$ эквивалентны.

ниям, которых коэффициенты, а, следовательно, и корни будут элементарными функциями.

Итак, необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (2), а с ним и уравнение (1), имело корнем элементарную функцию данных отрезков (или, как говорят, было разрешимо в квадратных радикалах), является существование (то-есть возможность разыскания) таких двух полиномов второй степени x^2+px+q и x^2+rx+s, коэффициенты которых суть элементарные функции данных отрезков и произведение которых тождественно равно левой части уравнения (2).

Для существования тождества

$$x^4+ax^2+bx+c=(x^2+px+q)(x^2+sx+r)$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части этого тождества были равны. Коэффициент при x^3 в правой части равен $p+s$, а потому $p+s=0$; $s=-p$, и наше тождество переходит в такое:

$$x^4+ax^2+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r),$$

откуда через дальнейшее сравнение коэффициентов находим:

$$r+q=p^2+a,$$
$$p(r-q)=b,$$
$$rq=c.$$

Помножая на p^2 обе части тождества

$$(r+q)^2-(r-q)^2=4rq$$

и заменяя $r+q$ на p^2+a; $p^2(r-q)^2$ на b^2 и rq на c, получим относительно p уравнение шестой степени

$$p^2(p^2+a)^2-b^2=4cp^2,$$

которое, принадлежа корпусу K_0, должно иметь корнем элементарную функцию p. Так как три величины p, p^2 и $\sqrt{p}$ одновременно бывают элементарными функциями, то, полагая

$$p^2=z,$$

найдем, что уравнение 3-й степени $z(z+a)^2-b^2=4cz$ или

$$z^3+2az^2+(a^2-4c)z-b^2=0,$$

принадлежащее корпусу K_0, должно быть разрешимо в квадратных радикалах, а для этого, как мы видели (стр. 46), необходимо, чтобы это уравнение было приводимо в рациональном корпусе K_0. Если это требование удовлетворено, то левая часть уравнения распадется либо на три множителя первой степени, либо на один множитель первой степени и один множитель второй степени. В обоих случаях уравнение будет иметь корнями три элементарные функции, и по крайней мере одна из них будет вещественной. Таким образом, p будет элементарная вещественная функция. Если p не $=0$, то r и q имеют элементарные вещественные значения, определяемые из уравнений $r+q=p^2+a$; $r-q=b:p$. Если $p=0$, то r и q найдутся из уравнений $r+q=0$; $rq=c$, причем r и q будут либо вещественными, либо комплексными элементарными отрезками. В последнем случае уравнение (2), распадаясь на два уравнения $x^2+q=0$ и $x^2+r=0$, не будет иметь вещественных корней, и геометрическая задача вообще будет неразрешима.

Мы приходим, таким образом, к следующему выводу:

Для того, чтобы конструктивная геометрическая задача, приводящаяся к решению уравнения 4-ой степени

$$y^4+gy^3+hy^2+ky+l=0,$$

была разрешима при помощи циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело вещественный корень и чтобы уравнение 3-й степени

$$z^3+2az^2+(a^2-4c)z-b^2=0,$$

в котором величины a, b, c определяются формулами (3), было приводимо.

ОГЛАВЛЕНИЕ

MATHESIS

Одесса, Стурдзовский, 2

Книгоиздательство научных и популярно-научных сочинений из области физико-математических наук

ВЫШЛИ В СВЕТ:

Адлер А. ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ. Пер. с немецк. под ред. проф. С. О. Шатуновского. 2-е изд. XII + 304 стр. 8⁰, *Рб* 2.80.

Дедекинд Р., проф. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. Пер. с нем. Со статьей проф. С. О. Шатуновского: *„Доказательство существования трансцендентных чисел“*, 4-е изд. 44 стр. 8⁰, *Рб*—35.

Журдэн Ф. ПРИРОДА МАТЕМАТИКИ. Перевод с английского под ред. проф. И. Ю. Тимченко. VIII + 177 стр. 16⁰, *Рб* 1.10.

Литцманн В. и Триер В. В ЧЕМ ОШИБКА? Перевод с немецкого. VIII + 78 стр. 16⁰, *Рб* — 55.

Меннхен Ф., проф. НЕКОТОРЫЕ ТАЙНЫ АРТИСТОВ - ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ. Пер. с нем. под ред. проф. И. Ю. Тимченко. VIII + 84 стр. 16⁰, *Рб* — 50.

Роу С. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ С КУСКОМ БУМАГИ. 2-е издание. VIII + 168 стр. 16⁰, *Рб* — 95.

Шатуновский С. О., проф. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. VIII + 224 стр. 8⁰, *Рб* 2.75.

Шуберт Г. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ И ИГРЫ. Пер. с нем. с дополн. проф. С. О. Шатуновского. 2-е изд. VIII + 186 стр. 8⁰, *Рб* 1.70.

Щербина К. М., проф. ТЕРМИНОЛОГИЯ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ. 32 стр. 8⁰, *Рб* — 20.

Астон Ф. ИЗОТОПЫ. Перевод с английск. под ред. проф. Д. Д. Хмырова. VIII + 164 стр. 8⁰, *Рб* 1.80.

Венельт А., проф. ЛАБОРАТОРНАЯ ПРАКТИКА. Перевод с немецкого под ред. проф. Д. Д. Хмырова. VIII + 150 стр. 8⁰, *Рб* 2 — .

Кольрауш Ф., проф. КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ФИЗИКЕ. 2-е издание, вновь просмотренное и дополненное проф. Е. А. Кирилловым. XII + 316 стр. 8⁰, *Рб* 2.60.

Содди Ф., проф. РАДИЙ И СТРОЕНИЕ АТОМА. Перевод с английского под ред. проф. Д. Д. Хмырова. 3-ье издание. VIII + 205 стр. 8⁰, *Рб* 2 — .

Эддингтон А., проф. ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ И ТЯГОТЕНИЕ. Пер. с английск. с примеч. проф. Ю. Г. Рабиновича. VIII + 216 стр. 8⁰, *Рб* 1.50.

Его же. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА НАУЧНУЮ МЫСЛЬ. Пер. с англ. под ред. проф. И. Ю. Тимченко. 32 стр. 16⁰, *Рб* — 30.

Джэнс Д. ПРОИСХОЖДЕНИЕ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. 36 стр. 8⁰. *Рб*–35.

Ньюком С., проф. АСТРОНОМИЯ ДЛЯ ВСЕХ. Перевод с английского проф. А. Р. Орбинского. 3-ье издание, XVI + 226 стр. 8⁰, *Рб* 2 — .

Ланге М. ШАХМАТЫ И ОСНОВЫ ИХ СТРАТЕГИИ. Перевод с немецк. VI + 172 стр. 16⁰, *Рб* 1 – .

МакЛэн, Г. ИНСУЛИН. Пер. с англ. под ред. проф. Д. М. Лаврова. 28 стр. 8⁰.

Ньюбигин М. СОВРЕМЕННАЯ ГЕОГРАФИЯ. Перевод с английск. под редакцией и с примеч. проф. Г. И. Танфильева. 224 стр. 16⁰, *Рб* — 75.

Тромгольт С. ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. 3-е изд. 140 стр. 16⁰, *Рб* — 75.

-30

Склад Издания
Одесское Отделение
Гос. Изд. Украины
Лассаля, 33.